Ugeseddel 6

Planen for den 6. undervisningsuge (11/2–14/2) omfatter „Variationsregning“, fra S 11.1–11.3, 11.5. Ugens øvelser: X-opg: 7, 4, 6; S2.9: 2; S2.10: 1; S2.11: 1.

Kuglerne.

• *Eliminer t.* For et autonomt system i planen, $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, kan man forsøge at bestemme banekurverne ved at *eliminere t*. Af

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \qquad \text{følger formelt, at} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)},$$

idet man kommer til den sidste ligning ved at „dividere den nederste ligning i systemet med den øverste“. Den sidste ligning er en førsteordens differentialligning med én ubekendt funktion $y = y(x)$. Man kan vise, at regningen giver mening: *banerne for løsninger $t \mapsto (x(t), y(t))$ til systemet, gennem punkter i xy-planen hvor $f(x, y) \neq 0$, er netop graferne for funktioner $y = y(x)$, som løser den sidste ligning.* [Bemærk, at man *ikke* nødvendigvis kan løse den sidste ligning; og selv om man kan, vil løsningerne kun fortælle noget om *banerne* for det givne system.]

• *Variationsregning*, med fast interval og begyndelsesværdi. Lad følgende være givet: Et fast interval $[t_0, t_1]$ (bestemt ved $t_0 < t_1$), en $\mathcal{C}^2$-funktion $F = F(t, x, u)$ defineret på $[t_0, t_2] \times \mathbb{R}^2$, og to tal x_0 og x_1. Betragt følgende maksimeringsproblem/opgave:

$$(\max) \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt \quad \text{for } x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{Max$_\mathrm{i}$}$$

Forklaring: Størrelsen x, der indgår i integralet, er en (ubekendt) funktion $x = x(t)$, og integralet kan mere udførligt skrives $J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$. Det opfattes som en afbildning, $x \mapsto J(x)$, der til funktionen $x = x(t)$ knytter tallet $J(x)$. De *tilladte funktioner* er $\mathcal{C}^2$-funktioner $x(t)$ på det givne interval, som opfylder *bibetingelsen* $x(t_0) = x_0$ og $x(t_1) = x_1$, dvs har foreskrevne værdier i endepunkterne. Opgaven er altså at *maksimere $J(x)$ for $x \in \mathcal{T}$*, hvor $\mathcal{T}$ er mængden af tilladte funktioner. Sammenlignet med efterårets maksimeringsopgaver er det nye (bl.a.), at $\mathcal{T}$ her er en mængde af funktioner, og ikke en delmængde af $\mathbb{R}^n$.

At *løse* problemet betyder, at man skal skal finde en tilladt funktion $x^* = x^*(t)$ således, at $J(x^*) \geq J(x)$ for alle tilladte funktioner x (eventuelt skal man finde alle sådanne funktioner $x^*(t)$). For en sådan „*maksimumsfunktion*“ x^* er $J(x^*)$ så *maksimumværdien*, dvs den største værdi af $J(x)$ for tilladte funktioner x, men selve denne maksimumværdi er ofte af mindre interesse.

Der er en række situationer, hvor problemet ikke har løsninger: der kan være vilkårligt store værdier $J(x)$ for $x \in \mathcal{T}$, eller det kan ske, selv om supremum $M := \sup J(x)$ for $x \in \mathcal{T}$ er endelig, at supremum ikke er en værdi $M = J(x)$. Endelig, for analoge problemer med andre bibetingelser, kan det indtræffe, at der slet ikke er tilladte funktioner, altså at $\mathcal{T} = \emptyset$.

Der er et tilsvarende minimumeringsproblem, men det ændres til et maksimeringsproblem ved at erstatte F med $-F$.

• *Andre bibetingelser*. Bibetingelsen, der bestemmer de tilladte funktioner i maksimeringsproblemet (Max_i), er den første af tre naturlige *randbetingelser* (med fast interval $[t_0, t_1]$):
(i) $x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$;
(ii) $x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) \geq x_1$;
(iii) $x(t_0) = x_0, \quad x(t_1)$ er fri.
Til de to sidste bibetingelser svarer maksimeringsproblemer (Max_ii) og (Max_iii). I alle tre bibetingelser stilles det samme krav $x(t_0) = x_0$ til begyndelsesværdien. I betingelsen (iii) stilles der ingen krav til slutværdien $x(t_1)$.

• *Euler's differentialligning*, svarende til $\mathcal{C}^2$-funktionen $F(t, x, u)$, er følgende andenordens ligning med den ubekendte funktion $x = x(t)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial u}, \qquad \text{eller } F'_x = \tfrac{d}{dt}F'_u, \tag{EL}$$

hvor de partielle afledede $F'_x = \partial F/\partial x$ og $F'_u = \partial F/\partial u$ tænkes taget i $(t, x(t), \dot{x}(t))$. Lidt mere udførligt:

$$F'_x(t, x, \dot{x}) = \tfrac{d}{dt}F'_u(t, x, \dot{x}). \tag{EL}$$

Også i den sidste form skal man tænke sig t indsat, altså tænke på $(t, x(t), \dot{x}(t))$ for $(t, x, \dot{x})$. Det er specielt vigtigt, når man på højresiden differentierer mht t: der står d/dt, og ikke $\partial/\partial t$. [Af og til skrives funktionen F endda som $F(t, x, \dot{x})$ og den partielle afledede mht den tredie variabel betegnes $F'_{\dot{x}} = \partial F/\partial \dot{x}$!.]

Eulerligningen er en andenordens ligning, dvs en ligning, hvori der indgår $t, x, \dot{x}, \ddot{x}$. Selvom den „næsten" er på normalform, se [S, s. 338(3)], er der ingen generelle sætninger, som garanterer eksistens af løsninger på hele intervallet. Men er der løsninger til (EL), forventer man, at der i den generelle løsning typisk indgår 2 arbitrære konstanter, og at 2 *transversalitetsbetingelser* er nødvendige for at bestemme konstanterne, dvs nødvendige for at fastlægge én løsning (eller endeligt mange løsninger) til (EL).

• *Nødvendig betingelse*. Hvis $x = x(t)$ løser problemet (Max_i), hhv. (Max_ii), hhv. (Max_iii), så gælder (EL) og den tilsvarende af følgende transversalitetsbetingelser:
(i*) $x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$;
(ii*) $x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) \geq x_1, \quad F'_u|_{t=t_1} \leq 0$, med lighed i mindst en af ulighederne;
(iii*) $x(t_0) = x_0, \quad F'_u\big|_{t=t_1} = 0$.
I (ii*) og (iii*) er det underforstået, at F'_u betyder $F'_u(t, x(t), \dot{x}(t))$, og det er værdien af denne funktion for $t = t_1$, der indgår.

• *Tilstrækkelig betingelse*. Antag $F(t, x, u)$ for hvert fast t er en konkav funktion af (x, u), så gælder: Hvis $x = x(t)$ opfylder (EL) og transversalitetsbetingelsen (i*), hhv. (ii*), hhv. (iii*), så er $x(t)$ en løsning til maksimeringsopgaven (Max_i), hhv. (Max_ii), hhv. (Max_iii).

Planen for den syvende uge (18/2–21/2) omfatter „Variationsregning", fra S 11.1–11.3, 11.5. Ugens øvelser: H2O: **33**, 30, 31; EO: 18; S11.2: 1, 2.

Anders Thorup