Ugeseddel 5

Program. I den 5. uge, 4/2–7/2, er overskriften „Stabilitet“, på basis af S 2.11–2.12; 3.3–3.6. Ugens opgaver er S2.3: **5**; S2.6: 1, 2; S2.7: 1; S2.8: 1; S2.9: 1.

Parlør. ‘trase (til matrise)’ (eng: trace) = ‘spor (af matrix)’; ‘nullkline’ (ved juletid: null-cline) = ‘nul-kurve’ ; ‘kilde’ (eng: source) = ‘kilde’; ‘sluk’ (eng: sink) = ‘dræn’ (afløb?).

Kuglerne.

• *I faseplansanalysen* af $\dot{x} = f(x, y)$ og $\dot{y} = g(x, y)$ kaldes de to kurver bestemt ved $f = 0$ („lodret“ tangent) og $g = 0$ („vandret tangent“) for systemets *nul-kurver*. Bemærk, at nul-kurverne *ikke er* banekurver, bortset fra i meget specielle tilfælde. Bemærk også, at hver af nulkurverne kan bestå af flere dele, se [S, s. 62].

• *Hvor vild må man være*, som tiden går, hvis man er en (maksimal) løsning $\mathbf{x}(t)$ til en autonom DL: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Der er nogle få regler:

(0) Man må blive, hvor man er, men så starter man i et ligevægtspunkt.

(1) Man må ikke krydse en af de andre baner! Men man må gerne krydse sin egen: men: hvis $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}(0)$, så er $\mathbf{x}(T + t) = \mathbf{x}(t)$ for alle t, fordi begge kurver er løsninger med den samme værdi for $t = 0$. Og det betyder, at man, igen og igen, gennemløber den samme lukkede bane periodisk.

(2) Man må ikke gå i stå (til endelig tid): Løsningen er defineret på et åbent interval, og det kan være opad begrænset, af formen $]a, b[$, med $b < \infty$. Her lever man kun i endelig tid, dvs for $t < b$, men så er man tvunget til at løbe væk: $|\mathbf{x}(t)| \to \infty$ for $t \to b$. [Hvis $\mathbf{F}$ kun er defineret på en delmængde $S \subseteq \mathbb{R}^n$, så løber man ud mod randen af S.]

(3) Hvis man lever altid, dvs $\mathbf{x}(t)$ er defineret for alle $t \geq 0$, så er det også tilladt at løbe væk. Det er også en tilladt mulighed, at man nærmer sig et bestemt punkt for $t \to \infty$; dette punkt vil så automatisk være et ligevægtspunkt.

(4) For $n = 1$ er der faktisk ikke andre muligheder! For $n = 2$ er det også en mulighed at komme tættere og tættere på en lukket bane; der er faktisk *alle* de muligheder for at være vild, som man kan forestille sig. For $n \geq 3$ er der flere endnu!

Skal vi understrege, at med „muligheder“ menes der muligheder for $\mathbf{F}$? Når $\mathbf{F}$ i differentialligningen er givet, er ens opførsel naturligvis helt fastlagt: Man *skal* følge pilene.

• *Stabilt lineært system*. Et lineært system af differentialligninger,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

er *asymptotisk stabilt*, hvis [ækvivalente betingelser]:

(i) alle løsninger opfører sig ens for $t \to \infty$, eller
(ii) alle løsninger til den homogene ligning $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ går mod $\mathbf{0}$ for $t \to \infty$, eller
(iii) alle (komplekse) egenværdier (dvs alle rødder i det karakteristiske polynomium) for A har negativ realdel (og hertil kan Hurwitz–Routh’s sætning bruges).

• *Stabilitet for en ikke-lineær ligning* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ vedrører et ligevægtspunkt (en stationær tilstand) $\mathbf{a}$. Ligevægtspunktet $\mathbf{a}$ er (lokalt) *stabilt*, hvis der for hvert $\varepsilon > 0$ gælder, at alle løsninger, som starter tilstrækkeligt tæt ved $\mathbf{a}$, højst kommer afstanden ε væk fra $\mathbf{a}$.

[„Starten“ er punktet $\mathbf{x}(t_0)$ for et givet t_0. Hvad der er „tilstrækkeligt tæt“ ved $\mathbf{a}$, afhænger af ε: der skal findes et $\delta > 0$ således, at konklusionen („højst kommer afstanden ε væk fra $\mathbf{a}$“) er opfyldt, hvis $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{a}| < \delta$.]

Ligevægtspunktet **a** er (lokalt) *asymptotisk stabilt*, hvis det er et stabilt og der desuden gælder, at enhver løsning, som starter tilstrækkeligt tæt ved **a**, konvergerer mod **a** for $t \to \infty$. Ordet „lokalt" kan tilføjes for at understrege, at det ikke kræves, at *alle* løsninger konvergerer med **a**.

• *Stabil/stabil*. Bemærk, at „asymptotisk stabil", „stabil", osv optræder i to forskellige situationer: Det bruges om et ligevægtspunkt (=konstant løsning) for en given differentialligning, og det bruges om en lineær (evt. inhomogen) differentialligning. I den sidste situation svarer det til brugen om ligevægten 0 for den tilsvarende homogene ligning. For lineære ligninger er det interessante asymptotisk stabilitet, og det er altid globalt. For autonome ligninger er „*stabil*" ret svagt; vigtigere er (lokalt) *asymptotisk stabil*, og stærkest er *globalt asymptotisk stabil*.

• *Liapunov's Sætning. Antag, at* **a** *er ligevægtspunkt for en autonom DL:* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. *Hvis der om Jacobi-matricen* $\mathbf{F}'(\mathbf{a})$ *gælder, at alle* (komplekse) *rødder i det karakteristiske polynomium har negativ realdel, så er* **a** *asymptotisk stabil.*

Hvis mindst én karakteristisk rod har positiv realdel, så er ligevægten **a** *ustabil.*

• *I planen.* For $n = 2$, ligning $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ og et givet ligevægtspunkt (a, b): Punktet er asymptotisk stabilt, når der *i punktet* gælder: $f'_x + g'_y < 0$ og $f'_x g'_y - f'_y g'_x > 0$. Hvis der i punktet gælder $f'_x + g'_y > 0$ eller $f'_x g'_y - f'_y g'_x < 0$, så er punktet ustabilt. I de resterende tilfælde er der ingen konklusion.

• *Saddelpunkt*. Ligevægtspunktet (a, b) kaldes et *saddelpunkt*, hvis der *i punktet* gælder, at $f'_x g'_y - f'_y g'_x < 0$ (det betyder, at Jacobi-matricen har to reelle egenværdier af modsat fortegn). For et saddelpunkt (a, b) gælder, at der, ud over ligevægtspunktet, findes præcis to baner for løsninger, som konvergerer mod (a, b) for $t \to \infty$. De to baner tangerer, fra modsatte retninger, linien gennem (a, b) bestemt ved en egenvektor hørende til den negative egenværdi.

• *Liapunov-funktion*. Betragt en autonom DL: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, og et givet ligevægtspunkt **a**. For en reel C^1-funktion $V(\mathbf{x})$, defineret i en omegn af **a**, sættes

$$\dot{V}(\mathbf{x}) := V'_{\mathbf{F}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x});$$

det er den retningsafledede af $V(\mathbf{x})$ i retningen $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. For en løsning $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ til den givne DL finder man $\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) = \dot{V}(\mathbf{x}(t))$.

Funktionen $V(\mathbf{x})$ er en *Liapunov-funktion*, hvis der nær ved **a** gælder:

$$V(\mathbf{a}) = 0, \qquad V(\mathbf{x}) > 0 \text{ for } \mathbf{x} \neq \mathbf{a}, \quad \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ for } \mathbf{x} \neq \mathbf{a}.$$

Sætning (Liapunov). *Antag, at der findes en Liapunov-funktion* $V(\mathbf{x})$. *Så er ligevægtspunktet* **a** *stabilt. Hvis* $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ *for* $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ *så er* **a** *asymptotisk stabilt; er desuden* $V(\mathbf{x})$ *defineret for alle* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *og* $V(\mathbf{x}) \to \infty$ *for* $|\mathbf{x}| \to \infty$, *så er* **a** *globalt asymptotisk stabilt.*

Planen for den sjette uge (11/2–14/2) omfatter „Variationsregning", fra S 11.1–11.3, 11.5. Ugens øvelser: X-opg: 7, 4, 6; S2.9: 2; S2.10: 1; S2.11: 1.

Anders Thorup