Ugeseddel 4

Program. I fjerde uge, 28/1–31/1, er overskriften „Lineære systemer; Stabilitet“, på basis af S 2.6–2.10, 3.3–3.5. Ugens opgaver er: S2.3: **1**(**a**) − (**c**), 1(e)–(g), 2, 8, 9; S3.1: 1. Du kan ikke forvente at alle opgaver gennemgås ved øvelserne; du må prøve kræfter med nogle af dem selv.

Kuglerne.

• *Stabil differentialligning.* En lineær n'te-ordens DL,

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = h(t), \qquad (*)$$

er (*globalt*) *asymptotisk stabil*, [S, s. 48–49, s. 77], hvis alle løsninger opfører sig „ens“ for $t \to \infty$. Vilkårlige to løsninger afviger med en funktion, der løser den homogene ligning. Ækvivalent (og mere præcist) er ligningen (*) asymptotisk stabil, hvis der for alle løsninger $u(t)$ til den tilsvarende homogene ligning (o) gælder, at $u(t) \to 0$ for $t \to \infty$. Der findes n funktioner $u_1(t), \ldots, u_n(t)$, som er en basis for løsningsrummet til den homogene ligning. For asymptotisk stabilitet er det øjensynlig nok, at $u_j(t) \to 0$ for $j = 1, \ldots, n$. Bemærk, at stabilitet ikke afhænger af højresiden $h(t)$.

I det følgende antages, at koefficienterne er konstante, $a_i(t) = a_i$. Så har ligningen et tilhørende karakteristisk polynomium: $z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$.

• *Check-betingelse for stabilitet. Den lineære n'te-ordens DL med konstante koefficienter er asymptotisk stabil, hvis og kun hvis alle karakteristiske rødder har negativ realdel.*

For $n = 1$: $\dot{x} + bx = h(t)$ er asymptotisk stabil, hvis og kun hvis $b > 0$.

For $n = 2$: $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = h(t)$ er asymptotisk stabil, hvis og kun hvis $b > 0$ og $c > 0$.

For alle n: Hvis ligningen (*) er asymptotisk stabil, så er alle koefficienter $a_i > 0$. [Men ikke omvendt, når $n > 2$.]

• *Hurwitz–Routh's sætning.* I polynomiet $z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ har alle rødder negativ realdel, hvis og kun hvis alle ledende hovedunderdeterminanter i $n \times n$-matricen (a_{2j-i}) er positive. Her er $a_0 = 1$ og $a_k = 0$ for $k > n$ og for $k < 0$. Matricen ser ud som følger:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix},$$

altså $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i diagonalen, og følgen af koefficienter aftagende nummereret i hver søjle.

• *Stabilt lineært system.* Det lineære differentialligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ er *asymptotisk stabilt*, hvis der for alle løsninger $\mathbf{x}(t)$ til det tilsvarende homogene system $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ gælder, at

$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ for $t \to \infty$. Ækvivalent: alle rødder i det karakteristiske polynomium for matricen A har negativ realdel.

• *En autonom DL*, [S, s. 83], er et system af følgende form:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \text{eller} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

hvor $\mathbf{F}$ er en $\mathcal{C}^1$-vektorafbildning med n koordinatfunktioner f_i i n variable (dvs defineret på en åben delmængde $S \subseteq \mathbb{R}^n$). Specielt afhænger højresiden ikke af t. En *løsning* er en vektorfunktion $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, defineret på et interval, således, at $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ for alle t. Løsningen bestemmer en kurve i $\mathbb{R}^n$; den kaldes også en *integralkurve*. Gennem hvert punkt i $\mathbf{x}_0$ i S går en og kun én integralkurve.

Rummet $\mathbb{R}^n$ kaldes også *faserummet* (for $n = 2$: *faseplanen*). Integralkurven gennem et punkt $\mathbf{x}_0$ har i dette punkt tangentvektoren $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$. Man får altså et indtryk af integralkurverne ved at afsætte vektoren $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ud fra $\mathbf{x}$ for forskellige punkter $\mathbf{x}$. I faserummet kan man angive integralkurvens *bane*, dvs billedmængden, med pile, der angiver gennemløbsretningen. Et *faseportræt* er en tegning, hvor så mange baner for integralkurver er indtegnet, at man har et overblik over dem alle. BEMÆRK: for at bestemme en løsning til differentialligningen, altså en integralkurve, er det *ikke nok* at angive banen med pile; det skal også præciseres, hvordan (dvs med hvilken fart) banen gennemløbes.

• *Ligevægtspunkt*, eller *ligevægt*, for en autonom DL er et punkt $\mathbf{x}_0$ i faserummet, hvor $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Et sådant punkt svarer til en *ligevægtstilstand* (eller *stationær tilstand*): en søjle af konstante funktioner, som løser den givne DL.

For en lineær autonom differentialligning $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ bestemmes ligevægtspunkter ved at løse ligningen $A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Antages, at A er invertibel, er der ét ligevægtspunkt $\mathbf{x}_0 = -A^{-1}\mathbf{b}$. Oftest kan det antages, at ligevægtspunktet er $\mathbf{0}$, svarende til den homogene DL: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.

• *En faseplansanalyse* af en autonom DL i planen, $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, kan give en fornemmelse af banernes forløb: Ligningen $\dot{x} = f$ fortæller, at $\dot{x}$ har samme fortegn som f. Ligningen $f = 0$ bestemmer den ene *nulkurve*. På denne kurve er $\dot{x} = 0$, så banekurvens tangentvektor $(\dot{x}, \dot{y})$ har førstekoordinaten 0, dvs tangentvektoren er lodret, og hvis $\dot{y} = g > 0$ peger den opad: $\uparrow$. På nulkurven $f = 0$ markeres $\uparrow$ eller $\downarrow$. Tilsvarende markeres vandret tangent på den anden *nulkurve* $g = 0$. Skæringspunkterne mellem de to nulkurver er netop ligevægtspunkterne. Området uden for nul-kurverne kan opdeles i områder, hvor koordinatfunktionerne f og g har konstante fortegn: Et område, hvor $f < 0$ og $g > 0$ markeres med pilesymbolet $\swarrow\!\uparrow$. thi her er $\dot{x} = f < 0$ (så x er aftagende, dvs (x, y) bevæger sig mod venstre) og $\dot{y} = g > 0$ (så y er voksende, dvs (x, y) bevæger sig opad).

Planen for femte uge (4/2–7/2) omfatter „Stabilitet“, fra S 2.11–2.12; 3.3–3.6. Ugens opgaver er følgende: S2.3: <u>5</u>; S2.6: 1, 2; S2.7: 1; S2.8: 1; S2.9: 1.

Anders Thorup