Ugeseddel 3

Program. I den tredie undervisningsuge, 21/1–24/1, er overskriften „Lineære n'te-ordens differentialligninger (og systemer)", på baggrund af S 3.1, 3.2, 2.7 (s51–52). Ugens øvelser er: S1.3: 3 (b) – (d), **9**; S1.4: 3(b)+(c); S1.5: 1; S2.2: 1, 3. Den markerede opgave er til skriftlig aflevering.

Forkortelse: DL='differentialligning'. Engelsk: ODE='ordinary differential equation'.

Kuglerne.

• *2.ordens DL med konstante koefficienter* (*homogen, inhomogen,* og *karakteristisk polynomium*):

$$\text{(o)} \qquad \ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \qquad\qquad (*) \qquad \ddot{x} + b\dot{x} + cx = h(t),$$

$$z^2 + bz + c, \quad \text{med rødderne } r = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}, \quad \text{hvor } D = b^2 - 4c.$$

For den homogene ligning (o) afhænger løsningen af fortegnet for D (*diskriminanten*):

$D > 0$: Der er to reelle rødder r_1 og r_2, og den generelle løsning er $x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.

$D = 0$: Der er én (dobbelt)rod $r = -\frac{b}{2}$, og den generelle løsning er $x = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}$.

$D < 0$: Der er to ikke-relle rødder $\alpha \pm i\beta$, hvor $\alpha = -b/2$, og $\beta = \sqrt{|D|}/2$; den generelle løsning er $x = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$. Alternativt: Den generelle løsning er $x = C e^{\alpha t} \cos(\beta t + K)$, hvor C, K er arbitrære konstanter.

For den inhomogene ligning (*): Partikulære løsninger findes ved systematiske gæt, [S, s. 40–42]: Med $h(t) = e^{\lambda t}$ gættes på $x = Ae^{\lambda t}$ (virker ikke, hvis λ er karakteristisk rod, men så virker $Ate^{\lambda t}$ eller $At^2 e^{\lambda t}$). Med $h(t)$ =polynomium gættes på $x = A + Bt + Ct^2 + \cdots$ (et polynomium). Med $h(t) = e^{\lambda t} \sin \omega t$ gættes på $x = Ae^{\lambda t} \sin \omega t + Be^{\lambda t} \cos \omega t$ (virker, hvis $\lambda + i\omega$ ikke er karateristisk rod).

Specielt, hvis $h(t) = k$ er konstant (og $c \neq 0$) er $x(t) = k/c$ en løsning.

• *En n'te-ordens DL med konstante koefficienter* har tilsvarende et *karakteristisk polynomium:*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = h(t), \qquad z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n.$$

For den homogene DL: En reel karakteristisk rod r, med multiplicitet m, giver m løsninger:

$$e^{rt},\ te^{rt},\ \ldots,\ t^{m-1}e^{rt},$$

og par af komplekst konjugerede rødder $\alpha \pm \beta i$, med multiplicitet m, giver $2m$ løsninger:

$$e^{\alpha t}\cos \beta t,\ e^{\alpha t}\sin \beta t,\ te^{\alpha t}\cos \beta t,\ te^{\alpha t}\sin \beta t,\ \ldots,\ t^{m-1}e^{\alpha t}\cos \beta t,\ t^{m-1}e^{\alpha t}\sin \beta t.$$

For den inhomogene ligning: Prøv med systematiske gæt.

• *Lineært system med konstante koefficienter*, $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$, fx for $n = 2$,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \qquad \text{hvor } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

eller,

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \dot{x} = ax + by + h(t), \\ &(2) \qquad \dot{y} = cx + dy + g(t). \end{aligned}$$

Det er umiddelbart at generalisere til et lineært system (med konstante koefficienter) af n *koblede* differentialligninger med n ubekendte funktioner.

En *løsning* er en *søjle* af funktioner $(x, y)^{\mathrm{tr}} = (x(t),\ y(t))^{\mathrm{tr}}$, defineret på et interval, som opfylder de to ligninger for alle t. Løsningen er en vektorfunktion; den bestemmer en kurve i $\mathbb{R}^2$, kaldet en *integralkurve* for systemet.

• *Metode:* Bestem by ud fra ligning (1), og bestem herfra $b\dot{y}$ ved at differentiere. Multiplicer ligning (2) med b, og indsæt heri de fundne udtryk for by og $b\dot{y}$, – og reducer!

$$\begin{gathered} by = \dot{x} - ax - h(t), \qquad b\dot{y} = \ddot{x} - a\dot{x} - \dot{h}(t), \\ \ddot{x} - a\dot{x} - \dot{h}(t) = bcx + d(\dot{x} - ax - h(t)) + bg(t), \\ \ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (ad - bc)x = bg(t) - dh(t) + \dot{h}(t). \end{gathered}$$

Udtrykt ved matricen A er $ad - bc = \det A$, og $a + d$, summen af tallene i diagonalen, kaldes *matricens spor* og betegnes $\operatorname{tr} A$. Ligningen er altså

$$\ddot{x} - (\operatorname{tr} A)\,\dot{x} + (\det A)\,x = bg(t) - dh(t) + \dot{h}(t). \tag{*}$$

Specielt ses, at det karakteristiske polynomium, for denne DL og for matricen A, er det samme. Herefter løses (*), og endelig bestemmes y af ligning (1) (hvis $b \neq 0$).

• *Metoden virker også med variable koefficienter*. Antag ovenfor, at også a, b, c, d er funktioner af t, og at $b(t)$ overalt er $\neq 0$. I metoden er det kun det andet skridt, 'bestem $b\dot{y}$', der skal korrigeres: differentiationen giver yderligere bidraget $\dot{b}y$ på venstrsiden og $-\dot{a}x$ på højresiden. I $\dot{b}y$ kan man indsætte y bestemt fra (1). I ligningen for $b\dot{y}$ skal højresiden herefter korrigeres med $-\dot{b}y - \dot{a}x = -\dot{b}(\dot{x} - ax - h)/b - \dot{a}x$. Herved fås ligningen,

$$\ddot{x} - (a + d - \dot{b}/b)\dot{x} + (ad - bc - \dot{a} + a\dot{b}/b)\,x = bg - dh + \dot{h} - h\dot{b}/b, \tag{‡}$$

altså en 2.ordens DL noget mere kompliceret end (*).

Planen for den fjerde uge (28/1–31/1) er at gennemgå Lineære systemer; Stabilitet, fra S 2.6–2.10, 3.3–3.5. Ugens øvelser er følgende: S2.3: **1**(**a**) – (**c**), 1(e)–(g), 2, 8, 9; S3.1: 1. Den markerede opgave er til skriftlig aflevering.

Anders Thorup