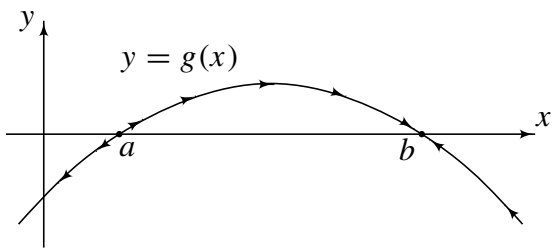
Ugeseddel 2

Program. Den 2. undervisningsuge, 14/1–17/1, har overskriften „Andenordens differentialligninger“, på baggrund af S 2.1–2.3. Ugens øvelser er: S1.1: 2, 3, **4**; S1.2: 1; S1.3: 1, 3(a); S1.4: 3 (a). Den markerede opgave er til skriftlig aflevering.

Parlør. ‘den allmenne løsning’ = ‘den generelle løsning’.

Kuglerne.

• *Stabil ligevægt*. Betragt en *autonom* differentialligning $\dot{x} = g(x)$, dvs en differentialligning, hvor højresiden er uafhængig af t (og $g(x)$ er en $\mathcal{C}^1$-funktion). Ligningen er specielt separabel, og nulpunkter a for $g(x)$, dvs $g(a) = 0$, svarer til konstante løsninger $x(t) = a$. De kaldes også *ligevægtstilstande*. Ved *fasediagrammet* forstås blot grafen for funktionen $g(x)$, fx:



Den fundamentale forbindelse mellem differentialligningen og grafen er, at når $x(t)$ er en løsning til differentialligningen, så vil punktet $\big(x(t)\,,\ \dot{x}(t)\big)$ ligge på grafen for alle t. Når t vokser fra en given værdi t_0 („når tiden går“), vil punktet flytte sig på grafen. De afsatte pile markerer retningen: Er punktet $\big(x(t_0)\,,\ \dot{x}(t_0)\big)$ i den øvre halvplan, så er $\dot{x}(t_0) > 0$. Derfor er $x(t)$ en voksende funktion nær t_0, så når t vokser ud fra t_0 vil punktets førstekoordinat vokse, dvs punktet flytter sig mod højre. Tilsvarende, i den nedre halvplan peger alle pile mod venstre.

Ligevægtstilstande, altså nulpunkter for $g(x)$, svarer til grafens skæringspunkter med x-aksen. I eksemplet er a en *ustabil ligevægt*: Det fremgår, af pilene, at en løsning $x(t)$ med $x(t_0)$ tæt ved a vil fjerne sig fra a. Og b er en *asymptotisk stabil ligevægt*: En løsning $x(t)$ med $x(t_0)$ tæt ved b vil „nærme sig b, når t vokser“. Sådan står der i [S, p. 24[8]], men det kan præciseres:

Hvis b er en ligevægt (dvs $g(b) = 0$) og $g'(b) < 0$, så er b asymptotisk stabil: Enhver løsning $x(t)$ med $x(t_0)$ tæt ved b er defineret for alle $t \geq t_0$, og $\lim_{t\to\infty} x(t) = b$.

• *En andenordens differentialligning* (på normalform) har formen $\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$. På højresiden er F en kontinuert funktion af 3 variable, dvs en afbildning $F\colon S \to \mathbb{R}$, hvor $S \subseteq \mathbb{R}^3$. På venstresiden skal du tænke på $\ddot{x}$ som den dobbeltafledede $\ddot{x}(t) = d^2x/dt^2$, og ved en løsning til ligningen forstås en to gange differentialbel funktion $x(t)$, defineret på et interval, således at

$$\ddot{x}(t) = F\big(t\,,\ x(t)\,,\ \dot{x}(t)\big) \quad \text{for alle } t.$$

Tilsvarende betragtes løsninger til en n'te-ordens differentialligning:

$$x^{(n)} = F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)}),$$

hvor F er en funktion af $n + 1$ variable, og $x^{(i)}$ betegner den i gange afledede funktion $d^i x/dt^i$.

• *Den lineære differentialligning*, af n'te orden, har formen:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{x} + a_n(t)x = h(t), \qquad (*)$$

hvor $a_1, \ldots, a_n$ og h er *kontinuerte* funktioner defineret på et åbent interval $J \subseteq \mathbb{R}$.

Hovedsætning 1. *Alle maksimale løsninger til* (*) *er defineret på hele intervallet* J.

Løsningerne til (*) udgør altså en delmængde $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}^n(J)$. Venstresiden i (*) er en operator L: Put en $\mathcal{C}^n$-funktion $x = x(t)$ ind i udtrykket, og ud kommer en kontinuert funktion $L(x) = L(x)(t)$. Operatoren L er en afbildning,

$$L\colon \mathcal{C}^n(J) \to \mathcal{C}^0(J),$$

fra $\mathcal{C}^n$-funktioner til kontinuerte funktioner. Den er lineær: af velkendte regneregler for differentiation af sum og produkt (med en konstant) følger, at $L(x+y) = L(x) + L(y)$, og $L(\lambda x) = \lambda L(x)$. Løsningerne til (*) er de funktioneer $x = x(t)$, som opfylder $L(x) = h(t)$. Med andre ord: *Løsningerne udgør originalmængden* $\mathcal{S} = L^{-1}(h(t))$.

• *Den homogene ligning* er den lineære ligning (*), hvor højresiden er nul-funktionen 0:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{x} + a_n(t)x = 0. \qquad (o)$$

Løsningsmængden til ligningen (o) er originalmængden $L^{-1}(0)$. Det er som bekendt det, der kaldes *kernen* for den lineære afbildning L. Af generelle resultater følger derfor: *Løsningsmængden til den homogene ligning* (o) *er et underrum af vektorrummet* $\mathcal{C}^n(J)$. *Løsningsmængden til den inhomogene ligning* (*) *fås ud fra én løsning* (*en partikulær løsning*) *ved at addere samtlige løsninger til den homogene ligning.*

Hovedsætning 2. *Idet vi for et givet* $t_0 \in J$ *og en funktion* $x = x(t)$ *i* $\mathcal{C}^n(J)$ *betragter vektoren* $x^{(<n)}(t_0) := (x(t_0), \dot{x}(t_0), \ddot{x}(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0))$ *i* $\mathbb{R}^n$, *gælder, at* $x \mapsto x^{(<n)}(t_0)$ *er en bijektiv afbildning* $\mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ *fra mængden* $\mathcal{S}$ *af løsninger til* (*) *til vektorrummet* $\mathbb{R}^n$.

Hovedsætningerne 1 og 2 er, hverken mere eller mindre, indholdet af [S, Sætning 3.1.2].

• *Konsekvenser*. *Om løsningsmængden* $\mathcal{S}_0$ *til den homogene ligning* (o) *gælder:* $\mathcal{S}_0$ *er et vektorrum af dimension* n, *dvs der findes et sæt af* n *lineært uafhængige løsninger* $u_1, \ldots, u_t$, *og for hvert sådant sæt er den generelle løsning til* (o) *bestemt ved:*

$$x(t) = C_1u_1(t) + \cdots + C_nu_n(t), \qquad C_i \in \mathbb{R}.$$

Den inhomogene ligning (*) *har løsninger, og ud fra én sådan løsning* $u^*(t)$ *(en partikulær løsning) er den generelle løsning bestemt ved:*

$$x(t) = u^*(t) + C_1u_1(t) + \cdots + C_nu_n(t), \qquad C_i \in \mathbb{R}.$$

Sydsæters bevis er fortvivlende! Her er det rigtige: Løsningsmængden $\mathcal{S}_0$ til den homogene ligning (o) er et underrum i vektorrummet $\mathcal{C}^n(J)$, og øjensynlig er $x \mapsto x^{(<n)}(t_0)$ en lineær afbildning $\mathcal{S}_0 \to \mathbb{R}^n$. Af Hovedsætning 2 følger, at det er en bijektiv afbildning. Altså er afbildningen en isomorfi af vektorrum $\mathcal{S}_0 \to \mathbb{R}^n$, og derfor er $\dim \mathcal{S}_0 = n$. Resten er lineær algebra.

Planen for den tredie uge (21/1–24/1) er at gennemgå Lineære n'te-ordens differentialligninger (og systemer), fra S 3.1, 3.2, 2.7 (s51–52). Ugens øvelser er følgende: S1.3: 3 (b) – (d), **9**; S1.4: 3(b)+(c); S1.5: 1; S2.2: 1, 3. Den markerede opgave er til skriftlig aflevering.

Anders Thorup