Ugeseddel 1

Velkommen til kurset Differentialligninger og Optimal Kontrolteori (2013), også kaldet *DOK*. Kurset har en hjemmeside:

`http://www.math.ku.dk/kurser/2013-1/dok/`

Her kan du finde oplysninger om kurset, om lærebøger, pensum, undervisningsplaner og eksamen. Jeg hedder i øvrigt Anders Thorup, og jeg kan træffes på H. C. Ørsted Instituttet (lokale 04.2.09), tlf 353 20751, e-mail: `<thorup@math.ku.dk>` — eller privat, tlf 44653153. Hjemmesiden er nok ikke helt færdigredigeret.

Undervisningsmateriale. Den egentlige lærebog er, som ved MASO:

[S] *K. Sydsæter et al., Matematisk analyse, bind II, 4. udgave, Gyldendal Akademisk, Oslo 2002 (eller senere),*

men teksterne på ugesedlerne er også relevant.

Program. Undervisningsuge 1 (7/1–10/1) har overskriften „Differential-maraton, 4t+2t+2t“ (Førsteordens differentialligninger), på baggrund af S 1.1–1.7. Det er et maratonforløb, for der er 4 timers undervisning om mandagen. Der er ingen øvelser i denne uge.

Parlør. ‘ordinær differensiallikning’ = ‘sædvanlig differentialligning’.

• *En førsteordens differentialligning* har formen

$$\dot{x} = F(t, x). \tag{*}$$

Venstresiden betegner den afledede af funktionen $x = x(t)$, og ligningen kunne helt ækvivalent være skrevet på formen $x' = F(t, x)$ eller $dx/dt = F(t, x)$. Højresiden i (*) er en funktion $F\colon S \to \mathbb{R}$, hvor $S \subseteq \mathbb{R}^2$, altså en funktion $F(x, t)$ defineret for $(t, x) \in S$.

• *En løsning* til (*) er en differentiabel funktion $x = x(t)$, defineret på et (sædvanligvis åbent) *interval* I, således, at der for alle $t \in I$ gælder, at $\big(t, x(t)\big) \in S$ og $\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big)$. Det er meningsløst at indsætte et talpar (t, x) i ligningen (*). Men for en given (differentiabel) funktion $x = x(t)$ kan man, for hvert t, indsætte $(t, x(t))$ på højresiden af (*) og undersøge om værdien $F(t, x(t))$ er lig med venstresiden, dvs lig med $\dot{x}(t)$.

BEMÆRK: det er et helt UFRAVIGELIGT KRAV til en løsning $x(t)$, at definitionsmængden er et interval.

• *En maksimal løsning* til (*) er en løsning $x\colon I \to \mathbb{R}$, som ikke kan *udvides* til en løsning med et *større* definitionsinterval. I praksis angiver man kun maksimale løsninger.

• *Eksempel.* Hvis man siger, at ligningen $\dot{x} = -x^2$ har løsningen $x = 1/t$, så er det underforstået, at udtrykket $1/t$ bestemmer (mindst) *to løsninger*, nemlig en funktion defineret på intervallet $]0, \infty[$ og en funktion defineret på intervallet $]-\infty, 0[$. De to løsninger er maksimale løsninger til differentialligningen. Udtrykket bestemmer selvfølgelig også løsninger på mindre intervaller. Ligningen har i øvrigt mange andre maksimale løsninger.

• *Eksistens- og entydighedssætning* [S, s. 27]. *Antag, at $F(t,x)$ er kontinuert i en åben mængde $S \subseteq \mathbb{R}^2$, og at $F'_x(t,x) = \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)$ eksisterer og er kontinuert i S* (fx kunne F være en C^1-funktion). *Lad lad $(t_0, x_0) \in S$ være givet. Da findes en og kun én maksimal løsning $x\colon I \to \mathbb{R}$ til* (*) *med $t_0 \in I$ og $x(t_0) = x_0$.*

• *„Separabel" ligning*, [S, s. 6],

$$\dot{x} = h(t)g(x).$$

Løses efter opskriften: (0) Nulpunkter x_0 for $g(x)$, altså $g(x_0) = 0$, giver de konstante løsninger $x(t) = x_0$. Derefter omskrives formelt:

$$(1)\quad \frac{dx}{dt} = h(t)g(x), \qquad (2)\quad \frac{1}{g(x)}dx = h(t)dt, \qquad (3)\quad \int \frac{1}{g(x)}dx = \int h(t)dt + C.$$

I ligning (2) er de variable x og t separerede, så de står på hver sin side af lighedstegnet. Ligningen giver ikke megen mening, men den er basis for integrationen, som fører til den tredie ligning. Husk, at $\int h(t)\,dt$ betegner „en eller anden stamfunktion" til $h(t)$, og glem aldrig den arbitrære konstant C. (4) Herefter bestemmes (om muligt) de to stamfunktioner, der indgår i den tredie ligning. (5) Denne ligning løses så (om muligt) mht x.

• *Lineær førsteordens differentialligning*, [S, s. 12–16], med kontinuerte $a(t)$ og $h(t)$:

$$\dot{x} + a(t)x = h(t).$$

Den generelle løsning er følgende (hvor $A(t)$ er en stamfunktion til $a(t)$):

$$x(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(t)} h(t)\,dt + Ce^{-A(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

• *... med konstante koefficienter.* Hvis $a(t) = a$ er konstant, bliver formlen simplere. Funktionen $A(t) = at$ er en brugbar stamfunktion, så formlen reduceres til bestemmelse af stamfunktioner af formen $\int e^{at} h(t)\,dt$. Hvis også $h(t) = h$ er konstant, er det let: Den fuldstændige løsning til $\dot{x} + ax = h$ er følgende (når $a \neq 0$):

$$x(t) = h/a + Ce^{-at}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

• *Bernoulli's differentialligning*, [S, s. 18], med $n \in \mathbb{R}$ ($n \neq 1$):

$$\dot{x} = Q(t)x + R(t)x^n \quad (x > 0), \tag{*}$$

omformes ved substitutionen $z := x^{1-n}$ (tilbage: $x = z^{1/(1-n)}$) til den *lineære* ligning:

$$\dot{z} - (1-n)Q(t)z = (1-n)R(t)\,.$$

Planen for uge 2 (14/1–17/1) er at gennemgå Andenordens differentialligninger, fra S 2.1–2.3. Ugens øvelser er følgende: S1.1: 2, 3, **4**; S1.2: 1; S1.3: 1, 3(a); S1.4: 3 (a). Den markerede opgave er til skriftlig aflevering.

Anders Thorup