Nedenstående er, på trods af overskriften, kun et udkast til et index. Det er helt uden garanti for at sidetallene er korrekte, og uden garanti for at alt relevant er medtaget. Så du kan kun delvis checke dig selv: Har du styr på begreberne? – og på resultaterne?

Index

DIFFERENTIALLIGNING
– andenordens lineær US 2-1, US 3-1
– asymptotisk stabil ligevægt US 2-1
– asymptotisk stabil lineær US 4-1
– Bernoullis US 1-2
– førsteordens lineær US 1-2
– førsteordens separabel US 1-2
– homogen/inhomogen US 2-2
– karakteristisk polynomium US 3-1
– ligevægt US 2-1
– separabel ligning US 1-2
-SSYSTEM
differentialligningssystem US 3-2
– asymptotisk stabilt US 5-1, US 5-2
– asymptotisk stabilt lineært US 4-2, US 5-1
– autonomt US 4-2
– faseplansanalyse US 4-2, US 5-1
– homogent/inhomogent US 4-1
– karakteristisk polynomium US 3-2
– Liapunovs sætning US 5-2
– ligevægt US 4-2
– lineært i planen US 3-2
– saddelpunkt US 5-2
– stationær tilstand US 4-2

VARIATIONSREGNING
– Eulers differentialligning US 6-2
– nødvendig betingelse US 6-2
– tilstrækkelig betingelse US 6-2

OPTIMAL KONTROLTEORI
– adjungeret funktion p US 8-2
– Arrows sætning US 10-1, US 10-2
– Hamiltonfunktion US 8-1
– kandidater US 8-2, US 9-1
– kogebogen US 8-2, US 10-2
– kriteriefunktion US 7-2
– maksimumprincip US 8-2, US 10-2
– Mangasarians tilstrækkelige betingelse US 9-1
– skrotværdiproblem US 10-2
– tilladt kontrol US 8-1
– tilladt par af funktioner US 7-2
– tilstrækkelige betingelse US 9-1
– transversalitetsbetingelser US 8-2, US 9-1

DIFFERENSLIGNING
– andenordens ligning US 12-2
– asymptotisk stabil lineær US 13-1
– førsteordens ligning US 12-2
– homogen/inhomogen US 12-2, US 13-1
– karakteristisk polynomium US 12-2, US 13-1
– ligevægt/stationær tilstand US 12-1
-SSYSTEM
differensligningssystem US 13-2
– homogent/inhomogent US 13-2
– karakteristisk polynomium US 13-2
– lineært US 13-2
– ligevægt US 13-3
– stationær tilstand US 13-3

Anders Thorup

Ugeseddel 1

Velkommen til kurset Differentialligninger og Optimal Kontrolteori (2013), også kaldet *DOK*. Kurset har en hjemmeside:

`http://www.math.ku.dk/kurser/2013-1/dok/`

Her kan du finde oplysninger om kurset, om lærebøger, pensum, undervisningsplaner og eksamen. Jeg hedder i øvrigt Anders Thorup, og jeg kan træffes på H. C. Ørsted Instituttet (lokale 04.2.09), tlf 35320751, e-mail: `<thorup@math.ku.dk>` — eller privat, tlf 44653153. Hjemmesiden er nok ikke helt færdigredigeret.

Undervisningsmateriale. Den egentlige lærebog er, som ved MASO:

[S] *K. Sydsæter et al., Matematisk analyse, bind II, 4. udgave, Gyldendal Akademisk, Oslo 2002 (eller senere),*

men teksterne på ugesedlerne er også relevant.

Program. Undervisningsuge 1 (7/1–10/1) har overskriften „Differential-maraton, 4t+2t+2t“ (Førsteordens differentialligninger), på baggrund af S 1.1–1.7. Det er et maratonforløb, for der er 4 timers undervisning om mandagen. Der er ingen øvelser i denne uge.

Parlør. ‘ordinær differensiallikning’ = ‘sædvanlig differentialligning’.

• *En førsteordens differentialligning* har formen

$$\dot{x} = F(t, x). \tag{*}$$

Venstresiden betegner den afledede af funktionen $x = x(t)$, og ligningen kunne helt ækvivalent være skrevet på formen $x' = F(t, x)$ eller $dx/dt = F(t, x)$. Højresiden i (*) er en funktion $F\colon S \to \mathbb{R}$, hvor $S \subseteq \mathbb{R}^2$, altså en funktion $F(x, t)$ defineret for $(t, x) \in S$.

• *En løsning* til (*) er en differentiabel funktion $x = x(t)$, defineret på et (sædvanligvis åbent) *interval* I, således, at der for alle $t \in I$ gælder, at $\big(t, x(t)\big) \in S$ og $\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big)$. Det er meningsløst at indsætte et talpar (t, x) i ligningen (*). Men for en given (differentiabel) funktion $x = x(t)$ kan man, for hvert t, indsætte $(t, x(t))$ på højresiden af (*) og undersøge om værdien $F(t, x(t))$ er lig med venstresiden, dvs lig med $\dot{x}(t)$.

BEMÆRK: det er et helt UFRAVIGELIGT KRAV til en løsning $x(t)$, at definitionsmængden er et interval.

• *En maksimal løsning* til (*) er en løsning $x\colon I \to \mathbb{R}$, som ikke kan *udvides* til en løsning med et *større* definitionsinterval. I praksis angiver man kun maksimale løsninger.

• *Eksempel.* Hvis man siger, at ligningen $\dot{x} = -x^2$ har løsningen $x = 1/t$, så er det underforstået, at udtrykket $1/t$ bestemmer (mindst) *to løsninger*, nemlig en funktion defineret på intervallet $]0, \infty[$ og en funktion defineret på intervallet $]-\infty, 0[$. De to løsninger er maksimale løsninger til differentialligningen. Udtrykket bestemmer selvfølgelig også løsninger på mindre intervaller. Ligningen har i øvrigt mange andre maksimale løsninger.

• *Eksistens- og entydighedssætning* [S, s. 27]. *Antag, at $F(t,x)$ er kontinuert i en åben mængde $S \subseteq \mathbb{R}^2$, og at $F'_x(t,x) = \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)$ eksisterer og er kontinuert i S* (fx kunne F være en C^1-funktion). *Lad lad $(t_0, x_0) \in S$ være givet. Da findes en og kun én maksimal løsning $x\colon I \to \mathbb{R}$ til* (*) *med $t_0 \in I$ og $x(t_0) = x_0$.*

• *„Separabel" ligning,* [S, s. 6],

$$\dot{x} = h(t)g(x).$$

Løses efter opskriften: (0) Nulpunkter x_0 for $g(x)$, altså $g(x_0) = 0$, giver de konstante løsninger $x(t) = x_0$. Derefter omskrives formelt:

$$(1)\quad \frac{dx}{dt} = h(t)g(x), \qquad (2)\quad \frac{1}{g(x)}dx = h(t)dt, \qquad (3)\quad \int \frac{1}{g(x)}dx = \int h(t)dt + C.$$

I ligning (2) er de variable x og t separerede, så de står på hver sin side af lighedstegnet. Ligningen giver ikke megen mening, men den er basis for integrationen, som fører til den tredie ligning. Husk, at $\int h(t)\,dt$ betegner „en eller anden stamfunktion" til $h(t)$, og glem aldrig den arbitrære konstant C. (4) Herefter bestemmes (om muligt) de to stamfunktioner, der indgår i den tredie ligning. (5) Denne ligning løses så (om muligt) mht x.

• *Lineær førsteordens differentialligning,* [S, s. 12–16], med kontinuerte $a(t)$ og $h(t)$:

$$\dot{x} + a(t)x = h(t).$$

Den generelle løsning er følgende (hvor $A(t)$ er en stamfunktion til $a(t)$):

$$x(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(t)} h(t)\,dt + Ce^{-A(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

• *... med konstante koefficienter.* Hvis $a(t) = a$ er konstant, bliver formlen simplere. Funktionen $A(t) = at$ er en brugbar stamfunktion, så formlen reduceres til bestemmelse af stamfunktioner af formen $\int e^{at} h(t)\,dt$. Hvis også $h(t) = h$ er konstant, er det let: Den fuldstændige løsning til $\dot{x} + ax = h$ er følgende (når $a \neq 0$):

$$x(t) = h/a + Ce^{-at}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

• *Bernoulli's differentialligning,* [S, s. 18], med $n \in \mathbb{R}$ ($n \neq 1$):

$$\dot{x} = Q(t)x + R(t)x^n \quad (x > 0), \tag{*}$$

omformes ved substitutionen $z := x^{1-n}$ (tilbage: $x = z^{1/(1-n)}$) til den *lineære* ligning:

$$\dot{z} - (1-n)Q(t)z = (1-n)R(t)\,.$$

Planen for uge 2 (14/1–17/1) er at gennemgå Andenordens differentialligninger, fra S 2.1–2.3. Ugens øvelser er følgende: S1.1: 2, 3, **4**; S1.2: 1; S1.3: 1, 3(a); S1.4: 3 (a). Den markerede opgave er til skriftlig aflevering.

Anders Thorup

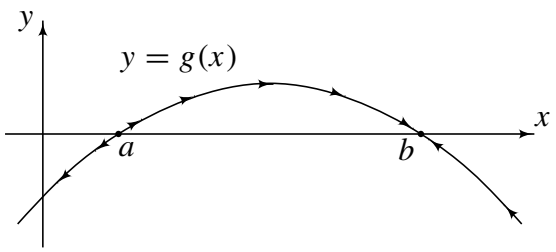
Ugeseddel 2

Program. Den 2. undervisningsuge, 14/1–17/1, har overskriften „Andenordens differentialligninger“, på baggrund af S 2.1–2.3. Ugens øvelser er: S1.1: 2, 3, **4**; S1.2: 1; S1.3: 1, 3(a); S1.4: 3 (a). Den markerede opgave er til skriftlig aflevering.

Parlør. ‘den allmenne løsning’ = ‘den generelle løsning’.

Kuglerne.

• *Stabil ligevægt*. Betragt en *autonom* differentialligning $\dot{x} = g(x)$, dvs en differentialligning, hvor højresiden er uafhængig af t (og $g(x)$ er en $\mathcal{C}^1$-funktion). Ligningen er specielt separabel, og nulpunkter a for $g(x)$, dvs $g(a) = 0$, svarer til konstante løsninger $x(t) = a$. De kaldes også *ligevægtstilstande*. Ved *fasediagrammet* forstås blot grafen for funktionen $g(x)$, fx:



Den fundamentale forbindelse mellem differentialligningen og grafen er, at når $x(t)$ er en løsning til differentialligningen, så vil punktet $\big(x(t)\,,\ \dot{x}(t)\big)$ ligge på grafen for alle t. Når t vokser fra en given værdi t_0 („når tiden går“), vil punktet flytte sig på grafen. De afsatte pile markerer retningen: Er punktet $\big(x(t_0)\,,\ \dot{x}(t_0)\big)$ i den øvre halvplan, så er $\dot{x}(t_0) > 0$. Derfor er $x(t)$ en voksende funktion nær t_0, så når t vokser ud fra t_0 vil punktets førstekoordinat vokse, dvs punktet flytter sig mod højre. Tilsvarende, i den nedre halvplan peger alle pile mod venstre.

Ligevægtstilstande, altså nulpunkter for $g(x)$, svarer til grafens skæringspunkter med x-aksen. I eksemplet er a en *ustabil ligevægt*: Det fremgår, af pilene, at en løsning $x(t)$ med $x(t_0)$ tæt ved a vil fjerne sig fra a. Og b er en *asymptotisk stabil ligevægt*: En løsning $x(t)$ med $x(t_0)$ tæt ved b vil „nærme sig b, når t vokser“. Sådan står der i [S, p. 24[8]], men det kan præciseres:

Hvis b er en ligevægt (dvs $g(b) = 0$) og $g'(b) < 0$, så er b asymptotisk stabil: Enhver løsning $x(t)$ med $x(t_0)$ tæt ved b er defineret for alle $t \geq t_0$, og $\lim_{t\to\infty} x(t) = b$.

• *En andenordens differentialligning* (på normalform) har formen $\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$. På højresiden er F en kontinuert funktion af 3 variable, dvs en afbildning $F\colon S \to \mathbb{R}$, hvor $S \subseteq \mathbb{R}^3$. På venstresiden skal du tænke på $\ddot{x}$ som den dobbeltafledede $\ddot{x}(t) = d^2x/dt^2$, og ved en løsning til ligningen forstås en to gange differentialbel funktion $x(t)$, defineret på et interval, således at

$$\ddot{x}(t) = F\big(t\,,\ x(t)\,,\ \dot{x}(t)\big) \quad \text{for alle } t.$$

Tilsvarende betragtes løsninger til en n'te-ordens differentialligning:

$$x^{(n)} = F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)}),$$

hvor F er en funktion af $n + 1$ variable, og $x^{(i)}$ betegner den i gange afledede funktion $d^i x/dt^i$.

• *Den lineære differentialligning,* af n'te orden, har formen:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{x} + a_n(t)x = h(t), \qquad (*)$$

hvor $a_1, \ldots, a_n$ og h er *kontinuerte* funktioner defineret på et åbent interval $J \subseteq \mathbb{R}$.

Hovedsætning 1. *Alle maksimale løsninger til* (*) *er defineret på hele intervallet* J.

Løsningerne til (*) udgør altså en delmængde $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}^n(J)$. Venstresiden i (*) er en operator L: Put en $\mathcal{C}^n$-funktion $x = x(t)$ ind i udtrykket, og ud kommer en kontinuert funktion $L(x) = L(x)(t)$. Operatoren L er en afbildning,

$$L\colon \mathcal{C}^n(J) \to \mathcal{C}^0(J),$$

fra $\mathcal{C}^n$-funktioner til kontinuerte funktioner. Den er lineær: af velkendte regneregler for differentiation af sum og produkt (med en konstant) følger, at $L(x+y) = L(x) + L(y)$, og $L(\lambda x) = \lambda L(x)$. Løsningerne til (*) er de funktioneer $x = x(t)$, som opfylder $L(x) = h(t)$. Med andre ord: *Løsningerne udgør originalmængden* $\mathcal{S} = L^{-1}(h(t))$.

• *Den homogene ligning* er den lineære ligning (*), hvor højresiden er nul-funktionen 0:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{x} + a_n(t)x = 0. \qquad (o)$$

Løsningsmængden til ligningen (o) er originalmængden $L^{-1}(0)$. Det er som bekendt det, der kaldes *kernen* for den lineære afbildning L. Af generelle resultater følger derfor: *Løsningsmængden til den homogene ligning* (o) *er et underrum af vektorrummet* $\mathcal{C}^n(J)$. *Løsningsmængden til den inhomogene ligning* (*) *fås ud fra én løsning* (*en partikulær løsning*) *ved at addere samtlige løsninger til den homogene ligning.*

Hovedsætning 2. *Idet vi for et givet* $t_0 \in J$ *og en funktion* $x = x(t)$ *i* $\mathcal{C}^n(J)$ *betragter vektoren* $x^{(<n)}(t_0) := (x(t_0), \dot{x}(t_0), \ddot{x}(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0))$ *i* $\mathbb{R}^n$, *gælder, at* $x \mapsto x^{(<n)}(t_0)$ *er en bijektiv afbildning* $\mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ *fra mængden* $\mathcal{S}$ *af løsninger til* (*) *til vektorrummet* $\mathbb{R}^n$.

Hovedsætningerne 1 og 2 er, hverken mere eller mindre, indholdet af [S, Sætning 3.1.2].

• *Konsekvenser. Om løsningsmængden* $\mathcal{S}_0$ *til den homogene ligning* (o) *gælder:* $\mathcal{S}_0$ *er et vektorrum af dimension* n, *dvs der findes et sæt af* n *lineært uafhængige løsninger* $u_1, \ldots, u_t$, *og for hvert sådant sæt er den generelle løsning til* (o) *bestemt ved:*

$$x(t) = C_1u_1(t) + \cdots + C_nu_n(t), \qquad C_i \in \mathbb{R}.$$

Den inhomogene ligning (*) *har løsninger, og ud fra én sådan løsning* $u^*(t)$ *(en partikulær løsning) er den generelle løsning bestemt ved:*

$$x(t) = u^*(t) + C_1u_1(t) + \cdots + C_nu_n(t), \qquad C_i \in \mathbb{R}.$$

Sydsæters bevis er fortvivlende! Her er det rigtige: Løsningsmængden $\mathcal{S}_0$ til den homogene ligning (o) er et underrum i vektorrummet $\mathcal{C}^n(J)$, og øjensynlig er $x \mapsto x^{(<n)}(t_0)$ en lineær afbildning $\mathcal{S}_0 \to \mathbb{R}^n$. Af Hovedsætning 2 følger, at det er en bijektiv afbildning. Altså er afbildningen en isomorfi af vektorrum $\mathcal{S}_0 \to \mathbb{R}^n$, og derfor er $\dim \mathcal{S}_0 = n$. Resten er lineær algebra.

Planen for den tredie uge (21/1–24/1) er at gennemgå Lineære n'te-ordens differentialligninger (og systemer), fra S 3.1, 3.2, 2.7 (s51–52). Ugens øvelser er følgende: S1.3: 3 (b) – (d), **9**; S1.4: 3(b)+(c); S1.5: 1; S2.2: 1, 3. Den markerede opgave er til skriftlig aflevering.

Anders Thorup

Ugeseddel 3

Program. I den tredie undervisningsuge, 21/1–24/1, er overskriften „Lineære n'te-ordens differentialligninger (og systemer)", på baggrund af S 3.1, 3.2, 2.7 (s51–52). Ugens øvelser er: S1.3: 3 (b) – (d), **9**; S1.4: 3(b)+(c); S1.5: 1; S2.2: 1, 3. Den markerede opgave er til skriftlig aflevering.

Forkortelse: DL='differentialligning'. Engelsk: ODE='ordinary differential equation'.

Kuglerne.

• *2.ordens DL med konstante koefficienter* (*homogen, inhomogen,* og *karakteristisk polynomium*):

$$\text{(o)} \qquad \ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \qquad\qquad (*) \qquad \ddot{x} + b\dot{x} + cx = h(t),$$

$$z^2 + bz + c, \quad \text{med rødderne } r = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}, \quad \text{hvor } D = b^2 - 4c.$$

For den homogene ligning (o) afhænger løsningen af fortegnet for D (*diskriminanten*):

$D > 0$: Der er to reelle rødder r_1 og r_2, og den generelle løsning er $x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.

$D = 0$: Der er én (dobbelt)rod $r = -\frac{b}{2}$, og den generelle løsning er $x = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}$.

$D < 0$: Der er to ikke-relle rødder $\alpha \pm i\beta$, hvor $\alpha = -b/2$, og $\beta = \sqrt{|D|}/2$; den generelle løsning er $x = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$. Alternativt: Den generelle løsning er $x = C e^{\alpha t} \cos(\beta t + K)$, hvor C, K er arbitrære konstanter.

For den inhomogene ligning (*): Partikulære løsninger findes ved systematiske gæt, [S, s. 40–42]: Med $h(t) = e^{\lambda t}$ gættes på $x = Ae^{\lambda t}$ (virker ikke, hvis λ er karakteristisk rod, men så virker $Ate^{\lambda t}$ eller $At^2 e^{\lambda t}$). Med $h(t)$ =polynomium gættes på $x = A + Bt + Ct^2 + \cdots$ (et polynomium). Med $h(t) = e^{\lambda t} \sin \omega t$ gættes på $x = Ae^{\lambda t} \sin \omega t + Be^{\lambda t} \cos \omega t$ (virker, hvis $\lambda + i\omega$ ikke er karateristisk rod).

Specielt, hvis $h(t) = k$ er konstant (og $c \neq 0$) er $x(t) = k/c$ en løsning.

• *En n'te-ordens DL med konstante koefficienter* har tilsvarende et *karakteristisk polynomium:*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = h(t), \qquad z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n.$$

For den homogene DL: En reel karakteristisk rod r, med multiplicitet m, giver m løsninger:

$$e^{rt},\ te^{rt},\ \ldots,\ t^{m-1}e^{rt},$$

og par af komplekst konjugerede rødder $\alpha \pm \beta i$, med multiplicitet m, giver $2m$ løsninger:

$$e^{\alpha t}\cos \beta t,\ e^{\alpha t}\sin \beta t,\ te^{\alpha t}\cos \beta t,\ te^{\alpha t}\sin \beta t,\ \ldots,\ t^{m-1}e^{\alpha t}\cos \beta t,\ t^{m-1}e^{\alpha t}\sin \beta t.$$

For den inhomogene ligning: Prøv med systematiske gæt.

• *Lineært system med konstante koefficienter*, $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$, fx for $n = 2$,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \qquad \text{hvor } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

eller,

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \dot{x} = ax + by + h(t), \\ &(2) \qquad \dot{y} = cx + dy + g(t). \end{aligned}$$

Det er umiddelbart at generalisere til et lineært system (med konstante koefficienter) af n *koblede* differentialligninger med n ubekendte funktioner.

En *løsning* er en *søjle* af funktioner $(x,\, y)^{\mathrm{tr}} = (x(t),\ y(t))^{\mathrm{tr}}$, defineret på et interval, som opfylder de to ligninger for alle t. Løsningen er en vektorfunktion; den bestemmer en kurve i $\mathbb{R}^2$, kaldet en *integralkurve* for systemet.

• *Metode:* Bestem by ud fra ligning (1), og bestem herfra $b\dot{y}$ ved at differentiere. Multiplicer ligning (2) med b, og indsæt heri de fundne udtryk for by og $b\dot{y}$, – og reducer!

$$\begin{gathered} by = \dot{x} - ax - h(t), \qquad b\dot{y} = \ddot{x} - a\dot{x} - \dot{h}(t), \\ \ddot{x} - a\dot{x} - \dot{h}(t) = bcx + d(\dot{x} - ax - h(t)) + bg(t), \\ \ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (ad - bc)x = bg(t) - dh(t) + \dot{h}(t). \end{gathered}$$

Udtrykt ved matricen A er $ad - bc = \det A$, og $a + d$, summen af tallene i diagonalen, kaldes *matricens spor* og betegnes $\operatorname{tr} A$. Ligningen er altså

$$\ddot{x} - (\operatorname{tr} A)\,\dot{x} + (\det A)\,x = bg(t) - dh(t) + \dot{h}(t). \tag{*}$$

Specielt ses, at det karakteristiske polynomium, for denne DL og for matricen A, er det samme. Herefter løses (*), og endelig bestemmes y af ligning (1) (hvis $b \neq 0$).

• *Metoden virker også med variable koefficienter*. Antag ovenfor, at også a, b, c, d er funktioner af t, og at $b(t)$ overalt er $\neq 0$. I metoden er det kun det andet skridt, 'bestem $b\dot{y}$', der skal korrigeres: differentiationen giver yderligere bidraget $\dot{b}y$ på venstrsiden og $-\dot{a}x$ på højresiden. I $\dot{b}y$ kan man indsætte y bestemt fra (1). I ligningen for $b\dot{y}$ skal højresiden herefter korrigeres med $-\dot{b}y - \dot{a}x = -\dot{b}(\dot{x} - ax - h)/b - \dot{a}x$. Herved fås ligningen,

$$\ddot{x} - (a + d - \dot{b}/b)\dot{x} + (ad - bc - \dot{a} + a\dot{b}/b)\,x = bg - dh + \dot{h} - h\dot{b}/b, \tag{‡}$$

altså en 2.ordens DL noget mere kompliceret end (*).

Planen for den fjerde uge (28/1–31/1) er at gennemgå Lineære systemer; Stabilitet, fra S 2.6–2.10, 3.3–3.5. Ugens øvelser er følgende: S2.3: <u>**1**(**a**) – (**c**)</u>, 1(e)–(g), 2, 8, 9; S3.1: 1. Den markerede opgave er til skriftlig aflevering.

Anders Thorup

Ugeseddel 4

Program. I fjerde uge, 28/1–31/1, er overskriften „Lineære systemer; Stabilitet“, på basis af S 2.6–2.10, 3.3–3.5. Ugens opgaver er: S2.3: **1**(**a**) − (**c**), 1(e)–(g), 2, 8, 9; S3.1: 1. Du kan ikke forvente at alle opgaver gennemgås ved øvelserne; du må prøve kræfter med nogle af dem selv.

Kuglerne.

• *Stabil differentialligning.* En lineær n'te-ordens DL,

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = h(t), \qquad (*)$$

er (*globalt*) *asymptotisk stabil*, [S, s. 48–49, s. 77], hvis alle løsninger opfører sig „ens“ for $t \to \infty$. Vilkårlige to løsninger afviger med en funktion, der løser den homogene ligning. Ækvivalent (og mere præcist) er ligningen (*) asymptotisk stabil, hvis der for alle løsninger $u(t)$ til den tilsvarende homogene ligning (o) gælder, at $u(t) \to 0$ for $t \to \infty$. Der findes n funktioner $u_1(t), \ldots, u_n(t)$, som er en basis for løsningsrummet til den homogene ligning. For asymptotisk stabilitet er det øjensynlig nok, at $u_j(t) \to 0$ for $j = 1, \ldots, n$. Bemærk, at stabilitet ikke afhænger af højresiden $h(t)$.

I det følgende antages, at koefficienterne er konstante, $a_i(t) = a_i$. Så har ligningen et tilhørende karakteristisk polynomium: $z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$.

• *Check-betingelse for stabilitet. Den lineære n'te-ordens DL med konstante koefficienter er asymptotisk stabil, hvis og kun hvis alle karakteristiske rødder har negativ realdel.*

For $n = 1$: $\dot{x} + bx = h(t)$ er asymptotisk stabil, hvis og kun hvis $b > 0$.

For $n = 2$: $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = h(t)$ er asymptotisk stabil, hvis og kun hvis $b > 0$ og $c > 0$.

For alle n: Hvis ligningen (*) er asymptotisk stabil, så er alle koefficienter $a_i > 0$. [Men ikke omvendt, når $n > 2$.]

• *Hurwitz–Routh's sætning.* I polynomiet $z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ har alle rødder negativ realdel, hvis og kun hvis alle ledende hovedunderdeterminanter i $n \times n$-matricen (a_{2j-i}) er positive. Her er $a_0 = 1$ og $a_k = 0$ for $k > n$ og for $k < 0$. Matricen ser ud som følger:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix},$$

altså $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i diagonalen, og følgen af koefficienter aftagende nummereret i hver søjle.

• *Stabilt lineært system.* Det lineære differentialligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ er *asymptotisk stabilt*, hvis der for alle løsninger $\mathbf{x}(t)$ til det tilsvarende homogene system $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ gælder, at

$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ for $t \to \infty$. Ækvivalent: alle rødder i det karakteristiske polynomium for matricen A har negativ realdel.

• *En autonom DL*, [S, s. 83], er et system af følgende form:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \text{eller} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

hvor $\mathbf{F}$ er en $\mathcal{C}^1$-vektorafbildning med n koordinatfunktioner f_i i n variable (dvs defineret på en åben delmængde $S \subseteq \mathbb{R}^n$). Specielt afhænger højresiden ikke af t. En *løsning* er en vektorfunktion $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, defineret på et interval, således, at $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ for alle t. Løsningen bestemmer en kurve i $\mathbb{R}^n$; den kaldes også en *integralkurve*. Gennem hvert punkt i $\mathbf{x}_0$ i S går en og kun én integralkurve.

Rummet $\mathbb{R}^n$ kaldes også *faserummet* (for $n = 2$: *faseplanen*). Integralkurven gennem et punkt $\mathbf{x}_0$ har i dette punkt tangentvektoren $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$. Man får altså et indtryk af integralkurverne ved at afsætte vektoren $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ud fra $\mathbf{x}$ for forskellige punkter $\mathbf{x}$. I faserummet kan man angive integralkurvens *bane*, dvs billedmængden, med pile, der angiver gennemløbsretningen. Et *faseportræt* er en tegning, hvor så mange baner for integralkurver er indtegnet, at man har et overblik over dem alle. BEMÆRK: for at bestemme en løsning til differentialligningen, altså en integralkurve, er det *ikke nok* at angive banen med pile; det skal også præciseres, hvordan (dvs med hvilken fart) banen gennemløbes.

• *Ligevægtspunkt*, eller *ligevægt*, for en autonom DL er et punkt $\mathbf{x}_0$ i faserummet, hvor $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Et sådant punkt svarer til en *ligevægtstilstand* (eller *stationær tilstand*): en søjle af konstante funktioner, som løser den givne DL.

For en lineær autonom differentialligning $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ bestemmes ligevægtspunkter ved at løse ligningen $A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Antages, at A er invertibel, er der ét ligevægtspunkt $\mathbf{x}_0 = -A^{-1}\mathbf{b}$. Oftest kan det antages, at ligevægtspunktet er $\mathbf{0}$, svarende til den homogene DL: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.

• *En faseplansanalyse* af en autonom DL i planen, $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, kan give en fornemmelse af banernes forløb: Ligningen $\dot{x} = f$ fortæller, at $\dot{x}$ har samme fortegn som f. Ligningen $f = 0$ bestemmer den ene *nulkurve*. På denne kurve er $\dot{x} = 0$, så banekurvens tangentvektor $(\dot{x}, \dot{y})$ har førstekoordinaten 0, dvs tangentvektoren er lodret, og hvis $\dot{y} = g > 0$ peger den opad: $\uparrow$. På nulkurven $f = 0$ markeres $\uparrow$ eller $\downarrow$. Tilsvarende markeres vandret tangent på den anden *nulkurve* $g = 0$. Skæringspunkterne mellem de to nulkurver er netop ligevægtspunkterne. Området uden for nul-kurverne kan opdeles i områder, hvor koordinatfunktionerne f og g har konstante fortegn: Et område, hvor $f < 0$ og $g > 0$ markeres med pilesymbolet $\swarrow\!\uparrow$. thi her er $\dot{x} = f < 0$ (så x er aftagende, dvs (x, y) bevæger sig mod venstre) og $\dot{y} = g > 0$ (så y er voksende, dvs (x, y) bevæger sig opad).

Planen for femte uge (4/2–7/2) omfatter „Stabilitet“, fra S 2.11–2.12; 3.3–3.6. Ugens opgaver er følgende: S2.3: <u>5</u>; S2.6: 1, 2; S2.7: 1; S2.8: 1; S2.9: 1.

Anders Thorup

Ugeseddel 5

Program. I den 5. uge, 4/2–7/2, er overskriften „Stabilitet“, på basis af S 2.11–2.12; 3.3–3.6. Ugens opgaver er S2.3: 5; S2.6: 1, 2; S2.7: 1; S2.8: 1; S2.9: 1.

Parlør. ‘trase (til matrise)’ (eng: trace) = ‘spor (af matrix)’; ‘nullkline’ (ved juletid: null-cline) = ‘nul-kurve’ ; ‘kilde’ (eng: source) = ‘kilde’; ‘sluk’ (eng: sink) = ‘dræn’ (afløb?).

Kuglerne.

• *I faseplansanalysen* af $\dot{x} = f(x, y)$ og $\dot{y} = g(x, y)$ kaldes de to kurver bestemt ved $f = 0$ („lodret“ tangent) og $g = 0$ („vandret tangent“) for systemets *nul-kurver*. Bemærk, at nul-kurverne *ikke er* banekurver, bortset fra i meget specielle tilfælde. Bemærk også, at hver af nulkurverne kan bestå af flere dele, se [S, s. 62].

• *Hvor vild må man være*, som tiden går, hvis man er en (maksimal) løsning $\mathbf{x}(t)$ til en autonom DL: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Der er nogle få regler:

(0) Man må blive, hvor man er, men så starter man i et ligevægtspunkt.

(1) Man må ikke krydse en af de andre baner! Men man må gerne krydse sin egen: men: hvis $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}(0)$, så er $\mathbf{x}(T + t) = \mathbf{x}(t)$ for alle t, fordi begge kurver er løsninger med den samme værdi for $t = 0$. Og det betyder, at man, igen og igen, gennemløber den samme lukkede bane periodisk.

(2) Man må ikke gå i stå (til endelig tid): Løsningen er defineret på et åbent interval, og det kan være opad begrænset, af formen $]a, b[$, med $b < \infty$. Her lever man kun i endelig tid, dvs for $t < b$, men så er man tvunget til at løbe væk: $|\mathbf{x}(t)| \to \infty$ for $t \to b$. [Hvis $\mathbf{F}$ kun er defineret på en delmængde $S \subseteq \mathbb{R}^n$, så løber man ud mod randen af S.]

(3) Hvis man lever altid, dvs $\mathbf{x}(t)$ er defineret for alle $t \geq 0$, så er det også tilladt at løbe væk. Det er også en tilladt mulighed, at man nærmer sig et bestemt punkt for $t \to \infty$; dette punkt vil så automatisk være et ligevægtspunkt.

(4) For $n = 1$ er der faktisk ikke andre muligheder! For $n = 2$ er det også en mulighed at komme tættere og tættere på en lukket bane; der er faktisk *alle* de muligheder for at være vild, som man kan forestille sig. For $n \geq 3$ er der flere endnu!

Skal vi understrege, at med „muligheder“ menes der muligheder for $\mathbf{F}$? Når $\mathbf{F}$ i differentialligningen er givet, er ens opførsel naturligvis helt fastlagt: Man *skal* følge pilene.

• *Stabilt lineært system*. Et lineært system af differentialligninger,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

er *asymptotisk stabilt*, hvis [ækvivalente betingelser]:

(i) alle løsninger opfører sig ens for $t \to \infty$, eller
(ii) alle løsninger til den homogene ligning $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ går mod $\mathbf{0}$ for $t \to \infty$, eller
(iii) alle (komplekse) egenværdier (dvs alle rødder i det karakteristiske polynomium) for A har negativ realdel (og hertil kan Hurwitz–Routh’s sætning bruges).

• *Stabilitet for en ikke-lineær ligning* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ vedrører et ligevægtspunkt (en stationær tilstand) $\mathbf{a}$. Ligevægtspunktet $\mathbf{a}$ er (lokalt) *stabilt*, hvis der for hvert $\varepsilon > 0$ gælder, at alle løsninger, som starter tilstrækkeligt tæt ved $\mathbf{a}$, højst kommer afstanden ε væk fra $\mathbf{a}$.

[„Starten“ er punktet $\mathbf{x}(t_0)$ for et givet t_0. Hvad der er „tilstrækkeligt tæt“ ved $\mathbf{a}$, afhænger af ε: der skal findes et $\delta > 0$ således, at konklusionen („højst kommer afstanden ε væk fra $\mathbf{a}$“) er opfyldt, hvis $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{a}| < \delta$.]

Ligevægtspunktet $\mathbf{a}$ er (lokalt) *asymptotisk stabilt*, hvis det er et stabilt og der desuden gælder, at enhver løsning, som starter tilstrækkeligt tæt ved $\mathbf{a}$, konvergerer mod $\mathbf{a}$ for $t \to \infty$. Ordet „lokalt" kan tilføjes for at understrege, at det ikke kræves, at *alle* løsninger konvergerer med $\mathbf{a}$.

• *Stabil/stabil*. Bemærk, at „asymptotisk stabil", „stabil", osv optræder i to forskellige situationer: Det bruges om et ligevægtspunkt (=konstant løsning) for en given differentialligning, og det bruges om en lineær (evt. inhomogen) differentialligning. I den sidste situation svarer det til brugen om ligevægten 0 for den tilsvarende homogene ligning. For lineære ligninger er det interessante asymptotisk stabilitet, og det er altid globalt. For autonome ligninger er „*stabil*" ret svagt; vigtigere er (lokalt) *asymptotisk stabil*, og stærkest er *globalt asymptotisk stabil*.

• *Liapunov's Sætning. Antag, at* $\mathbf{a}$ *er ligevægtspunkt for en autonom DL:* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. *Hvis der om Jacobi-matricen* $\mathbf{F}'(\mathbf{a})$ *gælder, at alle* (komplekse) *rødder i det karakteristiske polynomium har negativ realdel, så er* $\mathbf{a}$ *asymptotisk stabil.*

Hvis mindst én karakteristisk rod har positiv realdel, så er ligevægten $\mathbf{a}$ *ustabil.*

• *I planen.* For $n = 2$, ligning $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ og et givet ligevægtspunkt (a, b): Punktet er asymptotisk stabilt, når der *i punktet* gælder: $f'_x + g'_y < 0$ og $f'_x g'_y - f'_y g'_x > 0$. Hvis der i punktet gælder $f'_x + g'_y > 0$ eller $f'_x g'_y - f'_y g'_x < 0$, så er punktet ustabilt. I de resterende tilfælde er der ingen konklusion.

• *Saddelpunkt*. Ligevægtspunktet (a, b) kaldes et *saddelpunkt*, hvis der *i punktet* gælder, at $f'_x g'_y - f'_y g'_x < 0$ (det betyder, at Jacobi-matricen har to reelle egenværdier af modsat fortegn). For et saddelpunkt (a, b) gælder, at der, ud over ligevægtspunktet, findes præcis to baner for løsninger, som konvergerer mod (a, b) for $t \to \infty$. De to baner tangerer, fra modsatte retninger, linien gennem (a, b) bestemt ved en egenvektor hørende til den negative egenværdi.

• *Liapunov-funktion*. Betragt en autonom DL: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, og et givet ligevægtspunkt $\mathbf{a}$. For en reel C^1-funktion $V(\mathbf{x})$, defineret i en omegn af $\mathbf{a}$, sættes

$$\dot{V}(\mathbf{x}) := V'_{\mathbf{F}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x});$$

det er den retningsafledede af $V(\mathbf{x})$ i retningen $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. For en løsning $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ til den givne DL finder man $\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) = \dot{V}(\mathbf{x}(t))$.

Funktionen $V(\mathbf{x})$ er en *Liapunov-funktion*, hvis der nær ved $\mathbf{a}$ gælder:

$$V(\mathbf{a}) = 0, \qquad V(\mathbf{x}) > 0 \text{ for } \mathbf{x} \neq \mathbf{a}, \quad \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ for } \mathbf{x} \neq \mathbf{a}.$$

Sætning (Liapunov). *Antag, at der findes en Liapunov-funktion* $V(\mathbf{x})$. *Så er ligevægtspunktet* $\mathbf{a}$ *stabilt. Hvis* $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ *for* $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ *så er* $\mathbf{a}$ *asymptotisk stabilt; er desuden* $V(\mathbf{x})$ *defineret for alle* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *og* $V(\mathbf{x}) \to \infty$ *for* $|\mathbf{x}| \to \infty$, *så er* $\mathbf{a}$ *globalt asymptotisk stabilt.*

Planen for den sjette uge (11/2–14/2) omfatter „Variationsregning", fra S 11.1–11.3, 11.5. Ugens øvelser: X-opg: 7, 4, 6; S2.9: 2; S2.10: 1; S2.11: 1.

Anders Thorup

Ugeseddel 6

Planen for den 6. undervisningsuge (11/2–14/2) omfatter „Variationsregning“, fra S 11.1–11.3, 11.5. Ugens øvelser: X-opg: 7, 4, 6; S2.9: 2; S2.10: 1; S2.11: 1.

Kuglerne.

• *Eliminer t.* For et autonomt system i planen, $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, kan man forsøge at bestemme banekurverne ved at *eliminere t*. Af

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \qquad \text{følger formelt, at} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)},$$

idet man kommer til den sidste ligning ved at „dividere den nederste ligning i systemet med den øverste“. Den sidste ligning er en førsteordens differentialligning med én ubekendt funktion $y = y(x)$. Man kan vise, at regningen giver mening: *banerne for løsninger $t \mapsto (x(t), y(t))$ til systemet, gennem punkter i xy-planen hvor $f(x, y) \neq 0$, er netop graferne for funktioner $y = y(x)$, som løser den sidste ligning.* [Bemærk, at man *ikke* nødvendigvis kan løse den sidste ligning; og selv om man kan, vil løsningerne kun fortælle noget om *banerne* for det givne system.]

• *Variationsregning*, med fast interval og begyndelsesværdi. Lad følgende være givet: Et fast interval $[t_0, t_1]$ (bestemt ved $t_0 < t_1$), en $\mathcal{C}^2$-funktion $F = F(t, x, u)$ defineret på $[t_0, t_2] \times \mathbb{R}^2$, og to tal x_0 og x_1. Betragt følgende maksimeringsproblem/opgave:

$$(\max) \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt \quad \text{for } x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{Max$_\mathrm{i}$}$$

Forklaring: Størrelsen x, der indgår i integralet, er en (ubekendt) funktion $x = x(t)$, og integralet kan mere udførligt skrives $J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$. Det opfattes som en afbildning, $x \mapsto J(x)$, der til funktionen $x = x(t)$ knytter tallet $J(x)$. De *tilladte funktioner* er $\mathcal{C}^2$-funktioner $x(t)$ på det givne interval, som opfylder *bibetingelsen* $x(t_0) = x_0$ og $x(t_1) = x_1$, dvs har foreskrevne værdier i endepunkterne. Opgaven er altså at *maksimere $J(x)$ for $x \in \mathcal{T}$*, hvor $\mathcal{T}$ er mængden af tilladte funktioner. Sammenlignet med efterårets maksimeringsopgaver er det nye (bl.a.), at $\mathcal{T}$ her er en mængde af funktioner, og ikke en delmængde af $\mathbb{R}^n$.

At *løse* problemet betyder, at man skal skal finde en tilladt funktion $x^* = x^*(t)$ således, at $J(x^*) \geq J(x)$ for alle tilladte funktioner x (eventuelt skal man finde alle sådanne funktioner $x^*(t)$). For en sådan „*maksimumsfunktion*“ x^* er $J(x^*)$ så *maksimumværdien*, dvs den største værdi af $J(x)$ for tilladte funktioner x, men selve denne maksimumværdi er ofte af mindre interesse.

Der er en række situationer, hvor problemet ikke har løsninger: der kan være vilkårligt store værdier $J(x)$ for $x \in \mathcal{T}$, eller det kan ske, selv om supremum $M := \sup J(x)$ for $x \in \mathcal{T}$ er endelig, at supremum ikke er en værdi $M = J(x)$. Endelig, for analoge problemer med andre bibetingelser, kan det indtræffe, at der slet ikke er tilladte funktioner, altså at $\mathcal{T} = \emptyset$.

Der er et tilsvarende minimumeringsproblem, men det ændres til et maksimeringsproblem ved at erstatte F med $-F$.

• *Andre bibetingelser*. Bibetingelsen, der bestemmer de tilladte funktioner i maksimeringsproblemet (Max_i), er den første af tre naturlige *randbetingelser* (med fast interval $[t_0, t_1]$):

(i) $x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$;
(ii) $x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) \geq x_1$;
(iii) $x(t_0) = x_0, \quad x(t_1)$ er fri.

Til de to sidste bibetingelser svarer maksimeringsproblemer (Max_ii) og (Max_iii). I alle tre bibetingelser stilles det samme krav $x(t_0) = x_0$ til begyndelsesværdien. I betingelsen (iii) stilles der ingen krav til slutværdien $x(t_1)$.

• *Euler's differentialligning*, svarende til $\mathcal{C}^2$-funktionen $F(t, x, u)$, er følgende andenordens ligning med den ubekendte funktion $x = x(t)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial u}, \qquad \text{eller } F'_x = \tfrac{d}{dt}F'_u, \tag{EL}$$

hvor de partielle afledede $F'_x = \partial F/\partial x$ og $F'_u = \partial F/\partial u$ tænkes taget i $(t, x(t), \dot{x}(t))$. Lidt mere udførligt:

$$F'_x(t, x, \dot{x}) = \tfrac{d}{dt}F'_u(t, x, \dot{x}). \tag{EL}$$

Også i den sidste form skal man tænke sig t indsat, altså tænke på $(t, x(t), \dot{x}(t))$ for $(t, x, \dot{x})$. Det er specielt vigtigt, når man på højresiden differentierer mht t: der står d/dt, og ikke $\partial/\partial t$. [Af og til skrives funktionen F endda som $F(t, x, \dot{x})$ og den partielle afledede mht den tredie variabel betegnes $F'_{\dot{x}} = \partial F/\partial \dot{x}$!.]

Eulerligningen er en andenordens ligning, dvs en ligning, hvori der indgår $t, x, \dot{x}, \ddot{x}$. Selvom den „næsten" er på normalform, se [S, s. 338(3)], er der ingen generelle sætninger, som garanterer eksistens af løsninger på hele intervallet. Men er der løsninger til (EL), forventer man, at der i den generelle løsning typisk indgår 2 arbitrære konstanter, og at 2 *transversalitetsbetingelser* er nødvendige for at bestemme konstanterne, dvs nødvendige for at fastlægge én løsning (eller endeligt mange løsninger) til (EL).

• *Nødvendig betingelse*. Hvis $x = x(t)$ løser problemet (Max_i), hhv. (Max_ii), hhv. (Max_iii), så gælder (EL) og den tilsvarende af følgende transversalitetsbetingelser:

(i*) $x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$;
(ii*) $x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) \geq x_1, \quad F'_u|_{t=t_1} \leq 0$, med lighed i mindst en af ulighederne;
(iii*) $x(t_0) = x_0, \quad F'_u\big|_{t=t_1} = 0$.

I (ii*) og (iii*) er det underforstået, at F'_u betyder $F'_u(t, x(t), \dot{x}(t))$, og det er værdien af denne funktion for $t = t_1$, der indgår.

• *Tilstrækkelig betingelse*. Antag $F(t, x, u)$ for hvert fast t er en konkav funktion af (x, u), så gælder: Hvis $x = x(t)$ opfylder (EL) og transversalitetsbetingelsen (i*), hhv. (ii*), hhv. (iii*), så er $x(t)$ en løsning til maksimeringsopgaven (Max_i), hhv. (Max_ii), hhv. (Max_iii).

Planen for den syvende uge (18/2–21/2) omfatter „Variationsregning", fra S 11.1–11.3, 11.5. Ugens øvelser: H2O: **33**, 30, 31; EO: 18; S11.2: 1, 2.

Anders Thorup

Ugeseddel 7

Planen for den 7. uge (18/2–21/2) omfatter „Variationsregning“, fra S 11.1–11.3, 11.5. Måske når jeg at indlede optimal kontrolteori. Ugens øvelser: H2O: **33**, 30, 31; EO: 18; S11.2: 1, 2.

Kuglerne.

• *Kandidaterne* til et maksimeringsproblem er de funktioner $x = x(t)$, der opfylder de *nødvendige betingelser*. At betingelser er nødvendige, siger præcis, at enhver løsning til problemet findes blandt kandidaterne. Men det er en begrænset viden, og der skal mere til for at sikre, at kandidaterne løser problemet. Det kan bruges sådan: Hvis der ikke findes kandidater, så har problemet ingen løsninger. Hvis man har bestemt alle kandidater, og *på forhånd ved* at problemet har løsninger, så er de kandidater, der giver den største værdi af $J(x)$ netop løsningerne til problemet. *Tilstrækkelige betingelser* er typisk yderligere betingelser, som sikrer, at alle kandidater er løsninger.

• *Transversalitetsbetingelserne* i problemet (Max_{ii}): „med lighed i mindst en af ulighederne $x(t_1) \geq x_1,\ F'_u|_{t=t_1} \leq 0$“ giver typisk dobbelt arbejde: Først søges tilladte funktioner x med lighed i den første ulighed, dvs som opfylder $x(t_1) = x_1,\ F'_u|_{t=t_1} \leq 0$. Dernæst søges tilladte funktioner med lighed i den anden ulighed; her kan man, hvis det gør undersøgelsen lettere, antage at den første ulighed er skarp, idet tilladte funktioner med lighed i første ulighed jo allerede er bestemt. Man kan altså nøjes med at søge tilladte funktioner, som opfylder $x(t_1) > x_1,\ F'_u|_{t=t_1} = 0$.

• *Husk*, at man skal tænke sig t indsat ved differentiationen $\frac{d}{dt}F'_u$ på højresiden af Euler-ligningen (EL). Funktionen $F'_u(t, x(t), \dot{x}(t))$ differentieres via kædereglen, så højresiden er

$$\tfrac{d}{dt}F'_u = F''_{ut} + \dot{x}F''_{ux} + \ddot{x}F''_{uu}.$$

• *Trick: Hvis $F(t, x, u)$ ikke afhænger af t*, så kan Euler-ligningen (EL) delvis integreres: En ikke-konstant funktion $x = x(t)$ løser Euler-ligningen, hvis og kun hvis x løser følgende førsteordens ligning (for en passende værdi af konstanten):

$$F - \dot{x}F'_u = \text{konstant}.$$

• *Variationsregning* med variabel tid, dvs med fast begyndelse t_0 og *variabelt* slut(tids)punkt t_1. Maksimeringsproblemet, for en given funktion $F(t, x, u)$ og givne værdier x_1 og x_2:

$$(\max) \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt \quad \text{for } x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,\ t_1 \text{ fri.} \tag{Max}$$

Nødvendig betingelse. Hvis $x = x(t)$ løser problemet (Max), så vil x opfylde Eulerligningen $F'_x = \frac{d}{dt}F'_u$, og transversalitetsbetingelserne: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $\left[F - \dot{x} \cdot \frac{\partial F}{\partial u}\right]_{t=t_1} = 0$.

Bemærk, at der er tre ligninger og (intuitivt) tre ubekendte, nemlig sluttiden t_1 og to arbitrære konstanter i den generelle løsning til (EL).

• *Med lidt øvelse* kan man undvære symbolet u for den tredie variabel, og simpelthen skrive $\dot{x}$ i stedet. Herefter har $\dot{x}$ *to betydninger:* Dels som navn på den tredie variable i $F(t, x, \dot{x})$, dels som den afledede af en funktion $x = x(t)$. I den første betydning kan man fx „differentiere partielt mht $\dot{x}$", som giver $(\partial/\partial\dot{x})F = F'_{\dot{x}}$.

• *I et optimalt kontrolproblem* indgår: et interval $[t_0, t_1]$, to givne funktioner $f(t, x, u)$ og $g(t, x, u)$ i tre variable (de kan antages at være pæne funktioner: $\mathcal{C}^2$-funktioner), og et interval U (som kan være åbent eller afsluttet, begrænset eller ubegrænset), samt to randværdier x_0 og x_1. Problemet, en maksimeringsopgave, kan se sådan ud:

$$(\max) \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u)\, dt \quad \text{for (1) } u \in U,\ \text{(2) } \dot{x} = g(t, x, u),\ x(t_0) = x_0,\ \text{ og (i) } x(t_1) = x_1.$$

Det skal understreges, at dette er en vildt komprimeret form af opgaven; det kræver meget indforstået viden (og implicitte forudsætninger) at se, hvad opgaven i det hele taget går ud på.

For det første: Symbolerne x, u som indgår i opgaven er to funktioner $x = x(t)$ og $u = u(t)$, defineret for $t_0 \le t \le t_1$, og opgaven går ud på at bestemme dem. Der er en række bibetingelser: Kravet i (1) er en begrænsning på funktionen u, nemlig at $u(t) \in U$ for alle t. Kravet i (2) er, for en given funktion $u = u(t)$, en sædvanlig førsteordens differentialligning med randbetingelse for funktionen $x = x(t)$. Differentialligningen er opfyldt, når $\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t))$ for alle t.

Integralet, for givne funktioner x, u, har værdien $J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt$. At der står (max) signalerer, at det er en maksimeringsopgave: den går ud på blandt alle par af funktioner (x, u), der opfylder bibetingelserne, at bestemme det par (eller de par), som gør værdien af *kriteriefunktionen* $J(x, u)$ størst mulig.

En ekstra (implicit) forudsætning er, at x og u ikke behøver at være „pæne" funktioner. Det er fx nødvendigt at inddrage funktioner $u = u(t)$, der ikke engang er kontinuerte.

• *Kontinuert, med spring.* En funktion $v\colon I \to \mathbb{R}$, defineret på et begrænset interval I, kaldes *stykkevis kontinuert*, hvis den er kontinuert i alle punkter *på nær* i endelig mange *springpunkter* i det indre af I; i et springpunkt a forudsættes, at begge de halvsidige grænseværdier,

$$v(a^-) := \lim_{x \to a^-} v(x), \qquad v(a^+) := \lim_{x \to a^+} v(x),$$

(for $x \to a$ fra venstre og fra højre), eksisterer, men ikke at de er ens (og slet ikke, at de er lig med funktionsværdien $v(a)$). Vi bekymrer os *ikke* om funktionsværdien i springpunkterne.

Hvis intervallet I er uendeligt, tillades uendelig mange spring, men kunne endelig mange i hvert begrænset delinterval.

• *Differentiabel, med knæk.* En funktion $h\colon I \to \mathbb{R}$ på et begrænset interval I kaldes *kontinuert og stykkevis* $\mathcal{C}^1$, hvis den er kontinuert i alle punkter, og differentiabel i alle punkter *på nær* i endelig mange *knækpunkter*, og differentialkvotienten h' (der jo er defineret på nær i de endelig mange knækpunkter) er stykkevis kontinuert. Hvis I er ubegrænset kræves, at der kun er endeligt mange knæk i hvert begrænset delinterval.

Planen for den 8. uge (25/2–28/2) omfatter „Optimal kontrolteori", fra S 12.1–12.4. Ugens øvelser: **Midtvejstest**.

Anders Thorup

Ugeseddel 8

Planen for den ottende uge (25/2–28/2) omfatter „Optimal kontrolteori“, fra S 12.1–12.4. Ugens øvelser: **Midtvejstest**: Under (lidt) eksamenslignende forhold får du udleveret et sæt opgaver, af en længde svarende til at de bør kunne besvares på 100 minutter. Midtvejstesten er et tilbud!

Kuglerne.

• *Betragt* i det følgende et de tre kontrolproblemer (Max_i), (Max_ii), (Max_iii), altså

$$(\max) \int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)\,dt \quad \text{for} \;\; (1)\; u \in U, \;\; (2)\; \dot{x} = g(t,x,u), \;\; (3)\; x(t_0) = x_0,$$

med en af følgende slutbetingelser:

$$\text{(i)} \quad x(t_1) = x_1; \qquad \text{(ii)} \quad x(t_1) \geq x_1; \qquad \text{(iii)} \quad x(t_1) \text{ er fri.}$$

• *Tilladte par* for problemet (Max_i) er par af funktioner $x = x(t)$, $u = u(t)$, som opfylder *bibetingelserne*, dvs (1) $u(t) \in I$ for alle t, differentialligningen i (2), og randbetingelserne (3)(i), dvs begyndelsesbetingelsen $x(t_0) = x_0$ og slutbetingelsen $x(t_1) = x_1$. Tilsvarende for (Max_ii) og (Max_iii). For hvert tilladt par af funktioner (x, u) har integralet en værdi, betegnet $J(x, u)$, og opgaven er at bestemme det *optimale par*, det (eller de) tilladte par, for hvilket *kriteriefunktionen* $J(x, u)$ har den maksimale værdi, — eller eventuelt at afgøre, at et sådant par ikke findes.

Funktionen $u = u(t)$ er *kontrollen*, og det tillades, at den er stykkevis kontinuert („kontinuert, med spring“). Funktionen $x = x(t)$ er *tilstanden*, og det tillades, at den er stykkevis $\mathcal{C}^1$ („differentiabel, med knæk“).

Differentialligningen i (2) er *tilstandsligningen*. Det kræves kun at ligningen $\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t))$ er opfyldt bortset fra eventuelle springpunkter for $u(t)$.

• *Kontrollen bestemmer.* Kontrolfunktion $u = u(t)$ i et tilladt par bestemmer tilstandsfunktionen $x = x(t)$. Antag nemlig, at $s_1 < s_2 < \cdots$ er springpunkterne for $u(t)$. Så er $u(t)$ kontinuert på intervallet $[t_0, s_1]$, og tilstandsligningen i (2) med begyndelsesværdien $x(t_0) = x_0$ bestemmer $x(t)$ på intervallet $[t_0, s_1]$. Specielt er så slutværdien $x(s_1)$ bestemt. Med denne slutværdi som begyndelsesværdi bestemmer tilstandsligningen $x(t)$ på det næste interval $[s_1, s_2]$, osv. Det kan naturligvis ikke udelukkes for en given funktion $u(t)$, at en *maksimal løsning* $x = x(t)$ til (2) faktisk *ikke* defineret på hele intervallet $[t_0, t_1]$. For at $u = u(t)$ er en *tilladt kontrol* kræves altså, at (1) er opfyldt, at tilstanden $x = x(t)$ bestemt ved (2) er defineret for $t_0 \leq t \leq t_1$, og at tilstanden $x = x(t)$ opfylder den relevante slutbetingelse.

• *Hamiltonfunktionen* hørende til det givne kontrolproblem er funktionen H af 4 variable t, x, u, p bestemt ved

$$H(t, x, u, p) = f(t, x, u) + pg(t, x, u).$$

• *Maksimumprincippet* (*Nødvendig betingelse*). Antag, at (x^*, u^*) er et tilladt par af funktioner, som maksimerer kriteriefunktionen $J(x, u)$. „Normalt" findes da en funktion $p = p(t)$, differentiabel med knæk, så at følgende betingelser er opfyldt:
(1') For hvert fast t maksimerer $u^*(t)$ funktionen $v \mapsto H(t, x^*(t), v, p(t))$ for $v \in U$.
(2') Funktionen $p = p(t)$ opfylder følgende førsteordens differentialligning:

$$\dot{p} = -H'_x(t, x^*, u^*, p)\,,$$

hvor $H'_x = \partial H/\partial x$, og lighed betyder $\dot{p}(t) = -H'_x(t, x^*(t), u^*(t), p(t))$ på nær i springpunkter.
(3') Afhængigt af de forudsatte slutbetingelser (i), (ii), eller (iii) for $x(t)$ gælder den tilsvarende af følgende „transversalitetsbetingelser":

(i') $p(t_1)$ fri; (ii') $p(t_1) \geq 0$, og enten $p(t_1) = 0$ eller $x^*(t_1) = x_1$; (iii') $p(t_1) = 0$.

• *Adjungerede funktion*, det er funktionen $p = p(t)$ i maksimumprincippet.

• *Hvad er normalt?* Nogle kontrolproblemer er ikke normale i den forstand, at der findes optimale kontroller u^*, men ingen tilladte kontroller u i nærheden af u^*. Kontrolproblemer er normalt normale, se [S ,s. 373–74].

• *Kogebogen.* Maximumprincippet giver en opskrift: For det givne kontrolproblem leder man efter *kandidater*, dvs sæt af tre funktioner $x = x(t)$, $u = u(t)$, $p = p(t)$ sådan, at (x, u) er et tilladt par, og så at (x, u, p) opfylder betingelserne i maksimumprincippet. Det giver i alt følgende betingelser, hvor de givne bibetingelser er gentaget:
(1*) For hvert fast t maksimerer $u(t)$ funktionen $v \mapsto H(t, x(t), v, p(t))$ for $v \in U$.
(2*) Følgende system af førsteordens differentialligninger er opfyldt:

$$\dot{x} = g(t, x, u), \quad \dot{p} = -H'_x(t, x, u, p).$$

(3*) De relevante af følgende transversalitetsbetingelser gælder:
(i*) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $p(t_1)$ fri;
(ii*) $x(t_0) = x_0$, samt $x(t_1) \geq x_1$ og $p(t_1) \geq 0$ med lighed i mindst en af ulighederne;
(iii*) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1)$ fri og $p(t_1) = 0$.

• *Hovedsætning. „Normalt" findes ethvert optimalt par blandt kandidaterne* (*dvs: hvis* (x, u) *er et optimalt par, så er* (x, u, p) *med en passende funktion* p *blandt kandidaterne*). *Omvendt, hvis Hamilton-funktionen* $H(t, x, u, p)$ *for alle faste tal* t *og* p *er konkav som funktion af* (x, u), *så er hver kandidat optimal.*

Planen for den 9. uge (4/3–7/3) omfatter „Optimal kontrolteori", fra S 12.1–12.5. Ugens øvelser: S12.2: 1; S12.4: 3, 4; EO: **47**.

Anders Thorup

Ugeseddel 9

Planen for den 9. uge (4/3–7/3) omfatter „Optimal kontrolteori“, fra S 12.1–12.5. Ugens øvelser: S12.2: 1; S12.4: 3, 4; EO: **47**.

Kuglerne.

• *Med lidt flere detaljer* kan kontrolproblemet (Max_i) se sådan ud:

$$\text{Maksimer} \quad \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt$$

$$\text{for} \quad (1) \quad u(t) \in U, \qquad (2) \quad \dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)), \qquad (3) \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\text{samt} \quad (\text{i}) \quad x(t_1) = x_1,$$

(1) og (2) for „alle“ t, dvs for $t_0 \le t \le t_1$ bortset fra springpunkter. Men normalt skrives blot:

$$(\max) \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u)\, dt \quad \text{for (1) } u \in U, \text{ (2) } \dot{x} = g(t, x, u), \text{ (3) } x(t_0) = x_0, \text{ (i) } x(t_1) = x_1.$$

Analogt med problemerne (Max_ii) og (Max_iii).

• *Husk lige opskriften! Hamilton-funktionen* er $H(t, x, u, p) := f(t, x, u) + pg(t, x, u)$. Kandidater til løsning af kontrolproblemet er sæt af *tre* funktioner $x = x(t)$, $u = u(t)$, $p = p(t)$, bestemt ved opskriften (*Maksimumprincippets betingelser*):

(1*) For hvert fast t har $H(v) := H(t, x(t), v, p(t))$, $v \in U$, maksimum for $v = u(t)$.

(2*) Følgende system af førsteordens differentialligninger er opfyldt:

$$\dot{x} = g(t, x, u), \quad \dot{p} = -H'_x(t, x, u, p).$$

(3*) De relevante af følgende transversalitetsbetingelser gælder:

(i*) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $p(t_1)$ fri;

(ii*) $x(t_0) = x_0$, samt $x(t_1) \ge x_1$ og $p(t_1) \ge 0$ med lighed i mindst en af ulighederne;

(iii*) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1)$ fri og $p(t_1) = 0$.

Betingelserne er (normalt) nødvendige. Og de er tilstrækkelige under forudsætninger om konkavitet af Hamilton-funktionen.

• *Mangasarians sætning.* Antag, at sættet af tre funktioner (x, u, p) er en kandidat. Hvis Hamiltonfunktionen $H(t, x, u, p(t))$ for hvert fast t er konkav som funktion af de to midterste variable (x, u), så er parret af funktioner (x, u) en optimal kontrol. [Pas på: I spørgsmålet om konkavitet betegner (x, u) vilkårlige variable, i spørgsmålet om at det er en optimal kontrol er $x = x(t)$ og $u = u(t)$ de givne funktioner.]

• *Ideelt* kan man forestille sig opskriften til bestemmelse af kandidater brugt sådan: Betingelsen (1*) udsiger, at for et givet, fast t er $u_0 := u(t)$ et punkt i U, som maksimerer funktionen $H(v) = H(t, x(t), v, p(t))$ for $v \in U$. Bestem nu, for hvert sæt af tre tal t, x, p det punkt u_0 i U, som maksimerer funktionen $H(v) = H(t, x, v, p)$. Punktet u_0 afhænger af tallene t, x, p, så det giver u_0 som en funktion $u_0 = u_0(t, x, p)$. Denne funktion kan så indsættes for u i differentialligningerne i (2*), som så bliver et koblet differentialligningssystem med de to ubekendte funktioner x, p, altså uden u. I den generelle løsning hertil indgår så to arbitrære konstanter; de bestemmes så ud fra de to ligninger i (3*).

Ak, i praksis går det aldrig så glat, og opskriftens instruktioner skal ikke nødvendigvis udføres i den rækkefølge, de står i. Man kan tilføje et notat i kogebogen: Træd tilbage, kig på al den information, der ligger i opskriftens betingelser, og kombiner dem omhyggeligt, afhængigt af det konkrete problem.

• *Maksimumpunktet* u_0 for funktionen $H(v) := H(t, x, v, p)$ for $v \in U$ kan måske ikke bestemmes eksplicit som funktion af t, x, p, – eller der kan være flere maksimumpunkter (fx kan $H(v)$ være konstant), – eller funktionen har måske slet intet maksimum.

Differentialkvotienten af $H(v)$ er den partielle afledede af Hamilton-funktionen, $H'(v) = H'_u(v)$. Hvis kontrolintervallet U er åbent, gælder i et maksimumpunkt u_0, at differentialkvotienten er 0, altså at $H'_u(u_0) = 0$. Denne ligning, $H'_u(u_0) = 0$, kan opfattes som en ligning mellem t, x, u_0, p, og den bestemmer u_0 implicit (eller måske explicit) som funktion af t, x, p. Det er det nemme tilfælde.

I almindelighed, hvis intervallet U ikke er åbent, kan man bruge sin viden om funktioner af én variabel, og sit gode humør, samt eventuelt [S. s.384]: Antag, at u_0 er maksimumpunkt for funktionen $H(v)$ for $v \in U$. Da indtræffer en (eller flere) af følgende muligheder:

(a) $u_0 = u_1,\ H'_u(u_0) \le 0$, (b) u_0 er indre, $H'_u(u_0) = 0$, (c) $u_0 = u_2,\ H'_u(u_0) \ge 0$,

hvor u_1 er venstre endepunkt i U, hvis U har et venstre endepunkt, og, tilsvarende, u_2 er et eventuelt højre endepunkt; „indre“ betyder indre punkt i intervallet U.

Hvis betingelserne kun er opfyldt for én værdi u_0, er det søgte punkt u_0 bestemt, men som nævnt kan flere af betingelserne (a), (b), (c) være opfyldt, specielt kan (b) være opfyldt for flere værdier af u_0. Der vil typisk være visse sæt (t, x, p), hvor u_0 ikke bliver bestemt. Det kan svare til visse springpunkter, eller det kan skyldes, at der er mere end én kandidat. Endelig kan det ske, at betingelserne slet ikke kan opfyldes, fordi funktionen $H(v)$ ikke har et maksimum.

• *Der skal mere til*, naturligvis, end betingelserne i (a), (b), eller (c), til at sikre, at u_0 virkelig er maksimumpunkt for $H(v)$. Bemærk dog det vigtige tilfælde, hvor (a), (b), eller (c) kombineret med (2*) og (3*) opfyldes af tre funktioner x, u, p, og hvor Mangasarians konkavitetsbetingelse er opfyldt. For hvert t er så funktionen $v \mapsto H(t, x(t), v, p(t))$ specielt konkav som funktion af v, og det sikrer, at $u_0 = u(t)$ virkelig er maksimumpunkt. Derfor er (1*) opfyldt, og så er (x, u, p) er kandidat, og derfor (den tilstrækkelige betingelse) er (x, u) en optimal kontrol.

• *Gafler.* Når kontrolintervallet U har begrænsninger, vil maksimumpunktet u_0, som funktion $u_0 = u_0(t, x, p)$ ofte være bestemt ved en ‘gaffeldefinition‘ (et ‘tuborg-udtryk’):

$$u_0 = \begin{cases} \text{udtryk}_1, & \text{når } (t, x, p) \text{ opfylder } \dots \\ \text{udtryk}_2, & \text{når } (t, x, p) \text{ opfylder } \dots \\ \dots, & \end{cases}$$

og det gør det i praksis ekstra kompliceret at indsætte dette udtryk i stedet for u.

Planen for den 10. uge (11/3–14/3) omfatter „Optimal kontrolteori“, fra S 12.1–12.5, 12.7. Ugens øvelser: S12.4: 5, 9; S12.5: 1; EO: **65**.

Anders Thorup

Ugeseddel 10

Program. I den 10. uge (11/3–14/3) er emnet „Optimal kontrolteori“, fra S 12.1–12.5, 12.7. Jeg når helt sikkert også [S, 12.9]. Ugens øvelser: S12.4: 5, 9; S12.5: 1; EO: **65**.

Parlør. ‘ulikhetene snus’ = ulighederne vendes; ‘skrapverdifunksjon’ = skrotværdifunktion.

Kuglerne.

• *Det kan siges på mange måder*, fx:

(a) $x(T) \geq x_T$ og $p(T) \geq 0$ med „=“ mindst et af stederne.

(b) ($x(T) \geq 0$ og $p(T) = 0$) eller ($x(T) = x_T$ og $p(T) \geq 0$).

(c) $x(T) \geq x_T$ og $p(T) \geq 0$ (med $p(T) = 0$ hvis $x(T) > x_T$).

Overvej, at de tre måder udtrykker præcis det samme. I (b) er der sat parenteser, fordi det ellers sprogligt er svært at skelne, hvordan og/eller/og skal kombineres. Formuler selv (d)!

• *Et nyttigt lille lemma. Antag, at $x(t)$, for $t \geq t_0$, løser en differentialligning $\dot{x} = a(t)x$, $x(t_0) = x_0$, hvor $a(t)$ er stykkevis kontinuert. Antag videre, at $x_0 > 0$. Da er $x(t) > 0$ for $t \geq t_0$. Hvis $a(t) \geq 0$ for $t \geq t_0$, så er $x(t)$ voksende, og specielt er $x(t) \geq x_0$ for $t \geq t_0$.*

Bevis. Differentialligningen er en lineær, homogen førsteordensligning. Hvis $a(t)$ er kontinuert, er x bestemt ved en formel: $x(t) = x_0 e^{A(t)}$, hvor stamfunktionen $A(t)$ bestemmes som integralet $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$. Da $x_0 > 0$ og $e^v > 0$ for alle v, følger det specielt, at $x(t) > 0$. Og hvis $a(t) \geq 0$, så er $A(t)$, og dermed også $x(t)$, voksende.

Hvis $a(t)$ har spring, kan formlen stadig bruges: stamfunktionen $A(t)$ bestemmes ved at integrere $a(t)$ mellem springene, og lægge sammen. Funktionen $A(t)$ bliver så kontinuert, og stykkevis $\mathcal{C}^1$, og igen gælder $x(t) = x_0 e^{A(t)}$. Og så fremgår de ønskede påstande. ▯

Lemmaet bruges fx [S, s. 381^{1-2}] med $x := k^*$ og $a := u^*$, og [S, s. 418^9] med $x := x_1^*$ og $a(t) := au^*(t)$.

• *Mere triviel* er følgende observation: *Hvis $x'(t) \leq y'(t)$ for $t \geq t_0$ og $x(t_0) \leq y(t_0)$, så er $x(t) \leq y(t)$ for $t \geq t_0$.* Fx bruges en variant i [S, s. 419^{1-2}].

• *Variationsproblemet*, dvs (max) $\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt$ for $x(t_0) = x_0$, med en af slutbetingelserne (i), (ii), (iii), kan opfattes som et kontrolproblem:

$$(\max) \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)\, dt \quad \text{for } \dot{x} = u, \;\; x(t_0) = x_0;$$

her er altså $f(t, x, u) = F(t, x, u)$, $g(t, x, u) = u$, og kontrolområdet er $U = \mathbb{R}$. Hamiltonfunktionen er $H = F(t, x, u) + pu$. Maksimumprincippet fører til Eulerligningen: Når u er maksimumpunkt for H, er $H'_u = 0$, dvs $p = -F'_u$. Videre er $H'_x = F'_x$, så den adjungerede ligning $\dot{p} = -H'_x$ *er* Eulerligningen $\frac{d}{dt} F'_u = F'_x$. Slutbetingelsen $p(t_1) \geq 0$ *er* betingelsen $F'_u|_{t=t_1} \leq 0$.

• *Arrows Sætning.* I den tilstrækkelige betingelse (for at en kandidat $x = x(t)$, $u = u(t)$, $p = p(t)$ er en optimal kontrol) kan kravet om, at for hvert t er Hamiltonfunktionen $H(t, x, u, p(t))$

konkav i x, u svækkes yderligere: *For kandidaten* (x, u, p) *er* (x, u) *en optimal kontrol, hvis der for hvert* t *gælder, at følgende funktion af* x *(Arrows funktion) er konkav:*

$$\widehat{H}(x) = \max_{v \in U} H(t, x, v, p(t)).$$

Brugen af 'max' indikerer, at det forudsættes, at funktionen på højresiden antager sin maksimumværdi i et punkt $u_0 \in U$.

• *En skrotværdifunktion* er en funktion $S(x)$, der til en tilstand x knytter en reel værdi $S(x)$. Skrotværdien $S(x(t_1))$ af sluttilstanden $x(t_1)$ indgår så i det mest generelle: *Kontrolproblem med skrotværdi:*

$$\text{(max)} \quad S(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u)\, dt \quad \text{for } u \in U,\ \dot{x} = g(t, x, u),\ x(t_0) = x_0, \qquad \text{(Max)}$$

med slutbetingelser af type (i) $x(t_1) = x_1$; (ii) $x(t_1) \geq x_1$; eller (iii) $x(t_1)$ er fri. Slutbetingelsen (i) for skrotværdier er naturligvis en uinteressant udvidelse af standardproblemet.

Hamiltonfunktionen er stadig $H(t, x, u, p) = f(t, x, u) + pg(t, x, u)$.

• *Kogebog for skrotværdiproblemet.* Led efter *kandidater*, dvs sæt af tre funktioner $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$, der opfylder (1*) og (2*) (uændret), samt den relevante af følgende:

(i*) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $p(t_1)$ fri;
(ii*) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) \geq x_1$ og $p(t_1) \geq S'(x(t_1))$ og mindst et „=".
(iii*) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1)$ fri og $p(t_1) = S'(x(t_1))$.

• *Maksimumprincippet.* Enhver optimal kontrol (x, u) for problemet (Max) findes blandt kandidaterne.

• *Arrows sætning.* Omvendt, hvis skrotfunktionen $S(x)$ er konkav, og hvis der for en kandidat (x, u, p) gælder, at Arrows funktion $\widehat{H}(x)$ er konkav, så er (x, u) en optimal kontrol.

Planen for den 11. uge (18/3–21/3) omfatter „Optimal kontrolteori; Differensligninger", fra S 12.5, 12.7, 12.9; S 13.1, 13.2; S 9.1, 9.3. Ugens øvelser: EO: **21**, 48, 73, 92.

Anders Thorup

Ugeseddel 11

Program. I den 11.uge (18/3–21/3) er det „Optimal kontrolteori; Differensligninger“, fra S 12.5, 12.7, 12.9; S 13.1, 13.2; S 9.1, 9.3. Ugens øvelser: EO: **21**, 48, 73, 92. EO er samlingen af eksamensopgaver. Den ligger på nettet i 2 pakker: `EOOLD` er de ældre opgaver, nummereret 1–83, og `EO04` er de nyere, nummereret 84– . Du kan enten printe sider ud efterhånden som du har brug for det. Eller du kan udprinte begge pakker. Der er facit til en del af opgaverne. Den bedste eksamensforberedelse er at regne mange eksamensopgaver, fx de nyeste først; jo flere, jo bedre.

Kuglerne.

• *Hvor er det bare fedt!* Kontrolproblem med skrotværdifunktion:

$$\text{(max)} \quad S(\mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, dt \quad \text{for (1) } \mathbf{u} \in U, \quad \text{(2) } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \text{(3) } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,$$

med blandede slutbetingelser af typerne (i), (ii), og (iii).

Det ligner jo noget du har set før, men nu er det betydeligt mere indviklet: der er flere variable. *Kontrollen* $\mathbf{u}$ er her en *vektor* af kontrolfunktioner $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)$ og *tilstanden* er en *vektor* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ af tilstandsfunktioner (gerne med $n \neq r$). Begge er funktioner $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ og $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ defineret for $t_0 \le t \le t_1$. *Skrotværdifunktionen* $S(\mathbf{x})$ er en reel funktion af n variable.

Kontrolbetingelsen (1) på kontrollen er, at $\mathbf{u} \in U$ (altså $\mathbf{u}(t) \in U$ for alle t), hvor U er en givet *konveks* delmængde af $\mathbb{R}^r$. *Tilstandsligningen* med *begyndelsesbetingelse*,

$$\text{(2)} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad \text{(3)} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,$$

er et helt *system af differentialligninger*, $\dot{x}_j = g_j(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, $x_j(t_0) = x_j^0$, for $j = 1, \dots, n$, svarende til at $\mathbf{g}$ er en given *vektorafbildning* $\mathbf{g}$ med n koordinatfunktioner, defineret på (en delmængde af) $\mathbb{R}^{1+n+r}$. [Det er bekvemt at skrive $\mathbf{x}^0$ og $\mathbf{x}^1$ for de faste vektorer, således at fx $\mathbf{x}^1$ ikke kan forveksles med førstekoordinaten af vektoren $\mathbf{x}$.] I *kriteriefunktionen* indgår skrotværdien $S(\mathbf{x}(t_1))$ af *sluttilstanden*, og i integralet $\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, dt$ er $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ en given reel funktion (af $1 + n + r$ variable); man skal indsætte $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ og $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ når man integrerer.

Slutbetingelsen, der også er en del af (3), er typisk et sæt af blandede betingelser, fx af type (i) for de første n_1 koordinater: $x_j(t_1) = \mathbf{x}_j^1$ for $j = 1, \dots, n_1$, af type (ii) for de næste n_2 koordinater, $x_j(t_1) \ge \mathbf{x}_j^1$ for $j = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$, og af type (iii) for de resterende koordinater, dvs $x_j(t_1)$ er fri for $j = n_1 + n_2 + 1, \dots, n$.

• *Tilladte par* er par af funktioner $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ og $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ for $t_0 \le t \le t_1$, der opfylder (1), (2) og (3) (incl slutbetingelser). Tilstanden $\mathbf{x}$ er bestemt ved kontrollen $\mathbf{u}$, via tilstandsligningen, så man kan blot tale om en *tilladt kontrol* $\mathbf{u}$.

Opgaven går ud på blandt de tilladte par $\mathbf{x}(t)$ og $\mathbf{u}(t)$ at finde det *optimale* par, hvor kriteriefunktioen antager sin største værdi.

• *Hamiltonfunktionen* er funktionen $H = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, hvor $\mathbf{p}$ er en vektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, og $\mathbf{p} \cdot \mathbf{g}$ er skalarproduktet (= indreprodukt, = prik-produktet) af de to vektorer. Hamiltonfunktionen, $H = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$, er altså en funktion af $1 + n + r + n$ variable.

• *Kandidater* er sæt af tre funktioner $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$, hvor $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ er et tilladt par og $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ er en vektorfunktion med n koordinater, som opfylder: (1') $\mathbf{u}(t)$ maksimerer Hamiltonfunktionen $H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t))$ for $\mathbf{u} \in U$, og hvor $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ tilfredsstiller det adjungerede differentialligningssystem,

$$(2') \quad \dot{\mathbf{p}} = -H'_{\mathbf{x}},$$

dvs $\dot{p}_j = -H'_{x_j}$ for $j = 1, \ldots, n$, med slutbetingelser (3') for $p_j(t_1)$ af typen (i'), (ii'), eller (iii') svarende til slutbetingelsen (i), (ii), eller (iii) for $x_j(t_1)$.

• *Maksimumprincippet.* For et normalt maksimeringsproblem findes de optimale kontroller blandt kandidaterne.

• *Arrows sætning.* Antag at skrotværdifunktionen $S(\mathbf{x})$ er konkav. Antag videre for en kandidat $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$, at Arrows funktion $\widehat{H}(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{u} \in U} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}(t))$ for hvert fast t er konkav mht $\mathbf{x}$. Da er kandidaten en optimal kontrol.

• *Det sværeste ved differensligninger* er måske at vænne sig til, at t ikke længere står for et reelt tal, men for et helt tal $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Notationen $x(t)$ vil typisk stå for en *talfølge*, $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, $\ldots$. „Funktionen" $x(t)$ antages kun defineret for $t = 0.1, 2, 3, \ldots$, men den kan selvfølgelig være bestemt ved et udtryk, der giver fornuftig mening for alle reelle tal t. Følgen kan naturligvis også betegnes x_t, altså $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$, og ofte kan begge notationer indgå i en og samme ligning. Når t indgår i en ligning, vil det være underforstået, at ligningen påstås at gælde for alle $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

• *Differensligninger* kan naturligt sammenlignes med differentialligninger: En førsteordens differentialligning for en *funktion* $x(t)$ (Ups, nu er t et øjeblik igen et reelt tal) på normalform har formen

$$Dx\,(t) = g(t, x(t)) \text{ eller } Dx = g(t, x); \qquad (*)$$

differentieringsoperatoren D, med $Dx = \dot{x}$, er bestemt ved $Dx(t) = \lim_{h \to 0} \Delta_h x(t)/h$, hvor Δ_h er differensoperatoren $\Delta_h x(t) = x(t + h) - x(t)$.

For en *følge* $x(t)$ (nu er $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$) kan man kun betragte *differensoperatoren* $\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$, og differensligningen svarende til (*) er egentlig ligningen $\Delta x(t) = g(t, x(t))$. På venstresiden står der $x(t + 1) - x(t)$, og hvis man lægger $x(t)$ til på begge sider får man ligningen,

$$x(t + 1) = f(t, x(t)) \quad \text{eller } x_{t+1} = f(t, x_t), \qquad (**)$$

hvor $f(t, x) = g(t, x) + x$. Det er altid på formen (**), man møder differensligninger. Bemærk, at (**) svarer til de *uendelig* mange ligninger, man får ved at sætte $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$, dvs til $x_1 = f(0, x_0)$, $x_2 = f(1, x_1)$, $x_3 = f(2.x_2)$, $x_4 = f(3, x_3)$, osv.

Planen for den 12. uge (2/4–4/4) er „Differensligninger", fra S 9.1, 9.3–9.6. Ingen øvelser 2. påskedag.

Anders Thorup

Ugeseddel 12

Program. I den 12. uge (2/4–4/4) er det „Differensligninger“, fra S 9.1, 9.3–9.6. Ugens øvelser: Nul øvelser 2. påskedag.

Kuglerne.

• *Ligninger af højere orden.* Differentialligningen af orden n (på normalform), kan udtrykkes ved „differentieringsoperatoren“ D, bestemt ved $Dx(t) = \dot{x}(t)$; det er en ligning af formen $D^n x = g(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^{n-1}x)$. Tilsvarende kunne man få en *differensligning af orden n* ved blot at erstatte D med differensoperatoren Δ. Som oftest bruges i stedet *translationsoperatoren* T, bestemt ved $Tx(t) = x(t+1)$. Differensligningen af orden n får så formen $T^n x = f(t, x, Tx, T^2x, \dots, T^{n-1}x)$, hvor den ubekendte x er en *følge* $x(t)$ eller x_t for $t = 0, 1, 2, \dots$. Da $(T^i x)_t = x_{t+i}$, kan ligningen udførligt skrives:

$$x_{t+n} = f(t, x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+n-1}), \quad t = 0, 1, 2, \dots. \tag{†}$$

• *Hovedsætning = Eksistens– og entydighedssætning* er heldigvis triviel: *For n givne tal $x_0^0, \dots, x_{n-1}^0$ findes der en og kun én løsning x_t til differensligningen således, at de første n værdier er de givne: $x_i = x_i^0$ for $i = 0, \dots, n-1$.* Sætningen forudsætter, at funktionen $f(t, y_1, \dots, y_n)$ på højresiden er defineret for alle de sæt $(t, x_t, \dots, x_{t+n-1})$, der fremkommer, når følgen x_t bestemmes *rekursivt* af ligningen, sådan: For $t = 0$ siger ligningen, at $x_n = f(0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. På højresiden skal tallene $x_0, \dots, x_{n-1}$ være de givne, så ligningen giver værdien af x_n. For $t = 1$ siger ligningen, at $x_{n+1} = f(1, x_1, \dots, x_n)$; på højresiden kender vi tallene $x_1, \dots, x_n$ (incl x_n som vi lige bestemte), så ligningen giver værdien af x_{n+1}. Fortsæt for $t = 2$ med ligningen $x_{n+2} = f(2, x_2, \dots, x_{n+1})$, som giver værdien af x_{n+2}, osv.

• *Ligevægtsløsning/stationær tilstand* = konstant løsning x^* (dvs $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x^*$). Tallet x^* er en ligevægt for (†), hvis $x^* = f(t, x^*, \dots, x^*)$ for alle $t = 0, 1, 2, \dots$. For en *autonom* ligning, altså en ligning, hvor højresiden i (†) er bestemt ved en funktion af formen $f(\mathbf{x})$ (uafhængigt af t), er x^* en ligevægt, hvis og kun hvis

$$x^* = f(x^*, x^*, \dots, x^*).$$

Intuitivt er en ligevægt x^* *asymptotisk stabil*, hvis der for enhver løsning x_t med $x_0, \dots, x_{n-1}$ tilstrækkeligt tæt ved x^* gælder, at $x_t \to x^*$ for $t \to \infty$.

• *Den lineære differensligning* af n'te orden har formen:

$$x_{t+n} + a_1(t)x_{t+n-1} + \dots + a_{n-1}(t)x_{t+1} + a_n(t)x_t = h(t), \tag{‡}$$

hvor $a_1(t), \dots, a_n(t)$ og $h(t)$ er givne talfølger. Den er *homogen*, hvis $h(t) \equiv 0$, og *inhomogen* ellers. Ligningens venstreside er en *operator* $L(x)$: For en given følge $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ kan man aflæse udtrykket på venstresiden for $t = 0, 1, 2, \dots$; det giver en ny følge $L(x) = (L(x)_0, L(x)_1, L(x)_2, \dots)$. Operatoren L er lineær, fra vektorrummet af alle følger ind i det samme vektorrum. Heraf følger: Løsningerne til den homogene ligning er operatorens kerne, $L^{-1}(0)$, og specielt et underrum. Løsningsmængden til den inhomogene ligning er originalmængden $L^{-1}(h(t))$; den fremkommer ved at man til én *partikulær* løsning, dvs til én tilfældigt udvalgt løsning, lægger alle løsninger til den homogene ligning.

Husk, at de to notationer for talfølger bruges i flæng: Både x_t og $h(t)$ er følger, nemlig $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ og $h(0), h(1), h(2), h(3), \dots$,

Den lineære ligning (‡) er *asymptotisk stabil*, hvis ligevægten 0 for den tilsvarende homogene ligning er asymptotisk stabil.

• *Hovedsætningen giver: Løsningsmængden $L^{-1}(0)$ til den homogene ligning er et vektorrum af dimension n.* En konsekvens: Der findes n lineært uafhængige følger $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ som løser den homogene ligning, og med n sådanne følger er den generelle løsning til den inhomogene ligning bestemt ved

$$x_t = u_t^* + C_1 u_1(t) + \cdots + C_n u_n(t), \text{ med konstanter } C_i,$$

hvor u_t^* er en partikulær løsning til den inhomogene ligning.

Bevis. Afbildningen $x_t \mapsto (x_0, \ldots, x_{n-1})$, der til følgen x_t knytter vektoren bestående af følgens n første elementer, er en lineær afbildning fra vektorrummet af følger til vektorrumet $\mathbb{R}^n$. Det følger af Eksistens- og entydighedssætningen, at hvis vi udelukkende betragter følger, der løser en bestemt n'te-ordens differensligning, så er afbildningen bijektiv. Specielt, hvis vi kun betragter løsninger til den homogene ligning ovenfor, er afbildningen bijektiv og lineær; derfor er den en isomorfi $L^{-1}(0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$. Konsekvensen er standard lineær algebra. ▯

• *1.ordens differensligning med konstante koefficienter*: $x_{t+1} + cx_t = h(t)$ skrives ofte $x_{t+1} = ax_t + h(t)$ med $a = -c$. Hvis den er homogen, $h(t) \equiv 0$: generel løsning $x_t = Ca^t$. Med konstant højreside, $h(t) \equiv h$ er den autonom $x_{t+1} = ax_t + h$: Konstant løsning (ligevægt) for $a \neq 1$ er $x^* = h/(1-a)$; generel løsning $x_t = h/(1-a) + Ca^t$. Asymptotisk stabil, hvis $|a| < 1$.

• *2.ordens differensligning med konstante koefficienter* (*homogen*, *inhomogen*, og *karakteristisk polynomium*):

$$(0) \qquad x_{t+2} + bx_{t+1} + cx_t = 0, \qquad\qquad (*) \qquad x_{t+2} + bx_{t+1}x + cx_t = h(t),$$

$$z^2 + bz + c, \quad \text{med rødderne } r = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}, \quad \text{hvor } D = b^2 - 4c.$$

For den homogene ligning (0) afhænger løsningen af fortegnet for D (*diskriminanten*):

$D > 0$: Der er to reelle rødder r_1 og r_2, og den generelle løsning er $x_t = C_1 r_1^t + C_2 r_2^t$. Det antages, at $c \neq 0$.

$D = 0$: Der er én (dobbelt)rod $r = -\frac{b}{2}$, og den generelle løsning er $x_t = C_1 r^t + C_2 t r^t$.

$D < 0$: Der er to ikke-relle rødder $\alpha \pm i\beta$, hvor $\alpha = -b/2$, og $\beta = \sqrt{|D|}/2$. Det er bekvemt at skrive rødderne på formen $r(\cos\theta \pm i \sin\theta)$, hvor r er rødderne numeriske værdi og θ er et argument for en af rødderne:

$$r = |\alpha \pm i\beta| = \sqrt{c}, \quad \cos\theta = \alpha/r = \tfrac{-b}{2\sqrt{c}}, \quad \sin\theta = \beta/r = \tfrac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{c}}.$$

Den generelle løsning er så:

$$x_t = C_1 r^t \cos t\theta + C_2 r^t \sin t\theta, \quad \text{eller} \quad x_t = Ar^t \cos(t\theta + \omega),$$

med reelle konstanter C_1 og C_2, eller A og ω.

Planen for den 13. uge (8/4–11/4) er „Differensligninger, afrunding", fra S 9.1, 9.3–9.6. Ugens øvelser: S9.1: 1(a); S9.2: 2; S9.3: 2; S9.4: 1(d), 1(e); EO: **126**.

Anders Thorup

Ugeseddel 13

Program. I den 13. uge (8/4–11/4) er det „Differensligninger, afrunding“, fra S 9.1, 9.3–9.6. Ugens øvelser: S9.1: 1(a); S9.2: 2; S9.3: 2; S9.4: 1(d), 1(e); EO: **126**.

Kuglerne.

• *Gæt på en af samme slags!* For den inhomogene ligning $x_{t+2} + bx_{t+1} + cx_t = h(t)$ gættes (systematisk) på en partikulær løsning af samme samme slags som højresiden. Husk, at venstresiden er en lineær operator $L(x)$. Indsæt et gæt $x = (x_t)$, og se om $L(x)$ giver følgen $h(t)$, – eller en konstant $K \neq 0$ gange $h(t)$; i det sidste tilfælde rettes gættet til $\frac{1}{K}x$.

For $h(t) = r^t$ gættes på $x_t = r^t$. Indsættelse giver følgen $L(x)_t = (r^2 + br + c)\, r^t$, altså $L(x) = Kr^t$, hvor $K = r^2 + br + c$ er værdien af det karakteristiske polynomium for $z = r$. Hvis r er karakteristisk rod, så er $K = 0$, så det fungerer ikke, men så fungerer gættet tr^t; – vel at mærke, hvis r ikke er dobbeltrod, men så fungerer gættet t^2r^t.

Husk at tilfældet $h(t) = h$ (konstant) er specialtilfældet $r = 1$, idet $h = h\,1^t$. Når 1 ikke er rod i det karakteristiske polynomium, fås den konstante løsning (ligevægt) $x^* = h/(1+b+c)$. Når 1 er rod, prøves med $x_t := t$, og hvis 1 er dobbeltrod, ...

• *n'te-ordens ligning med konstante koefficienter* (*inhomogen* og *karakteristisk polynomium*):

$$x_{t+n} + a_1x_{t+n-1} + \cdots + a_{n-1}x_{t+1} + a_nx_t = h(t), \qquad z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n.$$

Ligningen er *homogen*, hvis $h(t) = 0$ (nulfølgen), og ellers *inhomogen*.

For den homogene differensligning: En reel karakteristisk rod r, med multiplicitet m, giver m løsninger:

$$r^t,\ tr^t,\ \ldots,\ t^{m-1}r^t,$$

og et par af komplekst konjugerede rødder $\alpha \pm \beta i$, med multiplicitet m, giver $2m$ løsninger:

$$r^t\cos\theta t,\ r^t\sin\theta t,\ tr^t\cos\theta t,\ tr^t\sin\theta t,\ \ldots,\ t^{m-1}r^t\cos\theta t,\ t^{m-1}r^t\sin\theta t,$$

hvor r og θ defineres ud fra α og β som ovenfor. De n rødder giver n løsninger til den homogene ligning, og disse løsninger udgør en basis.

For den inhomogene ligning: Prøv med systematiske gæt som i tilfældet $n = 2$.

• *Stabil lineær differensligning.* Den inhomogene ligning (også med variable koefficienter) er (globalt) *asymptotisk stabil*, hvis alle løsninger opfører sig „ens“ for $t \to \infty$. Vilkårlige to løsninger afviger med en følge, der løser den homogene ligning. Ækvivalent (og mere præcist) er ligningen asymptotisk stabil, hvis der for alle løsninger $u(t)$ til den tilsvarende homogene ligning gælder, at $u(t) \to 0$ for $t \to \infty$. Der findes n følger $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ som er en basis for løsningsrummet til den homogene ligning. For asymptotisk stabilitet er det øjensynlig nok, at der for $j = 1, \ldots, n$ gælder $u_j(t) \to 0$ for $t \to \infty$.

• *Check-betingelse for stabilitet. Den lineære n'te-ordens differensligning med konstante koefficienter er asymptotisk stabil, hvis og kun hvis alle karakteristiske rødder* (*incl. ikke-reelle rødder*) *har numerisk værdi mindre end* 1, jfr [S, s. 297].

For $n = 1$: $x_{t+1} + cx_t = h(t)$ er stabil, hvis og kun hvis $|c| < 1$.

For $n = 2$: $x_{t+2} + bx_{t+1} + cx_t = h(t)$ er stabil, hvis og kun hvis $|b| < c + 1$ og $c < 1$.

For $n > 2$: Schur's uligheder, [S, s. 303] („komplicerede determinanter“).

• *Et lineært differensligningssystem med konstante koefficienter* (af første orden) med n ubekendte følger (eller én ubekendt vektorfølge) har formen:

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}(t),$$

hvor A er en $n \times n$-matrix og $\mathbf{h}(t)$ er en følge af vektorer $\mathbf{h}(0), \mathbf{h}(1), \mathbf{h}(2), \ldots$. Systemet er *homogent*, hvis $\mathbf{h}(t)$ er nul-følgen (dvs lig med nul-vektoren for alle t), og ellers *inhomogent*. Med en given begyndelsesværdi $\mathbf{x}_0$ har systemet præcis én løsning. For $\mathbf{h}(t) = \mathbf{0}$ er der en formel: $\mathbf{x}(t) = A^t\mathbf{x}_0$, men det skal understreges, at differensligningssystemet først er løst eksplicit, når man har angivet de følger, der står på de n^2 pladser i matricen A^t.

Systemet er asymptotisk *stabilt*, hvis der for enhver løsning $\mathbf{x}(t)$ til den homogene ligning gælder, at $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ for $t \to \infty$. Ækvivalent: $A^t \to \mathbf{0}$ for $t \to \infty$ (det betyder, at det numerisk største element i A^t går mod 0 for $t \to \infty$); eller: alle rødder i det karakteristiske polynomium for A har numerisk værdi mindre end 1. Teoretisk: Check med Schur!

• *I planen* ser et lineært differensligningssystem sådan ud:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad \text{eller} \quad \begin{aligned} x_{t+1} &= ax_t + by_t + h(t), \quad (1) \\ y_{t+1} &= cx_t + dy_t + g(t). \quad (2) \end{aligned}$$

• *Metode:* Bestem by_t ud fra ligning (1), og bestem herfra by_{t+1} ved at erstatte t med $t+1$. Multiplicer ligning (2) med b, og indsæt heri de fundne udtryk for by_t og by_{t+1}, – og reducer!

$$\begin{gathered} by_t = x_{t+1} - ax_t - h(t), \qquad by_{t+1} = x_{t+2} - ax_{t+1} - h(t+1), \\ x_{t+2} - ax_{t+1} - h(t+1) = bcx_t + d(x_{t+1} - ax_t - h(t)) + bg(t), \\ x_{t+2} - (a+d)x_{t+1} + (ad - bc)x_t = bg(t) - dh(t) + h(t+1). \end{gathered}$$

Det er en 2. ordens lineær ligning med konstante koefficienter. og $z^2 - (\operatorname{tr} A)z + \det A$ som karakteristisk polynomium. Løs denne ligning (lettest, hvis følgerne $h(t)$ og $g(t)$ er konstante): den generelle løsning har formen $x_t = x_t^* + Cu_t + Dv_t$, hvor u_t og v_t er en basis for løsningerne til den homogene ligning, og x_t^* er en partikulær løsning. Indsæt dette udtryk for x_t i det fundne udtryk for by_t; det kan antages, at $b \neq 0$. Divider med b; slut, færdig!

• *De konstante løsninger til et differensligningssystem* $\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}$, også kaldet *ligevægtsløsninger* eller *stationære tilstande*, er de vektorer $\mathbf{x}^*$, som opfylder matrixligningen

$$\mathbf{x}^* = A\mathbf{x}^* + \mathbf{h}, \quad \text{eller } (I - A)\mathbf{x}^* = \mathbf{h}.$$

Matricen $I - A$ er $zI - A$ for $z = 1$, så determinanten $|I - A|$ er værdien af det karakteristiske polynomium for $z = 1$. Determinanten er altså forskellig fra 0, netop hvis $z = 1$ ikke er egenværdi for A. Når det er tilfældet, har matrixligningen den entydigt bestemte løsning,

$$\mathbf{x}^* = (I - A)^{-1}\mathbf{h}.$$

Hvis systemet er asymptotisk stabilt, dvs hvis alle rødder i det karakteristiske polynomium for A numerisk er mindre end 1, så konvergerer alle løsninger $\mathbf{x}(t)$ for $t \to \infty$ mod $\mathbf{x}^*$.

Planen: Mandag den 15/4: øvelser EO: 46, 51, 76; S9.4: 2; S9.5: 2. Maraton med gennemgang af eksamensopgaver. 23/4: EO: 69, 28, 74, 50, 40, 29, 17, 32, 62, og 25/4: EO: 31, 36, 46, 81, 21, 27; X: 12. Spørgetime den 30/4. – Samt eksamen den 2/5.

Anders Thorup

Arrows sætning

Kommentar Dette er ikke en ugeseddel, men et bevis for Arrows Sætning [S, p. 412]. Dette bevis bruger et Lemma i stedet for komplicerede resultater om supergradienter.

Arrows Sætning. *Antag, at* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ *er et tilladt par af (vektor)funktioner, som sammen med funktionen* $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ *opfylder betingelserne i Maksimumprincippet. Antag videre, at skrotfunktionen* $S(\mathbf{x})$ *og Arrows funktion* $\hat{H}(\mathbf{x}) = \hat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}(t))$ *er konkave i* $\mathbf{x}$ *for hvert fast* t*. Da løser* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ *maksimeringsopgaven, dvs* $\mathbf{u}^*$ *er en optimal kontrol.*

Bevis. Lad $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = S(\mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})dt$ være kriteriefunktionen. Det skal så vises, at for hvert tilladt par $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ er

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - J(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \leq 0.$$

Som sædvanlig optræder $\mathbf{x}$ i flere betydninger: Det betegner dels et punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, dels en funktion $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ defineret for $t_0 \leq t \leq t_1$, og dels værdien $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ af denne funktion for en bestemt værdi af t. Tilsvarende med $\mathbf{u}$ og $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{u}^*$ og $\mathbf{p}$. Kort, hvis $F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ er en funktion, skriver vi F for værdien $F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ og F^* for værdien $F(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ og endelig ΔF for differensen $\Delta F := F - F^*$. Med denne – lidt upræcise – notation er sætningens påstand, at der gælder følgende ulighed:

$$\Delta J \leq 0. \tag{1}$$

Øjensynlig er, med den samme notation,

$$\Delta J = \Delta S(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \Delta f(t)\, dt. \tag{2}$$

hvor $\Delta S(t_1) = S(\mathbf{x}(t_1)) - S(\mathbf{x}^*(t_1))$, osv. Vi omskriver differensen Δf ved hjælp af Hamiltonfunktionen, $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, altså

$$\Delta f = \Delta H - \mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{g}. \tag{3}$$

Betragt funktionen,

$$\mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{x} = \mathbf{p}(t) \cdot \Delta \mathbf{x}(t).$$

Ved brug af differentialligningerne for $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^*$ og $\mathbf{p}$ fås:

$$\tfrac{d}{dt}\big(\mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{x}\big) = \dot{\mathbf{p}} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{p} \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}} = -H_{\mathbf{x}}'^* \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{g},$$

hvor $H_{\mathbf{x}}'^* = H_{\mathbf{x}}'(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t))$, dvs

$$\mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{g} = \tfrac{d}{dt}\big(\mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{x}\big) + H_{\mathbf{x}}'^* \cdot \Delta \mathbf{x}. \tag{4}$$

Indsættes (4) i (3) fås:

$$\Delta f = \Delta H - H_{\mathbf{x}}'^* \cdot \Delta \mathbf{x} - \tfrac{d}{dt}\big(\mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{x}\big). \tag{5}$$

Differentialkvotienten på højresiden kan umiddelbart integreres fra t_0 til t_1: Stamfunktionen er $\mathbf{p} \cdot \Delta\mathbf{x}$ og værdien i begyndelsepunktet er 0, idet $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}^0$. Derfor fås af (2):

$$\Delta J = \Delta S(t_1) - \mathbf{p}(t_1) \cdot \Delta\mathbf{x}(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \big(\Delta H - H'^*_{\mathbf{x}} \cdot \Delta\mathbf{x}\big)\, dt\,. \tag{6}$$

For at vise uligheden $\Delta J \le 0$, er derfor nok at vise i (6), at den første differens ≤ 0, og funktionen under integraltegnet er ≤ 0 for alle t. Med andre ord: To uligheder skal vises:

$$\Delta S(t_1) - \mathbf{p}(t_1) \cdot \Delta\mathbf{x}(t_1) \le 0, \quad \text{og} \quad \Delta H - H'^*_{\mathbf{x}} \cdot \Delta\mathbf{x} \le 0 \ \text{ for alle } t. \tag{7}$$

Den første ulighed i (7). Her udnyttes at $S(\mathbf{x})$ er konkav. Værdien i punktet $\mathbf{x}(t_1)$ ligger derfor „under tangenten“ ud fra $\mathbf{x}^*(t_1)$, dvs $S(\mathbf{x}(t_1)) \le S(\mathbf{x}^*(t_1)) + S'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_1)) \cdot \Delta\mathbf{x}(t_1)$, eller

$$\Delta S(t_1) \le S'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_1)) \cdot \Delta\mathbf{x}(t_1).$$

Det er derfor nok at vise, at

$$S'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_1)) \cdot \Delta\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{p}(t_1) \cdot \Delta\mathbf{x}(t_1) \le 0,$$

eller, ækvivalent,

$$\big(\mathbf{p}(t_1) - S'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_1))\big) \cdot \Delta\mathbf{x}(t_1) \ge 0. \tag{7$'$}$$

Uligheden (7′) følger af, at det indre produkt er en sum $\sum v_j w_j$: for type (i)* vides at $w_j = 0$, for type (iii)* vides at $v_j = 0$, og for type (ii)* vides enten $v_j = 0$ eller $v_j > 0$ og $w_j \ge 0$.

I *den anden ulighed* i (7) har t, og dermed også $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}^*$, og $\mathbf{p}$, en fast værdi. Betragt for disse værdier $H(\mathbf{y}) := H(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ og $H^*(\mathbf{y}) = H(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}^*, \mathbf{p})$ som funktioner af $\mathbf{y}$. Uligheden kan skrives $H(\mathbf{x}) \le H^*(\mathbf{x}^*) + H'^*_{\mathbf{x}} \cdot \Delta\mathbf{x}$, og af definitionen på $\hat{H}$ følger specielt, at $H(\mathbf{x}) \le \hat{H}(\mathbf{x})$. Derfor er det nok at vise følgende ulighed:

$$\hat{H}(\mathbf{x}) \le H^*(\mathbf{x}^*) + (H^*)'(\mathbf{x}^*) \cdot \Delta\mathbf{x}. \tag{7$''$}$$

Men (7″) er netop uligheden (8) herunder, med $H := H^*$. Vi har $H^*(\mathbf{y}) \le \hat{H}(\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{y}$, og $\hat{H}(\mathbf{x}^*) = H^*(\mathbf{x}^*)$ ifølge betingelsen (1) i Maksimumprincippet. Derfor er forudsætningen i Lemmaet opfyldt. Altså gælder (8), og dermed (7″), og følgelig den anden ulighed i (7). ▯

Lemma. *Antag for funktioner $H(\mathbf{x})$ og $\hat{H}(\mathbf{x})$ defineret i en konveks mængde T og et punkt $\mathbf{x}^*$ i det indre af T, at* (1) *$H(\mathbf{x}) \le \hat{H}(\mathbf{x})$ for alle $\mathbf{x}$ og $H(\mathbf{x}^*) = \hat{H}(\mathbf{x}^*)$, at* (2) *$H$ er differentiabel i $\mathbf{x}^*$ og* (3) *$\hat{H}$ er konkav. Da gælder for alle $\mathbf{x}$, at*

$$\hat{H}(\mathbf{x}) \le H(\mathbf{x}^*) + H'(\mathbf{x}^*) \cdot \Delta\mathbf{x}. \tag{8}$$

Bevis. Sæt $\mathbf{x}_\varepsilon := \mathbf{x}^* - \varepsilon\Delta\mathbf{x}$. Da ligger punktet $\mathbf{x}^*$ på liniestykket fra $\mathbf{x}_\varepsilon$ til $\mathbf{x}$. Da $\hat{H}$ er konkav, følger det, at

$$\hat{H}(\mathbf{x}_\varepsilon) \le \hat{H}(\mathbf{x}^*) - \varepsilon\Delta\hat{H}.$$

Da $H(\mathbf{x}_\varepsilon) \le \hat{H}(\mathbf{x}_\varepsilon)$ og $H(\mathbf{x}^*) = \hat{H}(\mathbf{x}^*)$ følger det, at

$$H(\mathbf{x}_\varepsilon) \le H(\mathbf{x}^*) - \varepsilon\Delta\hat{H}.$$

Omordning og division med $-\varepsilon$ giver:

$$\frac{H(\mathbf{x}^* - \varepsilon\Delta\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}^*)}{-\varepsilon} \ge \Delta\hat{H}.$$

Højresiden går mod $H'(\mathbf{x}^*) \cdot \Delta\mathbf{x}$ for $\varepsilon \to 0$. Deraf følger uligheden (8). ▯

Anders Thorup