31. marts 1998

Facitliste til Øvelsesopgaver

Opgavesæt dateret 18/3 1997

1) $\frac{c}{1+t^2} + \frac{t}{1+t^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$

2) $ce^{-\frac{1}{3}t^3} + 1, \quad c \in \mathbb{R}.$

3) $\frac{3}{2}e^{t^2} - 1.$

4) $\frac{c}{t} + t \ln t$. Hvis $c = 0$ går løsning mod 0 for $t \to 0$.

5) $ce^{-2t^{1/2}} + te^{-2t^{1/2}}.$

6) $x = -\ln(A - e^{3+t})$, $A > 0$, $-\infty < t < \ln(A) - 3$.

7) $x = (2e^{-\frac{1}{3}t^3} - 1)^{1/2} - \infty < t < (\ln 8)^{1/3}.$

8) $x = 6\frac{1-e^t}{2-3e^t}, \quad t > \ln(\frac{2}{3}).$

9) $x = (1 - \ln(1 + t^2))^{-\frac{1}{2}}, \quad -\sqrt{e-1} < t < \sqrt{e-1}.$

10) $x = 1 - \sqrt{(t+2)(t^2+2)}\,, \quad t > -2.$

11) $p_4(t) = t$, $x = t$ er løsningen.

12) $p_4(t) = t - \frac{1}{6}t^3.$

13) $p_4(t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4.$

14) $y(t) = \frac{1}{5}e^{4t} + \frac{4}{5}e^{-t}.$

15) $x(t) = \frac{29}{9}e^{2(t-1)} + \frac{16}{9}e^{-\frac{5}{2}(t-1)}.$

16) $x(t) = e^t \sin(2t).$

17) $x(t) = ae^t + be^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$

18) $ae^t + be^{\frac{1}{2}t} + \frac{3}{10}\cos t - \frac{1}{10}\sin t, \quad a, b \in \mathbb{R}.$

19) $x(t) = t^4.$

20) Lad $g(x) = \sin(x)\ln(x)$, ligevægtspunkter $x = 1$ og $x \in \{p\pi \mid p \in \mathbb{N}\}$ $g'(x) = \cos(x)\ln(x) + \frac{1}{x}\sin x$, $g'(1) > 0$, 1 er ustabilt, $g'(\pi) = -\ln(\pi) < 0$, π er stabilt.

21)

$$g(x) = x(x+1)(x-1) \qquad \begin{array}{lrl} g'(-1) > 0, & -1 & \text{ustabil} \\ g'(0) < 0, & 0 & \text{stabil} \\ g'(1) > 0, & 1 & \text{ustabil.} \end{array}$$

22) $g(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3)$
$g'(-1) = 12 > 0$, -1 ustabil, $g'(2) = -3 < 0$, 2 stabil

$g'(3) = 4 > 0$, 3 er ustabil.

23) $x_1(t) = e^{-t}\cos t$, $x_2(t) = 2e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t$.

24) $x_1(t) = e^t \cos 2t - 4e^t \sin 2t$
$x_2(t) = 5e^t \cos 2t - 3e^t \sin 2t$.

25) $x_1(t) = (a-b)e^{-2t}\cos t + (a+b)e^{-2t}\sin t + \frac{2}{5}t - \frac{3}{25}$
$x_2(t) = ae^{-2t}\cos t + be^{-2b}\sin t + \frac{3}{5}t - \frac{12}{25}, \quad a, b \in \mathbb{R}$.

Bemærk udtrykket kan se anderledes ud hvis det er $x_1(t)$, der har de fire parametre og x_2 får de afledte.

26) $x_1(t) = -8e^t \sin t + 4\sin t$
$x_2(t) = -\frac{8}{5}e^t \cos t + \frac{24}{5}e^t \sin t + \frac{8}{5}\cos t - \frac{16}{5}\sin t$.

27) $x_1(t) = e^t - te^t - t^2e^t$
$x_2(t) = e^t - \frac{1}{2}t^2e^t$.

28) Ligevægtspunkter $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Ustabilt (Kar. polynomium for det lineære system i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ er $\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{2}$.)

29) For $x = 0$ fås $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 2y - y^2$, dvs. Y-aksen er sammensat af baner bestemt ved $x(t) = 0$ og $y(t)$ løsning til $\dot{y} = 2y - y^2$. For $y = 0$ fås $\dot{y} = 0$, $\dot{x} = x - x^2$, dvs. X-aksen består af løsningsbaner $x(t)$, løsn. til $\dot{x} = x - x^2$ og $y(t) = 0$. Da baner aldrig krydser kan en bane der til $t = 0$ er i det indre af 1. kvadrant aldrig komme ud af 1. kvadrant. Hvis $x(0) > 1$ er $\dot{x}(0) < 0$ og hvis $y(0) > 1$ er $\dot{y}(0) < 0$, heraf følger resten.

30) $(0,0)$, $(\frac{2}{3}, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Nu er $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ lokalt assymptotisk stabilt, da det lineariserede system omkring $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ har kar.poly. $\lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{2}$.

31) Som 29).

32) Y-aksen samt linierne $y = -1$ og $y = 1$. $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$. Ikke lok. ass. stab.

33) Kun $(0,0)$ det er lok. ass. stabilt.

34) Rødder $-1 \pm 2i$, Realdele < 0, altså ass. stabilt.

35) Rødder $-1, -1 \pm 2i$, alle realdele < 0, altså ass. stabilt.

36) Nej, ses v.h.a. Routh-Hurwitz.

37) Nej, ses v.h.a. Routh-Hurwitz.

38) $(0,0)$ Det eneste, det er ustabilt.

39) Vis, at akserne er sammensat af baner.

40) Vis, at Y-aksen er sammensat af baner.

41) $y_k = \frac{1}{4}(-1)^k + \frac{1}{2}k - \frac{1}{4}$.

42) $y_k = 2^k - k - k^2$.

43) $y_k = 2^k \cos(k\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{3}$.

44) Rødderne bliver $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

45) Rødderne bliver $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i$.

46) Nej, rødderne bliver $3 \pm i\sqrt{2}$.

47) $u^* = 1$ konstant, $x^*(t) = e^{-t} + t$, $p(t) = -e^{t-1} + 1$.

48)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < T-1 \\ 0 & T-1 < t \le T \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le T-1 \\ T-1 & T-1 \le t \le T. \end{cases}$$

$$p(t) = \{T - t, \quad 0 \le t \le T.$$

Et konkavt problem så $p_0 = 1$ og Sætning 9.1 kan anvendes.

49) Et konkavt problem, Sætning 9.1.

$$\begin{array}{ll} x(t) = \frac{2}{3e^4+1}(3e^{4-2t} + e^{2t}) & 0 \le t \le 1 \\ p(t) = \frac{2}{3e^4+1}(-e^{4-2t} + e^{2t}) & 0 \le t \le 1 \\ u(t) = \sqrt{3}\,p(t) & 0 \le t \le 1. \end{array}$$

50)

$$\left.\begin{array}{ll} u(t) = -12e^{-t} & 0 \le t \le \ln 2 \\ x(t) = -e^t + 6e^{-t} & 0 \le t \le \ln 2 \\ p(t) = -2e^t - 12e^{-t} & 0 \le t \le \ln 2 \end{array}\right\} \text{ Et konkavt problem.}$$

51) Et konkavt problem, Sætning 9.1 Vis, at $p(t)$ er voksende og negativ samt at $x(t) \ge 1$ for $0 \le t \le \ln 2$

$$\begin{array}{ll} u(t) = 0 & 0 \le t \le \ln 2 \\ x(t) = e^t & 0 \le t \le \ln 2 \\ p(t) = 16e^{-t} + 2e^{2t} & 0 \le t \le \ln 2. \end{array}$$

52)

$$\begin{array}{ll} u(t) = -\frac{x_0}{2} & 0 \le t \le 1 \\ x(t) = -\frac{x_0}{2}t + x_0 & 0 \le t \le 1 \\ p(t) = -\frac{x_0}{2} & 0 \le t \le 1. \end{array}$$

Når Scrap-bidraget fjernes er problemet komkavt, og $s(x)$ er konkav i x så Sætning 9.9 kan anvendes.

53)

$$\begin{array}{ll} u(t) = 1 & 0 \le t \le 1 \\ x(t) = 1 - e^{-t} & 0 \le t \le 1 \\ p(t) = e^{t-1} & 0 \le t \le 1. \end{array}$$

54) Konkavt når Scrap-betingelsen fjernes, men $s(x)$ ikke konkav i x så vi kan ikke bruge Sætning 9.9, men må blot ud fra opgaven finde den eneste mulige kandidat til en løsning.

$$x(t) = (1 - t), \quad u = -1, \quad p = -2, \quad 0 \le t \le 3.$$

55) $\int_{-4}^{1}\int_{3x}^{4-x^2}(x+4)dy\,dx = \frac{625}{12}$.

56) $4\cdot\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)dy\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\frac{1}{2}r^3dr\,d\theta = 4\pi$.

57) $\int_0^{2\pi}\int_0^a r\,dr\,d\theta = \pi a^2$.

58) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} r^2\cos\theta dr\,d\theta = \frac{2}{3}$.

59) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\cos\theta} r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta = 10\pi$.

60) $\frac{5\pi}{2}$.

61) – Svaret opgivet –

62) 0.

63)

$$g'(x) = \int_{x^2}^{\pi} -t\sin(xt^{\frac{1}{2}})dt, \quad \int_0^{\sqrt{\pi}} g(x)dx = 2.$$

64) $\frac{x^{x-1}}{2\sqrt{\ln x}} + \int_0^{\sqrt{\ln x}} t^2e^{t^2x}dt$.