18. marts 1998

Mat H 2 Øvelsesopgaver

1) $\frac{dx}{dt} + \frac{2t}{1+t^2}x = \frac{1}{1+t^2}$, fuldstændig løsning.

2) $\dot{x} + t^2 x = t^2$, fuldstændig løsning.

3) $\dot{x} - 2tx = t$, $x(0) = 1$.

4) $\dot{x} + \frac{1}{t}x = \frac{1}{t^2}$, $t > 0$, undersøg løsningen for $t \to 0^+$.

5) $\dot{x} + \frac{1}{\sqrt{t}}\, x = e^{-2\sqrt{t}}$, $t > 0$, undersøg løsningen for $t \to 0^+$.

6) $\dot{x} = e^{(3+x+t)}$.

7) $2x\dot{x} + t^2 + t^2x^2 = 0$, $x(0) = 1$.

8) $\dot{x} = x^2 - 5x + 6$, $x(0) = 0$.

9) $\sqrt{1+t^2}\dot{x} - x^3 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = 0$, $x(0) = 1$.

10) $\dot{x} = \frac{3t^2+4t+2}{2x-2}$, $x(0) = -1$.

11) Find Taylorpolynomiet af grad 4 i udviklingspunktet $t_0 = 0$ for den løsning til differentialligningen $\dot{x} = 1 + t - x$, som opfylder $x(0) = 0$.
Hvad bliver løsningen?

12) Som 11 men $\dot{x} = \cos x$, $x(0) = 0$.
(Ingen explicit løsning her).

13) Som 11 men $x' = 1 - t + x^2$, $x(0) = 0$.
(ingen explicit løsning her).

14) $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

15) $2x'' + x' - 10x = 0$, $x(1) = 5$, $x'(1) = 2$.

16) $x'' + 2x' + 5x = 0$ $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.

17) $x'' - 3x' + 2x = e^{3t} + 1$, fuldstændig løsning.

18) $2x'' - 3x' + x = \sin t$, fuldstændig løsning.

19) $x'' + 5x' + 4x = 12t^2 + 20t^3 + 4t^4$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

20) Betragt differentialligningen $x' = \sin(x) \cdot \ln(x)$, $x > 0$. Angiv ligevægtspunkterne. Bestem arten af ligevægtspunkterne $x = 1$ og $x = \pi$.

21) Betragt differentialligningen $x' = x^3 - x$. Bestem ligevægtspunkterne og angiv deres art.

22) Som 21 men $x' = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

23) Løs differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 &= 5x_1 - 3x_2; \quad x_1(0) = 1;\ x_2(0) = 2. \end{aligned}$$

24) Som 23 men med systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - x_2; \quad x_1(0) = 1;\ x_2(0) = 5.\end{aligned}$$

25) Bestem den fuldstændige løsning til

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -3x_1 + 2x_2 + 1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + t.\end{aligned}$$

26) Som 23)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_1 + 5x_2 - 4\cos t, \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 2x_2; \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0.\end{aligned}$$

27) Som 23)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_1 - 4x_2 + e^t; \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + e^t, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1.\end{aligned}$$

28) Bestem ligevægtspunkterne for det autonome system

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - x^2 - 2xy \\ \dot{y} &= 2y - 2y^2 - 3xy.\end{aligned}$$

Bestem arten af det ligevægtspunkt som ikke ligger på koordinatakserne. Marker fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder af 1. kvadrant, hvor fortegnene er konstante.

29) Betragt differentialligningssystemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - x^2 - 2xy, \\ \dot{y} &= 2y - 2y^2 - 3xy.\end{aligned}$$

Vis, at når $(x(t), y(t))$ $t \geq 0$ er en løsning som opfylder $x(0) > 0$, $y(0) > 0$ så vil $x(t) > 0$ og $y(t) > 0$ for alle $t > 0$ og mængden $\{(x(t), y(t)) \mid t \geq 0\}$ er begrænset.

30) Som 28) men med

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - 3x^2 - 2yx \\ \dot{y} &= y - 2y^2 - xy.\end{aligned}$$

31) Som 29 men med systemet fra opgave 30.

32) Bestem ligevægtspunkterne for systemet

$$\dot{x} = xy^2 - x$$
$$\dot{y} = x \sin \pi y.$$

Find det lineariserede system ved punktet (0,1). Er dette punkt lokalt assymptotisk stabilt ?

33) Bestem ligevægtspunkterne og disses art for systemet

$$\dot{x} = -x - xy^2$$
$$\dot{y} = -y - yx^2.$$

34) Vis, at $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \sin t$ er globalt assymptotisk stabil.

35) Afgør om $\dddot{x} + 3\ddot{x} + 7\dot{x} + 5x = \cos t$ er globalt assymptotisk stabil.

36) Afgør om $\frac{d^4x}{dt^4} + 6\frac{d^3x}{dt^3} + 4\frac{d^2x}{dt^2} + 25\frac{dx}{dt} + 10x = 0$ er globalt assymptotisk stabil

37) Som 36 men $2\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$

38) Bestem ligevægtspunkterne og disses art for systemet

$$\dot{x} = y^3 - y^2x + yx^2 - x^3 + x$$
$$\dot{y} = -\ln\left(\frac{1}{2}(1 + x^2)\right)e^{(xy-1)}.$$

39) Vis, at enhver løsning $(x(t), y(t))$, $t \geq 0$ til systemet

$$\dot{x} = x^2 + y \sin x$$
$$\dot{y} = -1 + xy + \cos y$$

som opfylder $x(0) > 0$ og $y(0) > 0$ vil forblive i 1. kvadrant for $t > 0$. Bestem de områder hvor $\dot{x}$ og $\dot{y}$ har konstante fortegn og angiv disse med pile.

40) Vis, at enhver løsning $(x(t), y(t))$ til $\dot{x} = y(e^x - 1)$, $\dot{y} = x + e^y$ som starter $(t = 0)$ i højre halvplan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ må forblive i højre halvplan.

41) Find den løsning $\{y_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ til ligningen

$$y_{k+1} + y_k = k$$

som opfylder $y_1 = 0$.

42) Som 41) men ligningen $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 2k$ (gæt på løsning til den inhomogene ligning af formen $ak^2 + bk$).
Betingelserne: $y_1 = 0$, $y_2 = -2$.

43) Som 41) men $y_{k+2} - 2y_{k+1} + 4y_k = 1$, $y_1 = \frac{4}{3}$, $y_2 = -\frac{5}{3}$.

44) Vis, at differensligningen

$$24x_{t+3} - 26x_{t+2} + 9x_{t+1} - x_t = 0$$

er stabil. (Vink: Schurs test bliver voldsom, prøv med $m = \frac{1}{2}$).

45) Som 44) men med ligningen $16x_{t+4} - x_t = 0$. Vink: Schurs test er ikke den nemmeste vej at gå!

46) Afgør om

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t - 2y_t \\ y_{t+1} &= 3x_t + 5y_t \end{aligned}$$

er stabilt.

Der er ingen variationsregningsopgaver i dette sæt, da der er mange sådanne blandt de uregnede opgaver fra Oslo.

47) Maks $\int_0^1 (x+u)\,dt$, $\dot{x} = -x + u + t$, $0 \le u \le 1$, $x(0) = 1$ $x(1)$ fri.

48) Lad $T > 2$, Maks $\int_0^T (-3 - u + x)\,dt$, $\dot{x} = u$, $0 \le u \le 1$, $x(0) = 0$, $x(T) \ge 1$.

49) Maks $\int_0^1 (-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}u^2)\,dt$, $\dot{x} = -x + \sqrt{3}\,u$, $u \in \mathbb{R}$, $x(0) = 2$, $x(1)$ fri.

50) Maks $\int_0^{\ln 2} (-2x^2 - 2xu - u^2)\,dt$, $\dot{x} = x + u$, $u \in \mathbb{R}$, $x(0) = 5$, $x(\ln 2) = 1$.

51) Maks $\int_0^{\ln 2} (-2x^2 - 2xu - u^2)\,dt$, $\dot{x} = x + u$, $u \ge 0$, $x(0) = 1$, $x(\ln 2)$ fri.

52) Maks $-\frac{1}{2}x(1)^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 u^2\,dt$, $\dot{x} = u$, $x(0) = x_0$, $u \in \mathbb{R}$.

53) Maks $x(1)$, $\dot{x} = -x + u$, $-1 \le u \le 1$, $x(0) = 0$.

54) Maks $\frac{1}{2}x(3)^2 - \int_0^3 u^2\,dt$, $\dot{x} = u$, $x(0) = 1$, $u \in \mathbb{R}$. Find den eneste kandidat. Det skal ikke vises, at den løser problemet.

55) Find volumnet af det begrænsede legeme som grænses af fladen $y = 4 - x^2$ og planerne $y = 3x$, $z = x + 4$, $z = 0$.

56) Find volumnet af det begrænsede legeme der afgrænses af fladerne $x^2 + y^2 = 4$ og $2z = x^2 + y^2$ samt planen $z = 0$.

57) Omskriv integralet til polære koordinater:

$$\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx.$$

58) Omskriv integralet til polære koordinater:

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} x\,dx\,dy.$$

59) Omskriv integralet til polære koordinater

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} x^2 dy\,dx.$$

60) Find volumnet af det legeme der befinder sig under fladen $z = 5 - x^2 - y^2$ og over fladen $z = 4x^2 + 4y^2$.

61) Vis ved at skifte variable, at når $u = x - y$ og $v = y$ så er

$$\int_0^\infty \int_0^x e^{-sx} f(x-y, y)\, dy\, dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u, v)\, du\, dv.$$

62) (Eks. H 1 august 1996).

Lad M være det begrænsede område i planen som afgrænses af kurverne bestemt ved ligningerne:

$$x^2 - y = 0, \quad x^2 + y = 2.$$

(a) Tegn en skitse af M.
Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x, y) = 2xe^y.$$

(b) Beregn

$$\iint_M f(x, y) dx\, dy.$$

63) (Eks. H 1 juni 1996)

For $x \in \mathbb{R}$ med $0 < x < \sqrt{\pi}$ defineres en differentiabel funktion g ved

$$g(x) = \int_{x^2}^{\pi} t^{1/2} \cos(xt^{1/2})\, dt.$$

a) Find for $0 < x < \sqrt{\pi}$ et udtryk for $g'(x)$. Et indgående bestemt integral ønskes ikke beregnet.

b) Beregn $\int_0^{\sqrt{\pi}} g(x)\, dx$.

64) Lad $x \in [1, \infty[$ og $F(x) = \int_0^{\sqrt{\ln x}} e^{t^2 x}\, dt$.
Bestem $F'(x)$.