DOK2013b-facitliste (helt uden garanti)

Opgave1

a: $k < 0$.

b: $(x, y) = (Ce^{kt} + Dte^{kt}, De^{kt})$.

c: $(x, y) = (-1/k + Ce^{kt} + Dte^{kt}, De^{kt})$.

d: $(x, y) = (C + (D + 1)t, D)$.

Opgave2

a: $(x, y) = (-4, 0), (0, 0), (0, 6), (4, 0)$.

c: Antag at $z(0) = (x(0), y(0)$ ligger i trekanten begrænset af x-aksen, y-aksen, og linien $l\colon x + y = 6$. På l peger pilen vandret ind i trekanten, og x- og y-aksen er baner. Trekanten kan altså ikke forlades. I området uden for trekanten, i første kvadrant, bevæger $z(t)$ sig nedad mod venstre, og akserne er baner. Området kan altså kun forlades ved at krydse linien l, og bevæge sig ind i trekanten. Hvis $z(0) = (0, 0)$ (stationært), er $\lim z(t) = (0, 0)$. Hvis $z(0)$ ellers er på x-aksen, er $\lim z(t) = (4, 0)$. For alle andre muligheder for $z(0)$ er $\lim z(t) = (0, 4)$.

Opgave3

a: $F'_x = 2ct^{b-2}x$, $\frac{d}{dt}F'_{\dot{x}} = \frac{d}{dt}(-2t^b\dot{x}) = -2(bt^{b-1}\dot{x} + t^b\ddot{x})$, Eulerligning: $t^b\ddot{x} + bt^{b-1}\dot{x} + ct^{b-2}x = 0$, eller $t^2\ddot{x} + bt\dot{x} + cx = 0$.

b: Hvis $c \le 0$ er $F(t, x, u) = ct^{b-2}x^2 - t^b u^2$ (for fast $t > 0$) sum af sur parabel i x og sur parabel i u, og derfor konkav i x, u.

c: Indsættelse af $x = t^3$ og $x = t^{-1}$ i $t^2\ddot{x} - t\dot{x} - 3x$ giver 0. Den fuldstændige løsning er derfor $x = At^3 + Bt^{-1}$.

d: Vi har $F'_u = -2t^{-1}\dot{x}$, så betingelsen er $0 = -2t^{-1}\dot{x}|_{t=2}$, altså $\dot{x}(2) = 0$. Løsning $1 = x(1) = A + B$, $0 = \dot{x}(2) = 12A - B/4$, hvoraf $A = 1/49$, $B = 48/49$.

Opgave 4

a: Indsættelse af $x_t = 2^t$ giver $L(2^t) = 2^{t+2} - (2a - \frac{1}{2})2^{t+1} - a\,2^t = (4 - (4a - 1) - a)2^t = (5 - 5a)2^t =$ højresiden.

b: Asymptotisk stabil når $|2a - \frac{1}{2}| < 1 - a$ og $-a < 1$, altså når $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.

c: Kar pol $z^2 - (2a - \frac{1}{2})z - a$ med rødder $z = 2a$ og $z = -\frac{1}{2}$ (ens, når $a = -\frac{1}{4}$). Løsning $x_t = C(-\frac{1}{2})^t + D(2a)^t$ for $a \ne -\frac{1}{4}$ og $x_t = C(-\frac{1}{2})^t + Dt(-\frac{1}{2})^t$ for $a = -\frac{1}{4}$.

d: Inhomogene $2^t + C(-\frac{1}{2})^t + D(2a)^t$; $3 = x_0 = 1 + C + D$, $1 = x_1 = 2 - \frac{1}{2}C + D(2a)$, eller $x = 2^t + 2(-\frac{1}{2})^t$, også for $a = -\frac{1}{4}$.

Opgave5

a: Hamilton: $H = (-2tx - u^2) + 2pu$.

(i) $u(t)$ maksimerer H, dvs $u = 1$ hvis $p \ge 1$, $u = p$ hvis $-1 \le p \le 1$ og $u = -1$ for $p \le -1$.

(ii) $\dot{p} = -H'_x = 2t, \quad \dot{x} = 2u$.

(iii) $x(0) = 1, \qquad p(2) = S'|_{t=2} = 1$ (idet $S(x) = x$).

b: (i)+(ii) giver $p = t^2 - 3$.

c: Af (b) og (i) fås $p(t)$ voksende for $0 \le t \le 2$, med $p(\sqrt{2}) = -1$. Heraf: for $0 \le t \le \sqrt{2}$ er $u = -1$ og $\dot{x} = 2u = -2$, dvs $x = -2t+1$; specielt $x(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}+1$. For $\sqrt{2} \le t \le 2$ er $u = t^2 - 3$, giver $\dot{x} = 2u = 2t^2 - 3$ $x = \frac{2}{3}t^3 - 6t + A$ hvor $\frac{4}{3}\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + A = -2\sqrt{2}+1$, eller $A = \frac{8}{3}\sqrt{2} + 1$.

d: Da H er sum af lineær i x, u og sur parabel i u, er H konkav i (x, u).