DOK2013-facitliste (helt uden garanti)

Opgave1

b: $a < 1$.

c: $x = Ce^{-\frac{1}{2}t} + De^{2at}$. for $a \neq -\frac{1}{4}$ og $x = Ce^{-\frac{1}{2}t} + Dte^{-\frac{1}{2}t}$ når $a = -\frac{1}{4}$.

d: $x = \cos t - e^{-\frac{1}{2}t}$ (også når $a = -\frac{1}{4}$).

Opgave2

a: $(-1, 0)$, $(0, -2)$, samt $a := (0, 0)$, $b := (1, 0)$, $c := (0, 2)$.

c: På nul-kurverne, der afgrænser D, to cikelbuer og to intervaller på akserne, peger pilene ind i D (eller langs randen på intervallerne). Med $z(t) = (x(t), y(t))$ og $z(0) \in D$ gælder: $z(0) = b$ giver $z(t) = b$; $z(0) = c$ giver $z(t) = c$; $z(0) = (v, 0)$ giver $z(t) \to b$; alle andre tilfælde: $z(t) \to c$ for $t \to \infty$.

d: a er ustabilt; b er ustabilt (saddelpunkt); c asymptotisk stabilt.

Opgave3

a: $2atx + t^2\dot{x} + 8t = \frac{d}{dt}(t^2x + 2t\dot{x}) = 2tx + t^2\dot{x} + 2\dot{x} + 2t\ddot{x}$ eller $t\ddot{x} + \dot{x} + (1-a)tx = 4t$.

b: $F(t, x, u)$ er konveks: Hessematricen $A = F''$ har $a_{11} = 2at$ og det $F'' = 4at^2 - t^4 = t^2(4a - t^2)$; for $a \geq 1$ er begge ≥ 0 på intervallet $1 \leq t \leq 2$, altså positiv semidefinit.

c: $\frac{d}{dt}(t\dot{x}) = 4t$ giver $t\dot{x} = 2t^2 + C$ eller $\dot{x} = 2t + C/t$, hvoraf $x = t^2 + C\ln t + D$.

d: Randbetingelser: $x(1) = 0$ og $0 = F'_u|_{t=2} = (t^2x + 2t\dot{x})|_{t=2} = 4x(2) + 4\dot{x}(2)$, dvs $x(2) + \dot{x}(2) = 0$. Heraf: $1 + D = 0$, dvs $D = -1$, og $4 + C\ln 2 - 1 + 4 + C/2 = 0$, dvs $C = -7/(\ln 2 + \frac{1}{2})$.

Opgave 4

a: $(x_1, y_1) = (\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$, $(x_2, y_2) = (\frac{13}{4}, 4)$.

b: Koefficientmatrix har $\mathrm{tr}(A) = -\frac{1}{2}$ og $\det A = \frac{1}{4}$, karakteristisk polynomium $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}$, altså asymptotisk stabil.

c: Systemet har ligevægtspunkt (x^*, y^*); (b) sikrer, at $\lim_{t\to\infty} x_t = x^*$ og $\lim_{t\to\infty} y_t = y^*$.

d: $x^* = 2$, $y^* = 1$ (Løs ligningerne med $x_{t+1} = x_t = x^*$ og $y_{t+1} = y_t = y^*$.)

Opgave 5

a: Hamilton: $H = 2\sin t\, x - \frac{1}{2}u^2 + pu$. (1) $u = 1$ for $p \geq 1$, $u = p$ for $0 \leq p \leq 1$, $u = 0$ for $p \leq 0$. (2) $\dot{p} = -H'_x = -2\sin t$. (3) $p(\pi/2) = 0$.

b: $p = 2\cos t$ ifølge (2) og (3) (aftagende for $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, og $2\cos\frac{\pi}{3} = 1$).

c: $u = 1$ for $t \leq \frac{\pi}{3}$ og $u = 2\cos t$ for $t \geq \frac{\pi}{3}$. Heraf: For $t \leq \frac{\pi}{3}$ er $\dot{x} = 1$ og $x(0) = -\frac{\pi}{3}$, altså $x = t - \frac{\pi}{3}$, specielt $x(\frac{\pi}{3}) = 0$. For $t \geq \frac{\pi}{3}$ er $\dot{x} = 2\cos t$, altså $x = 2\sin t - 2\sin\frac{\pi}{3} = 2\sin t - \sqrt{3}$.

d: H er konkav i (x, u), nemlig lig $-u^2$ plus lineært.