Gamle eksamensopgaver (DOK)

Opgave 1. (sommer 1994, opgave 1)

a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen
$$x'' - 6x' + 9x = 0 \ .$$

b) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen
$$x'' - 6x' + 9x = e^{3t} \ .$$

Opgave 2. (sommer 1994, opgave 2)
Lad $T : [1, \infty[\to [1, \infty[$ være givet ved
$$T(x) = 2 + \frac{3}{x} \ .$$

a) Vis, at $|T(x) - T(y)| \leq 3|x - y|$.

b) Find T's fixpunkt(er).

c) Lad $T_1 : [2, \infty[\to [2, \infty[$ være givet ved $T_1(x) = T(x)$. Vis, at T_1 er en kontraktion.

d) Vis, at
$$T^n(x) = T(T(\ldots(T(x))\ldots) \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$$
for alle $x \in [1, \infty[$.

Opgave 3. (sommer 1994, opgave 3)
Lad $C =$ Konv $\{(0,0), (0,1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ og $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + 1$.

a) Find C's hjørner.

b) Vis, at f er konveks.

c) Find normalkegler til C i punkter $(0,0)$ og $(0,1)$.

d) Vis, at
$$\text{grad } f(0,0) \in -N_C(0,0) \ .$$

e) Find
$$\min_{(x,y)\in C} f(x,y) \ .$$

Opgave 4. (sommer 1994, opgave 4)
Lad f være givet ved
$$f(x,y) = 8x^2 - 8x - 4xy + y^2 + 4y \ .$$

a) Vis, at
$$f(x,y) = 0$$
bestemmer y som funktion $\varphi(x)$ af x i omegn af punktet $(0,0)$.

b) Vis, at
$$f(x,y) = 0$$
ikke bestemmer y som C^1-funktion af x i omegn af punktet $(1,0)$.

c) Find
$$\frac{d\varphi}{dx}(0) \ .$$

Opgave 5. (sommer 1994, opgave 5)
Løs følgende programeringsopgave:

Find min $\big((x-3)^2+y^2\big)$ under bibetingelser

$$\begin{aligned} x &\geqq 0 \\ y &\geqq x^2 \ . \end{aligned}$$

Opgave 6. (31. maj 1995, opgave 1)
Betragt det lineære program

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maksimer} & x_1 - 5x_2 + 7x_3 \\ & \text{m.h.t.} & x_1 - x_2 + 3x_3 \leqq 11 \\ & & -x_1 + 7x_2 = 1 \\ & & x_2,\ x_3 \geqq 0 \end{array}$$

(i) Find en optimal løsning til programmet (P) og gør rede for, at det er den eneste optimale løsning. Angiv den optimale værdi for (P).

(ii) Opskriv det duale program (P') til (P) og angiv en optimal løsning til (P'). Er denne også den eneste ?

Opgave 7. (31. maj 1995, opgave 2)

(i) Angiv den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0 \ .$$

(ii) Beregn en løsning til den inhomogene differentialligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = t^2 + 4t \ ,$$

og angiv derefter samtlige løsninger til denne ligning.

(iii) Angiv den løsning x til spørgsmål (ii), som opfylder $x(0) = x'(0) = 0$.

Opgave 8. (31. maj 1995, opgave 3)
I $\mathbb{R}^3$ betragtes punkterne

$$\underline{x}_1 = (8,-3,2)\ , \quad \underline{x}_2 = (2,1,4)\ , \quad \underline{x}_3 = (-1,3,-4)\ , \quad \underline{x}_4 = (2,1,1)\ .$$

(i) Gør rede for, at $\underline{x}_4$ er en konveks kombination af $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ og $\underline{x}_3$.
Angiv en sådan konveks kombination.

(ii) Gør rede for, at $\underline{x}_3$ ikke er en konveks kombination af $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_2$.

(iii) Forklar, at conv $(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \neq$ conv $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$
og at conv $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3) =$ conv $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4)$.

Opgave 9. (31. maj 1995, opgave 4)
Betragt det ikke-lineære programmeringsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{maksimer} & 3x + y^2 \\ \text{m.h.t.} & x^2 + y^2 \leqq 25 \ \text{ og } \ x \geqq 0 \end{array}$$

Opstil Kuhn-Tucker betingelserne for problemet og find løsningen ved hjælp af disse.

Opgave 10. (31. maj 1995, opgave 5)
Find den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 \\ \dot{x}_3 &= 3x_1 + 4x_3 \ . \end{aligned}$$

Opgave 11. (sommer 1996, opgave 1)
(1) Angiv den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 7\frac{dx}{dt} + 10 = 0 \, .$$

(2) Beregn en løsning til den inhomogene differentialligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 7\frac{dx}{dt} + 10x = 2e^{-3t} + 10t^2 \, ,$$

og angiv derefter samtlige løsninger til denne ligning.
(3) Gør rede for, at differentialligningen i (2) er globalt asymptotisk stabil, f.eks. ved at henvise til en relevant sætning fra kurset.

Opgave 12. (sommer 1996, opgave 2)
Betragt det ikke-lineære programmeringsproblem

$$\text{maksimer } \ln(x+1) + y$$

m.h.t. $2x + y^2 \leq 6$ og $x \geq 0$.
Opstil Kuhn-Tucker betingelserne for problemet og løs det ved hjælp af disse.

Opgave 13. (sommer 1996, opgave 3)
Betragt variationsproblemet

$$\text{minimer } \int_0^2 \left(e^t x + t\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^2 \right) dt$$

med randbetingelserne $x(0) = 0$, $x(2) = 2$.

(1) Opstil Eulerligningen for problemet og løs den.
(2) Bestem den løsning for Eulerligningen, som opfylder randbetingelserne.
(3) Gør rede for, at løsningen i (2) er optimal.

Opgave 14. (sommer 1996, opgave 4)
Beregn den fuldstændige løsning til differensligningen

$$x_{t+2} - 6x_{t+1} + 9x_t = 4t^2 + 1\,.$$

Opgave 15. (sommer 1996, opgave 5)
(1) Bestem den generelle løsning til det lineære differentialligningssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 + 2t \\ \dot{x}_2 &= \qquad x_2 + t\,. \end{aligned}$$

(2) Beregn den løsning til (1) som opfylder $(x_1(0),\ x_2(0)) = (1, 0)$.

Opgave 16. (sommer 1997, opgave 1)
Bestem den løsning til differentialligningen

$$(e + t^2)\dot{x} + tx^3 = 0,$$

som opfylder $x(0) = 1$.

Opgave 17. (sommer 1997, opgave 2)
a) Bestem den løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1' &= -3x_1 + x_2 + 2t^2 + 2t \\ x_2' &= -10x_1 - x_2 + 11t^2 + 2t \end{aligned}$$

som opfylder $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.
b) Hvorledes forløber banen asymptotisk når $t \to +\infty$.

Opgave 18. (sommer 1997, opgave 3)
Der er givet et differentialligningssystem

$$\begin{aligned} x' &= 6x - 2x^2 - xy \\ y' &= 6y - xy - 2y^2\,. \end{aligned}$$

a) Bestem systemets ligevægtspunkter og angiv arten af ligevægtspunktet i det indre af 1. kvadrant.
b) Afsæt de 4 punkter $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 3)$, og $(1, 3)$ i et koordinatsystem og marker med en pil ud fra hvert punkt retningen som banen gennem dette punkt har.
c) Begrund, at en bane $\{(x(t), y(t)) \mid t \in [0, \infty[\}$ som starter i det indre af 1. kvadrant altid vil forblive i det indre af 1. kvadrant og udgøre en begrænset punktmængde.

Opgave 19. (sommer 1997, opgave 4)
a) Bestem den løsning $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ til differensligningen

$$(*) \qquad 4x_{t+2} - x_t = 3t^2 + 16t + 16\,,$$

som opfylder $x_1 = 1, \quad x_2 = 2$.

b) Undersøg stabilitetsforholdene for ligningen $(*)$.

Opgave 20. (sommer 1997, opgave 5)
Betragt variationsproblemet

$$\text{Maksimer} \qquad \int_0^1 (12xt - \dot{x}^2 - 2\dot{x})\,dt,\ x(0) = 0,\ x(1) \text{ fri.}$$

a) Bestem den eneste mulige løsning som opfylder Eulers ligning, initialbetingelsen og transversalitetsbetingelsen
b) Begrund, at den fundne løsning er optimal.

Opgave 21. (sommer 1997, opgave 6)
Betragt kontrolproblemet

(1) Maks. $\int_0^4 (x - u^2)\,dt$,
(2) $\dot{x} = 2u$, $x(0) = 0$, $x(4)$ fri
(3) $-1 \le u(t) \le 1$.

a) Opstil de betingelser maksimumsprincippet giver.

b) Løs ligningerne fra spørgsmål a) og begrund, at den fundne løsning er optimal.

Opgave 22. (sommer 1998, opgave 1)
Find den løsning $x(t)$ til differentialligningen

$$\dot{x} = x^2 - 4\,,$$

som opfylder $x(0) = 0$.

Opgave 23. (sommer 1998, opgave 2)
For $x \in [\frac{1}{4}, 1]$ defineres $f(x)$ ved

$$f(x) = \int_1^{x^{-\frac{1}{2}}} \frac{8t^2 + 2t^4}{(1 + xt^2)^2}\,dt\,.$$

(a) Find et udtryk for $f'(x)$.
(b) Beregn $\int_{\frac{1}{4}}^1 f(x)\,dx$. (Vink: Ombyt integrationsordenen).

Opgave 24. (sommer 1998, opgave 3)
Der er givet følgende system af 1. ordens differentialligninger:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + y - 2t - 1\,, \\ \dot{y} &= -x \qquad\quad + 4e^t\,. \end{aligned}$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning.
(b) Fastlæg den løsning som opfylder $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.

Opgave 25. (sommer 1998, opgave 4)
Der er givet et autonomt system i planen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 25x - x^3 - xy^2\\ \dot{y} &= 7y - xy - y^2\,.\end{aligned}$$

(a) Find systemets ligevægtspunkter og bestem stabilitetsforholdene for disse.

(b) Lad K betegne den lukkede kvartcirkel, der er bestemt ved

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x^2 + y^2 \leq 64\}$$

og lad $(x(t), y(t))$ være en løsning defineret på et åbent interval I. Vis, at hvis det for $t \in I$ gælder at $(x(t), y(t)) \in K$, så vil det for alle $s \in I$ med $s > t$ gælde, at $(x(s), y(s)) \in K$.

Opgave 26. (sommer 1998, opgave 5)
Der er givet differensligningen;

$$4x_{t+2} + x_t = 5t^2 + 16t + 11\,, \quad t \in \mathbb{N}\,.$$

Find den løsning $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ som opfylder

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = 2\,.$$

Opgave 27. (sommer 1998, opgave 6)
Der er givet et optimalt kontrolproblem;

$$\max \int_0^1 (ex - u^2)\,dt\,,\ x' = 2u - x\,,\ 0 \leq u \leq 1\,, \quad x(0) = 0\,, \quad x(1) \text{ fri},$$

(e er en konstant, grundtallet for den naturlige logaritme).

(a) Opstil de ligninger som en optimal løsning med tilhørende adjungeret funktion $p(t)$ må opfylde.

(b) Løs ligningerne og begrund, at den fundne løsning er optimal.

Opgave 28. (august 1998, opgave 1)
Bestem den løsning til differentialligningen

$$\dot{x} + \frac{2}{t^3}x = \frac{4}{t^3}\,, \qquad t > 0$$

som opfylder $x(1) = 0$.

Opgave 29. (august 1998, opgave 2)
Der er givet et system af 1. ordens differentialligninger

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 5x_1 - 3x_2 - 5\sin t + 4\cos t\\ \dot{x}_2 &= 2x_1 \qquad\quad - 3\sin t \quad .\end{aligned}$$

i) Bestem den fuldstændige løsning.

ii) Find den partikulære løsning som opfylder $x_1(0) = -2$, $x_2(0) = 0$.

Opgave 30. (august 1998, opgave 3)
Der er givet et autonomt system i planen ved

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy - x^3 - \frac{3}{4}x \\ \dot{y} &= 4x^2y^2 - y^4.\end{aligned}$$

i) Bestem ligevægtspunkterne i 1. kvadrant og redegør for deres stabilitetsforhold.

ii) Lav et fasediagram i 1. kvadrant. Der ønskes ikke en detaljeret redegørelse, men blot en pilmarkering af fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$.

iii) Begrund, at en bane $(x(t), y(t))$ defineret på et åbent interval I og som til et tidspunkt s i I opfylder $x(s) > 0$, $\dot{x}(s) > 0$, $y(s) > 0$, $\dot{y}(s) > 0$ vil opfylde $x(t) > 0$, $\dot{x}(t) > 0$, $y(t) > 0$, $\dot{y}(t) > 0$ for alle $t > s$ i I.

Opgave 31. (august 1998, opgave 4)
Der er givet en differensligning

$$x_{t+2} - 4x_{t+1} - 5x_t = 6(-1)^t - 8t^2 - 4t\,, \quad t \in \mathbb{N}\,.$$

i) Bestem den fuldstændige løsning til ligningen.

ii) Fastlæg den løsning for hvilken $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Opgave 32. (august 1998, opgave 5)
Der er givet et variationsproblem

maksimer $\int_0^1 (-4x^2 - \dot{x}^2 - 16)\,dt$

$x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Find den eneste mulige løsning og begrund, at den er optimal.

Opgave 33. (august 1998, opgave 6)
Der er givet et optimalt kontrolproblem

$$\max\left\{2x(1) + \int_0^1 (-2x^2 - u)\,dt\right\}.$$

$x(0) = 1$, $\dot{x} = u$, $0 \le u \le 1$.

i) Opstil betingelserne som en optimal løsning må tilfredsstille.

ii) Vis, at $x(t) \ge 1$ for alle $t \in [0, 1]$.

iii) Vis, at p er strengt voksende med $p(0) < 1$ og $p(1) > 1$.

iv) Find den eneste mulige løsning og begrund, at den er optimal.

Ved besvarelsen af spørgsmålene er det tilladt at benytte resultaterne fra tidligere spørgs-mål selvom disse ikke er besvaret.

Opgave 34. (sommer 1999, opgave 1)
Find den løsning til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - x,$$

der antager værdien 2 for $t = 0$.

Opgave 35. (sommer 1999, opgave 2)
Der er givet et autonomt differentialligningssystem i $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x+y)^2 - 1, \\ \dot{y} &= (x-y)^2 - 1. \end{aligned}$$

(a) Vis, at der er fire ligevægtsløsninger, i punkterne $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,0)$ og $D = (0,-1)$, og bestem deres stabilitetsforhold.
(b) Marker på en tegning fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de forskellige områder, planen inddeles i af nulpunktsmængderne for $f(x,y) = (x+y)^2 - 1$, $g(x,y) = (x-y)^2 - 1$.
(c) Lad $(x(t), y(t))$ være en løsning defineret på et interval I. Vis, at hvis $[t_0, t_1] \subseteq I$, og $(x(t), y(t))$ ligger i det indre af trekanten ABD for $t \in [t_0, t_1[$, mens $(x(t_1), y(t_1))$ ligger på randen af trekanten, så må $(x(t_1), y(t_1))$ tilhøre siden BD.

Opgave 36. (sommer 1999, opgave 3)
Man betragter differensligningen

$$x_{t+2} - ax_{t+1} + \tfrac{1}{4}(a-1)x_t = 2^t,$$

hvor a er et givet reelt tal.

(a) Opskriv den karakteristiske ligning.
(b) Beregn, for hvilke værdier af a, problemet er globalt asymptotisk stabilt.
(c) Find den generelle løsning i tilfældet $a = 0$, og undersøg opførselen for $t \to \infty$.

Opgave 37. (sommer 1999, opgave 4)
Man betragter variationsproblemet

$$\text{Minimér} \int_0^1 (x^2 + 2t^2 x + \dot{x}^2)\, dt, \text{ når } x(0) = 1,\ x(1) \geq 1.$$

(a) Opstil de nødvendige betingelser for at en funktion $x(t)$ er løsning.
(b) Find den eneste mulige løsningskandidat.
(c) Begrund, at denne faktisk løser problemet.

Opgave 38. (sommer 1999, opgave 5)
Man betragter et optimalt kontrolproblem

$$\begin{aligned} \text{Maksimér } \int_0^2 (1-u)(x+t^2)\,dt, \text{ under betingelserne} \\ \dot{x} = u(x+t^2), \\ x(0) = 1,\ x(2) \text{ er fri}, \\ u \in [0,1]. \end{aligned}$$

(a) Vis, at et tilladt par $(x(t), u(t))$ må opfylde $x(t) \geq 1$ for $t \in [0,2]$.
(b) Opstil de nødvendige betingelser, der fås fra maksimumsprincippet, for at et tilladt par er optimalt.
(c) Vis, at $\dot{p}(t) < 0$.
(d) Find den eneste mulige løsningskandidat. (Vink: Begynd med at bestemme $p(t)$ i omegnen af $t = 2$.)
(e) Vis, at denne løsningskandidat virkelig løser problemet.

Ved besvarelsen af spørgsmålene er det tilladt at benytte resultaterne fra andre af opgavens spørgsmål, selvom disse ikke er besvaret.

Opgave 39. (august 1999, opgave 1)
Man betragter differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = x(\ln x + (\ln x)^2)$$

for funktioner $x(t)$ med positive værdier.

(a) Find den løsning (defineret på en omegn af $t = 0$), som antager værdien e for $t = 0$.
(b) Bestem løsningens størst mulige definitionsinterval.

(Vink: Man kan løse ligningen ved separation, og man kan anvende substitutionen $u = \ln x$.)

Opgave 40. (august 1999, opgave 2)
Der er givet et autonomt differentialligningssystem i $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + y^2 - 4, \\ \dot{y} &= (x-1)y. \end{aligned}$$

(a) Bestem ligevægtspunkterne og deres stabilitetsforhold.
(b) Marker på en tegning fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de forskellige områder, planen inddeles i af nulpunktsmængderne for $f(x,y) = x^2+y^2-4$, $g(x,y) = (x-1)y$.
(c) Idet det lukkede område M defineres ved

$$M = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 4 \,\},$$

skal man vise, at når $(x(t), y(t))$ er en løsning defineret på et interval $[t_0, t_1]$, og $(x(t_0), y(t_0)) \in M$, så er også $(x(t_1), y(t_1)) \in M$.

Opgave 41. (august 1999, opgave 3)
Man betragter det todimensionale differensligningssystem

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \tfrac{1}{3}x_1(t) + \tfrac{1}{3}x_2(t) + 5, \\ x_2(t+1) &= \tfrac{1}{3}x_1(t) + \tfrac{1}{3}x_2(t) + 7, \end{aligned}$$

som også kan skrives som

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis, at systemet er stabilt.
(b) Find $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$, hvor $\mathbf{x}(t)$ er en vilkårlig løsning.

Opgave 42. (august 1999, opgave 4)
Løs følgende variationsproblem:

$$\text{Minimér} \int_0^1 e^{4x+2\dot{x}}\, dt, \text{ når } x(0) = 1,\ x(1) \geq 1.$$

Opgave 43. (august 1999, opgave 5)
Man betragter et optimalt kontrolproblem

$$\begin{aligned} \text{Maksimér} \int_0^{10} (1-u^2)x\, dt \text{ under bibetingelserne} \\ \dot{x} = u^2 x, \\ x(0) = 1,\ x(10) \text{ er fri}, \\ u \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

(a) Vis, at et tilladt par $(x(t), u(t))$ må opfylde $x(t) \geq 1$ for $t \in [0, 10]$.
(b) Opstil de nødvendige betingelser, der fås fra maksimumsprincippet, for at et tilladt par er optimalt.
(c) Vis, at $\dot{p}(t) < 0$.
(d) Find en løsningskandidat.
(e) Vis, at denne løsningskandidat virkelig løser problemet.

Ved besvarelsen af spørgsmålene er det tilladt at benytte resultaterne fra andre af opgavens spørgsmål selvom disse ikke er besvaret.

Opgave 44. (Juni 2000, opgave 1)
Betragt *differentialligningen*

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - 2x = 5e^t\,.$$

(a) Opskriv og løs den tilsvarende *karakteristiske ligning* $(+)$.

(b) Opskriv den *homogene ligning* $(\circ)$ svarende til $(*)$, og bestem dens fuldstændige løsning. Afgør, om ligningen $(\circ)$ er *stabil*.

(c) Bestem en løsning til $(*)$.

(d) Bestem løsningen $x(t)$ til $(*)$ med $x(0) = 1$, $\frac{dx}{dt}(0) = 2$ og $\frac{d^2x}{dt^2}(0) = 3$.

Opgave 45. (Juni 2000, opgave 2)
Betragt *differentialligningssystemet*

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} -x^2 + y \\ \dot{y} &= g(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} -y + 1 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} .$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x,y)$ og $g(x,y)$.

(b) Bestem samtlige *ligevægtspunkter* (= ligevægtstilstande) for $(*)$.

(c) Bestem $\underline{\underline{J}}(x,y)$. Afgør for hvert ligevægtspunkt, om det er *lokalt asymptotisk stabilt*, eller om det er *ustabilt.*

(d) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i. Kommentér resultatet i (c) på denne baggrund.

Opgave 46. (Juni 2000, opgave 3)
Betragt *differensligningen*

$$(*) \qquad x_{t+2} - 10x_{t+1} + 25x_t = 8 \cdot 3^t + 4^t .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den *homogene ligning* $(\circ)$ svarende til $(*)$.

(b) Bestem den fuldstændige løsning til $(*)$.

(c) Bestem løsningen x_t til $(*)$ med $x_1 = 10$ og $x_2 = 9$.

Opgave 47. (Juni 2000, opgave 4)
Betragt *variationsproblemet*

$$\underline{\underline{\text{Min}}} \int_0^1 \big(x(t) + \dot{x}(t)\big)^2 dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = 0$ og enhver af følgende *slutværdibetingelser:* $x(1) = 1$, $x(1)$ *fri* samt $x(1) \geq 1$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* $\underline{\underline{\text{EL}}}$ og dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $x(0) = 0$.

(b) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Min}}}$, når slutværdibetingelsen er $x(1) = 1$.

(c) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Min}}}$, når slutværdibetingelsen er $x(1)$ *fri.*

(d) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Min}}}$, når slutværdibetingelsen er $x(1) \geq 1$.

Opgave 48. (Juni 2000, opgave 5)
Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\underline{\underline{\text{Max}}} \int_0^3 \big(t^2 + 2(t-2)x(t) - u(t)^2\big)dt$$

når $\dot{x} = u$, $x(0) = 1$, $x(3)$ fri og $u \in [\,0,1\,]$.

(a) Antag, at (x,u) er et tilladt par, der løser $\underline{\underline{\text{Max}}}$. Opstil *maksimumprincippets* nødvendige betingelser. Man kan uden yderligere kommentarer antage, at det drejer sig om en sædvanlig Hamiltonfunktion (dvs. med $p_0 = 1$).

(b) Bestem en *adjungeret funktion* $p\colon [\,0,3\,] \to \mathbb{R}$, der opfylder betingelserne, og skitsér dens graf.

(c) Bestem en *kontrolfunktion* $u\colon [\,0,3\,] \to \mathbb{R}$, der opfylder betingelserne.

(d) Bestem en *tilstandsfunktion* $x\colon [\,0,3\,] \to \mathbb{R}$, der opfylder betingelserne.

(e) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Max}}}$.

Opgave 49. (August 2000, opgave 1)
(a) Løs *differentialligningen*

$$(\circ) \qquad \dot{x} = -t^{-2}x \quad , \quad t \neq 0\,.$$

(b) Bestem én løsning til differentialligningen

$$(*) \qquad \dot{x} + t^{-2}x = 2t + 1 \quad , \quad t \neq 0\,.$$

(c) Bestem løsningen x til $(*)$ med $x(1) = 2$.

Opgave 50. (August 2000, opgave 2)
Betragt *differentialligningssystemet*

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 - 25 \\ \dot{y} &= g(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x^3 + 27 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x,y)$ og $g(x,y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (= ligevægtstilstande) for $(*)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i.

(c) Skitsér en mulig løsningsbane (= integralkurve), der går fra punktet $(-1,-2)$ til punktet $(-3,-4)$ og én fra $(-4,-5)$ til $(-3,-4)$. Beskriv for ethvert ligevægtspunkt hvilken konklusion vedrørende stabilitet, man kan drage på baggrund af faseplansanalysen i (b).

(d) Bestem $\underline{\underline{J}}(x,y)$. Afgør for hvert ligevægtspunkt, om det er *lokalt asymptotisk stabilt*, eller om det er *ustabilt.*

Opgave 51. (August 2000, opgave 3)
Betragt *differensligningen*

$$(*) \qquad x_{t+2} - x_{t+1} + \frac{1}{2}x_t = 7 \quad , \quad t = 0, 1, \ldots .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den *homogene ligning* $(\circ)$ svarende til $(*)$.

(b) Bestem løsningen x_t til $(\circ)$ med $x_0 = 1$ og $x_1 = 2$, og udregn x_2.

(c) Bestem den fuldstændige løsning til $(*)$.

(d) Afgør, om ligningen $(*)$ er stabil.

Opgave 52. (August 2000, opgave 4)
Betragt *variationsproblemet*

$$\underline{\underline{\text{Min}}} \int_0^3 \big(6tx(t) + t^2\dot{x}(t) + \dot{x}(t)^2\big)dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = 1$ og enhver af følgende *slutværdibetingelser:* $x(3) = 1$, $x(3)$ *fri* samt $x(3) \geq 1$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* $\underline{\underline{\text{EL}}}$ og dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $x(0) = 1$.

(b) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Min}}}$, når slutværdibetingelsen er $x(3) = 1$.

(c) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Min}}}$, når slutværdibetingelsen er $x(3)$ *fri.*

(d) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Min}}}$, når slutværdibetingelsen er $x(3) \geq 1$.

Opgave 53. (August 2000, opgave 5)
Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\underline{\underline{\text{Max}}} \int_0^1 \big((t-1)x(t) - u(t)^2\big)dt$$

når $\dot{x} = u - x$, $x(0) = 1$, $x(1)$ fri og $u \in [\,0, 1\,]$.

(a) Antag, at (x, u) er et tilladt par, der løser $\underline{\underline{\text{Max}}}$. Opstil *maksimumprincippets* nødvendige betingelser. Man kan uden yderligere kommentarer antage, at det drejer sig om en sædvanlig Hamiltonfunktion (dvs. med $p_0 = 1$).

(b) Bestem en *adjungeret funktion* $p\colon [\,0, 1\,] \to \mathbb{R}$, der opfylder betingelserne.

(c) Begrund, at funktionen p er strengt voksende (f.eks. ved også at betragte dens anden afledede).

(d) Bestem en *kontrolfunktion* $u\colon [\,0, 1\,] \to \mathbb{R}$, og en *tilstandsfunktion* $x\colon [\,0, 1\,] \to \mathbb{R}$, der opfylder betingelserne.

(e) Løs problemet $\underline{\underline{\text{Max}}}$.

Opgave 54. (Juni 2001, opgave 1)

(a) Løs *differentialligningen*

$$(*) \qquad \dot{x} = t^{-1}x(x+1) \quad , \quad t \neq 0 .$$

[Vink: Bestem blandt andet $a, b \in \mathbb{R}$, så $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.]

(b) Bestem løsningen x til $(*)$ med $x(1) = -1$ samt løsningen x til $(*)$ med $x(1) = -2$.

Opgave 55. (Juni 2001, opgave 2)
Betragt *differentialligningssystemet*

$$(**) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - y - 7 \\ \dot{y} &= g(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 - 9 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} .$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x,y)$ og $g(x,y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (dvs. ligevægtstilstande) for $(**)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i, og godtgør hvilke punkter, der er ustabile.

(c) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x,y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$.

(d) Afgør – gerne med henvisning til faseplananalysen – for ethvert ligevægtspunkt, om det er lokalt asymptotisk stabilt. Bestem mindst et lokalt saddelpunkt.

Opgave 56. (Juni 2001, opgave 3)
Betragt *differensligningen*

$$\text{(IL)} \qquad x_{t+2} - 2x_{t+1} + 2x_t = 1 \quad , \quad t = 0, 1, \ldots .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den *homogene ligning* (HL) svarende til (IL).

(b) Bestem den fuldstændige løsning til (IL).

(c) Bestem løsningen til (IL) med $x_0 = 1$ og $x_1 = 2$, og udregn værdierne x_2, x_3 og x_4.

(d) Afgør, om ligningen (IL) er stabil.

Opgave 57. (Juni 2001, opgave 4)
Betragt *variationsproblemet*

$$\text{(Min)} \qquad \int_0^1 \big(4x(t)^2 - 8t^2 x(t) + \dot{x}(t)^2\big)\,dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = \frac{1}{2}$ og enhver af følgende *slutværdibetingelser:* $x(1) = \frac{3}{2}$, $x(1)$ *fri* eller $x(1) \geq \frac{3}{2}$,

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) og dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $x(0) = \frac{1}{2}$.

(b) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1) = \frac{3}{2}$.

(c) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1)$ *fri.*

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1) \geq \frac{3}{2}$.

Opgave 58. (Juni 2001, opgave 5)
Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\text{(Max)} \qquad \int_0^2 \big(6u(t) - x(t)^4\big)dt$$

når $\dot{x} = u$, $x(0) = 1$, $x(2)$ fri og $u \in [\,0,1\,]$.

Antag, at (x, u) er et tilladt par, der løser (Max).

(a) Opstil *maksimumprincippets* nødvendige betingelser. Man kan uden yderligere kommentarer antage, at det drejer sig om en sædvanlig Hamiltonfunktion (dvs. med $p_0 = 1$).

(b) Begrund, at x er voksende. Begrund, at $\dot{p}(t) \geq 4$ for alle t, når $p\colon [\,0,2\,] \to \mathbb{R}$ er den *adjungerede funktion.* Begrund, at $p(0) \leq -8$. [Vink: Til det sidste kan benyttes Nyttig Hjælpesætning (a) U 11 eller • 64.]

(c) Begrund, at der findes netop ét $a \in]\,0,2\,[$ med $p(a) = -6$.

(d) Bestem $u(t)$ for $t < a$ og for $t > a$. Bestem $x(t)$ for $t \leq a$ og for $t \geq a$. Bestem $\dot{p}(t)$ for $t \leq a$ og for $t \geq a$.

(e) Bestem $p(t)$ for $t \geq a$. Bestem a. Bestem $p(t)$.

(f) Skitsér graferne for x, u og p. Løs problemet (Max).

Opgave 59. (Juli 2001, opgave 1)

(a) Løs den *homogene differentialligning* (HL) $\dot{x} - 3t^{-1}x = 0\,,\quad t > 0$.

(b) Løs den *inhomogene differentialligning* (IL) $\dot{x} - 3t^{-1}x = 3t^2\,,\quad t > 0$.

(c) Bestem løsningen x til *Bernoulli-ligningen* $\dot{x} = t^{-1}x + t^2x^{-2}$, $t > 0$ med $x(1) = 1$. [Benyt gerne resultatet fra (b).]

Opgave 60. (Juli 2001, opgave 2)
Betragt *differentialligningssystemet*

$$(**) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - xy \\ \dot{y} &= g(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x - y^3 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x,y)$ og $g(x,y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (dvs. ligevægtstilstande) for $(**)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i, og godtgør hvilke punkter, der er ustabile.

(c) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x,y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x,y)\big)$. Kan man udfra dette og Liapunovs sætninger (sml. side 265–266 eller • **32** og **34**) konkludere, at der er et lokalt asymptotisk stabilt ligevægtspunkt? Liapunov–funktioner ønskes **ikke** indraget i undersøgelserne!

(d) Bestem et lokalt sadelpunkt.

Opgave 61. (Juli 2001, opgave 3)
Betragt *differensligningen*

$$(*) \qquad 2x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t = 0 \quad , \quad t = 0, 1, \ldots .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til $(*)$.

(b) Bestem løsningen til $(*)$ med $x_0 = 1$ og $x_1 = 1$, og udregn værdierne x_2, x_3 og x_4.

(c) Afgør, om ligningen $(*)$ er stabil.

Opgave 62. (Juli 2001, opgave 4)
I denne opgave er $T \stackrel{\text{def}}{=} \ln 2$. Betragt *variationsproblemet*

$$\text{(Min)} \qquad \int_0^T \big(x(t)^2 + 2t^2 x(t) + \dot{x}(t)^2\big)dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = -2$ og enhver af følgende *slutværdibetingelser:* $x(T) = -T^2$, $x(T)$ *fri* eller $x(T) \geq -T^2$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) og dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $x(0) = -2$.

(b) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(T) = -T^2$.

(c) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(T)$ *fri.*

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(T) \geq -T^2$.

Opgave 63. (Juli 2001, opgave 5)
Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\text{(Max)} \qquad \int_0^2 \big(-2tx(t) - u(t)^2\big)dt$$

når $\dot{x} = 2u$, $x(0) = 1$, $x(2)$ fri og $u \in [-1, 1]$.

(a) Begrund, at Hamiltonfunktionen er konkav. Man kan uden yderligere kommentarer antage, at det drejer sig om en sædvanlig Hamiltonfunktion (dvs. med $p_0 = 1$). Antag, at (x, u) er et tilladt par, der løser (Max).

(b) Opstil *maksimumprincippets* nødvendige betingelser.

(c) Bestem den adjungerede funktion $p\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$.

(d) Bestem kontrolfunktionen u.

(e) Bestem funktionen x.

(f) Skitsér graferne for x, u og p. Begrund, at de løser problemet (Max).

Opgave 64. (Maj-juni 2002, opgave 1)
Betragt følgende differentialligning:

$$\dot{x} = \frac{(x-1)^3}{t^3} \qquad \text{for } t > 0.$$

(a) Bestem den generelle løsning til ligningen.

(b) Bestem den løsning $x(t)$ til ligningen, som opfylder $x(1) = \frac{1}{2}$.

Opgave 65. (Maj-juni 2002, opgave 2)
Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y), \\ \dot{y} &= g(x,y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x,y) &= 3x^2 + y^2 - 4, \\ g(x,y) &= 3x - y - 2. \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning kurven, hvor $f(x,y) = 0$, og kurven, hvor $g(x,y) = 0$. Angiv med pilesymboler ($\llcorner\!\!\rightarrow$, $\leftarrow\!\!\lrcorner$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af de to kurver.

(c) Skitser banen for en kurve, der begynder i $(1,0)$ og hvis forløb er i overensstemmelse med fortegnsbestemmelserne i (b).

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgave 66. (Maj-juni 2002, opgave 3)
Betragt følgende inhomogene differensligning:

$$(*) \qquad x_{t+2} - \tfrac{3}{2}x_{t+1} + \tfrac{1}{2}x_t = \left(\tfrac{1}{2}\right)^t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Bestem den generelle løsning til den homogene differensligning, der svarer til (*).

(b) Bestem den løsning x_t til (*), som opfylder $x_0 = 1$, $x_1 = -1$.

(c) Afgør, om differensligningen (*) er stabil.

(d) Vis, at enhver løsning x_t til (*) er en konvergent følge.

Opgave 67. (Maj-juni 2002, opgave 4)
Betragt følgende variationsproblem:

$$(\min) \int_1^2 (t\dot{x}^2 + t^{-1}x^2)\, dt, \quad \text{for } x(1) = 1, \text{ og } x(2) \text{ fri.}$$

(a) Opstil Eulerligningen og transversalitetsbetingelsen svarende til problemet.

(b) Angiv den fuldstændige løsning til Eulerligningen. [Vink: vis, at funktionerne $x(t) = t$ og $x(t) = t^{-1}$ løser ligningen.]

(c) Bestem den funktion $x = x(t)$, som løser Eulerligningen, begyndelsesbetingelsen og transversalitetsbetingelsen.

(d) Gør rede for, at funktionen fra (c) løser variationsproblemet.

Opgave 68. (Maj-juni 2002, opgave 5)
Betragt følgende problem om optimal kontrol:

$$(\max) \quad \int_0^{\ln 2} (xu - x^2 - u^2)\, dt \quad \text{for } \dot{x} = -x + u,\ x(0) = 1,\ x(\ln 2) \text{ fri},$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer} \int_0^{\ln 2} \big(x(t)u(t) - x(t)^2 - u(t)^2\big)\, dt \quad \text{for } \dot{x}(t) = -x(t) + u(t),\ x(0) = 1,\ x(\ln 2) \text{ fri}.$$

Der er altså ingen indskrænkninger på kontrolfunktionens værdier $u(t)$.

(a) Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet. Opstil de ligninger, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).

(b) Bestem de funktioner x, p og u, som opfylder ligningerne i (a) og bibetingelserne.

(c) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (b) er den optimale kontrol.

Opgave 69. (juli-august 2002, opgave 1)
Betragt følgende differentialligning:

$$\dot{x} = \frac{x(x+1)}{t(t+1)} \qquad \text{for } t > 0.$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til ligningen.

(b) Bestem den løsning $x(t)$ til ligningen, som opfylder $x(1) = \frac{1}{3}$.

Opgave 70. (juli-august 2002, opgave 2)
Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= (x - 4y)(x + 4y), \\ g(x, y) &= 17 - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning kurven, hvor $f(x, y) = 0$, og kurven, hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler (↳, ↲, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af de to kurver.

(c) Skitser banen for en kurve, der begynder i $(4, 2)$ og hvis forløb er i overensstemmelse med fortegnsbestemmelserne i (b).

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgave 71. (juli-august 2002, opgave 3)
Betragt følgende inhomogene differensligning:

$$(*) \qquad x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = 1, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Bestem den generelle løsning til den homogene differensligning, der svarer til (*).
(b) Betragt den løsning x_t til den inhomogene ligning (*), som opfylder $x_0 = 1$, $x_1 = -1$. Angiv elementet x_{1000} i følgen.
(c) Afgør, om differensligningen (*) er stabil.
(d) Vis, at enhver løsning x_t til (*) er en begrænset følge.

Opgave 72. (juli-august 2002, opgave 4)
Betragt følgende variationsproblem:

$$(\min) \int_0^1 (tx - t\dot{x} + \dot{x}^2)\, dt, \quad \text{for } x(0) = 0 \text{ og } x(1) \geqslant 2.$$

(a) Opstil Eulerligningen og transversalitetsbetingelsen svarende til problemet.
(b) Angiv den fuldstændige løsning til Eulerligningen.
(c) Bestem den funktion $x = x(t)$, som løser Eulerligningen, randbetingelserne og transversalitetsbetingelsen.
(d) Gør rede for, at funktionen fra (c) løser variationsproblemet.

Opgave 73. (juli-august 2002, opgave 5)
Betragt følgende problem om optimal kontrol, med skrotværdifunktion:

$$(\max) \quad \frac{-x(2)^2}{4} + \int_0^2 (x + u)\, dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1,\ \dot{x} = -u + 2t,\ x(0) = 1,$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer } \frac{-x(2)^2}{4} + \int_0^2 \big(x(t) + u(t)\big)\, dt \quad \text{for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1,\ \dot{x}(t) = -u(t) + 2t,\ x(0) = 1.$$

(a) Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet. Opstil de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).
(b) Bestem de funktioner x, u og p, som opfylder betingelserne i (a) og bibetingelserne.
(c) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (b) er den optimale kontrol.

Opgave 74. (maj-juni 2003, opgave 1)
Betragt følgende differentialligning:

$$\ddot{x} + x = 2\cos t + \cos(2t).$$

(a) Bestem den generelle løsning til ligningen.
(b) Bestem den løsning $x(t)$ til ligningen, som opfylder $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Opgave 75. (maj-juni 2003, opgave 2)
Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y), \\ \dot{y} &= g(x,y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x,y) &= -x-y-1, \\ g(x,y) &= x^2-2y-5. \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning kurven, hvor $f(x,y)=0$, og kurven, hvor $g(x,y)=0$. Angiv med pilesymboler ($\llcorner\!\!\rightarrow$, $\leftarrow\!\!\lrcorner$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af de to kurver.

(c) Skitser banen for en kurve, der begynder i $(3,0)$ og hvis forløb er i overensstemmelse med fortegnsbestemmelserne i (b).

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgave 76. (maj-juni 2003, opgave 3)
Betragt følgende differensligningssystem:

$$(*) \qquad \begin{aligned} x_{t+1} &= -x_t - \tfrac{5}{3}y_t + 2, \\ y_{t+1} &= \tfrac{4}{3}x_t + 2y_t - \tfrac{4}{3}, \end{aligned} \qquad \text{for } t = 0,1,2,\ldots.$$

(a) Bestem de konstante løsninger til systemet.

(b) Afgør om systemet er stabilt.

(c) Antag, at følgerne x_t og y_t løser systemet (*). Begrund, at følgerne er konvergente, og bestem deres grænseværdier.

(d) Bestem den fuldstændige løsning til systemet (*).

Opgave 77. (maj-juni 2003, opgave 4)
Betragt følgende variationsproblem:

$$(\min) \int_0^2 (2tx\dot{x} + x^2 + 4\dot{x}^2)\,dt, \quad \text{for } x(0)=1, \text{ og } x(2) \text{ fri.}$$

(a) Opstil Eulerligningen og transversalitetsbetingelsen svarende til problemet.

(b) Angiv den fuldstændige løsning til Eulerligningen.

(c) Bestem den funktion $x = x(t)$, som løser Eulerligningen, begyndelsesbetingelsen og transversalitetsbetingelsen.

(d) Gør rede for, at funktionen fra (c) løser variationsproblemet.

Opgave 78. (maj-juni 2003, opgave 5)
Betragt følgende problem om optimal kontrol, med skrotværdifunktion:

$$(\max) \quad 2x(\ln 3) + \int_0^{\ln 3} (x - e^t u)dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1,\ \dot{x} = -x + u,\ x(0) = 0,$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer } 2x(\ln 3) + \int_0^{\ln 3} (x(t) - e^t u(t))\, dt \text{ for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1,\ \dot{x}(t) = -x(t) + u(t),\ x(0) = 0.$$

(a) Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet. Opstil de ligninger, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).
(b) Bestem de funktioner x, p og u, som opfylder ligningerne i (a) og bibetingelserne.
(c) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (b) er den optimale kontrol.

Opgave 79. (juli-august 2003, opgave 1)
Bestem den fuldstændige løsning til hver af følgende to differentialligninger:
(a) $(2 + \sin t)\dot{x} = x^2 \cos t.$
(b) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 1.$

Opgave 80. (juli-august 2003, opgave 2)
Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 - 1, \\ g(x, y) &= 2x + y^2 - 1. \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.
(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).
(b) Skitser på en tegning kurven, hvor $f(x, y) = 0$, og kurven, hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler ($\uparrow\!\!\rightarrow$, $\leftarrow\!\!\downarrow$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af de to kurver.
(c) Skitser banen for en kurve, der begynder i $(0, 0)$ og hvis forløb er i overensstemmelse med fortegnsbestemmelserne i (b).
(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgave 81. (juli-august 2003, opgave 3)
Betragt følgende differensligning:

$$(*) \qquad x_{t+2} - x_t = 2 + 3^t, \quad \text{for } t = 0, 1, 2, \ldots.$$

(a) Bestem den generelle løsning til differensligningen.
(b) Bestem den løsning x_t, som opfylder, at $x_0 = 0$, $x_1 = 0$.

Opgave 82. (juli-august 2003, opgave 4)
Betragt følgende variationsproblem:

$$(\min) \int_0^1 e^{\dot{x}-x}\, dt, \quad \text{for } x(0) = 0 \text{ og } x(1) = 1.$$

(a) Opstil Eulerligningen svarende til problemet.
(b) Angiv den fuldstændige løsning til Eulerligningen.
(c) Bestem den funktion $x = x(t)$, som løser Eulerligningen og bibetingelserne.
(d) Gør rede for, at funktionen fra (c) løser variationsproblemet.

Opgave 83. (juli-august 2003, opgave 5)
Betragt følgende problem om optimal kontrol:

$$(\max) \quad \int_0^2 \big((2-t)e^t u - x\big)dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1,\ \dot{x} = u^2,\ x(0) = 0,\ \text{og } x(2) \text{ fri},$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer} \int_0^2 \big((2-t)e^t u(t) - x(t)\big)dt \quad \text{for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1,\ \dot{x}(t) = u(t)^2,\ x(0) = 0,\ \text{og } x(2) \text{ fri}.$$

(a) Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet. Opstil de ligninger, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).
(b) Bestem dernæst de funktioner x, p og u, som opfylder ligningerne i (a) og bibetingelserne. Vis specielt, at $p(t) \leqslant 0$ for $0 \leqslant t \leqslant 2$.
(c) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (b) er den optimale kontrol.