DOK-facitliste

Listens numre refererer til samlingen af supplerede DOK-opgaver (de gamle eksamensopgaver). På listen står næsten kun facitter, og *ikke* tilstrækkelige svar på opgaverne. [Korrigeret 21/4-2009, men der kan stadig være fejl — specielt i de senere opgaver!]

7(i) $ae^t \cos t + be^t \sin t, \quad a, b \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.?

7(ii) $ae^t \cos t + be^t \sin t + \frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{5}{2}, \quad a, b \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.?

7(iii) $-\frac{5}{2}e^t \cos t - \frac{1}{2}e^t \sin t + \frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{5}{2} \quad a, b \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.?

10 $x_1(t) = ae^t + be^{5t}, \quad x_2(t) = ce^{2t}, \quad x_3(t) = -ae^t + 3be^{5t}, \ a, b, c \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R}$.?

11(1) Basis for de homogene: e^{-5t} og e^{-2t}, idet 10 i ligningen rettes til $10x$.

11(2) $C_1e^{-5t} + C_2e^{-2t} - e^{-3t} + t^2 - \frac{7}{5}t + \frac{39}{50}$.

11(3) Da de to rødder -5 og -2 er negative [S, Sætning 5.6].

13(2) $x(t) = e^t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{5-e^2}{2}t - 1$?

14 $x_t = a3^t + bt3^t + t^2 + 2t + \frac{11}{4} \quad a, b \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{N}$.?

15(1) $x_1(t) = be^{2t} - ae^t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}, \quad x_2(t) = ae^t - t - 1, \ a, b \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.?

15(2) $x_1(t) = \frac{7}{4}e^{2t} - e^t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}, \quad x_2(t) = e^t - t - 1, \quad t \in \mathbb{R}$.?

16 $x(t) = (\ln(e + t^2))^{-\frac{1}{2}}$.?

17 a) $(x_1(t), x_2(t)) = (t^2 + e^{-2t} \cos 3t \ , \ t^2 + e^{-2t} \cos 3t - 3e^{-2t} \sin 3t)$.

17 b) Banen har linien $x_1 = x_2$ som assymptote.

18 a) $(2, 2)$ et lokalt ass.stab.ligev. pkt.?

18 b) I $(1, 1)$ er hastighedsvektoren $(3, 3)$. I $(3, 1)$ er hastighedsvektoren $(-3, 1)$. I $(3, 3)$ er hastighedsvektoren $(-9, -9)$. I $(1, 3)$ er hastighedsvektoren $(1, -3)$.?

18 c) X-aksen er sammensat af baner $y(t) = 0$ og $x(t)$ en løsning til $x' = 6x - 2x^2$. Y-aksen er sammensat af baner $x(t) = 0$, $y(t)$ en løsning til $y' = 6y - 2y^2$. Da baner aldrig krydser hinanden, kan en bane ikke slippe ud af 1. kvadrant, hvis den starter der.?

19 a) $x_t = -4(\frac{1}{2})^t - 4(-\frac{1}{2})^t + t^2$.

19 b) stabil.

20 a) $\partial F/\partial x = 12t$, $\partial F/\partial u = -2u - 2$. Eulerligning: $12t = \frac{d}{dt}(-2\dot{x} - 2) = -2\ddot{x}$ med løsning $x = -t^3 + Ct + D$; randbetingelse $x(0) = 0$ og $-2\dot{x}(1) - 2 = 0$ giver $D = 0$ og $C = 2$.

20 b) F er konkav i (x, u), jfr . . . . Derfor!, jfr . . . .

21 a) $H = x - u^2 + 2pu$. (I) $\dot{p} = -1$. (II) $u = p$ hvis $-1 < p < 1$, $u = 1$ hvis $p > 1$, $u = -1$ hvis $p < 1$. (III) $p(4) = 0$.

21 b) $p = -t + 4$. For $0 \le t \le 3$ er $p \ge 1$, $u = 1$, og $\dot{x} = 2$, $x(0) = 0$ giver $x = 2t$. For $3 \le t \le 4$ er $p \le 1$, $u = 4 - t$, og $\dot{x} = 8 - 2t$, $x(3) = 6$ giver $x = -t^2 + 8t - 9$. Optimal, fordi H er konkav i (x, u), [S] (Check hvor!). H er konkav, fordi . . . .

22 $\int (x^2-4)^{-1}dx = dt$; $\frac{1}{4}\ln(|x-2|/|x+2|) = t+K$; $(1-4/(x+2)) = Ce^{4t}$. Med $x(0)=0$ fås $1-4/2 = C$, altså $C=-1$ og $x = 4/(1+e^{4t})-2 = 2(1-e^{4t})/(1+e^{4t})$.

24(a) $\ddot{y} = -\dot{x}+4e^t = -(-2x+y-2t-1)+4e^t = 2(-\dot{y}+4e^t)-y+2t+1+4e^t$, dvs

$$\ddot{y}+2\dot{y}+y = 2t+1+12e^t.$$

Karakteristisk (dobbelt)rod: $\lambda=-1$, så $y=e^{-t}$ og $y=te^{-t}$ er basis for løsningerne til den homogene ligning. Partikulær løsning: $y=2t-3+3e^t$. Altså

$$x = -2+e^t+(C-D)e^{-t}+Dte^{-t}, \qquad y = 2t-3+3e^t+Ce^{-t}+Dte^{-t}.$$

24(b) $C=0$, $D=-1$.

26 $x_t = t^2-1+4(\frac{1}{2})^t\cos(t\pi/2)+2(\frac{1}{2})^t\sin(t\pi/2)$.

27(a) $H = ex-u^2+p(2u-x)$. (I) $\dot{p}=p-e$. (II) $u=1$ hvis $p>1$, $u=p$ hvis $0<p<1$, $u=0$ hvis $p<0$. (III) $p(1)=0$.

27(b) $p=Ce^t+e$ og $p(1)=0$ giver $p=e-e^t$ (specielt $p\geq 0$ for $0\leq t\leq 1$). Bestem $\bar{t}$ ved $p(\bar{t})=1$, altså $e^{\bar{t}}=e-1$ (og $\bar{t}=\ln(e-1)$ og $0<\bar{t}<1$). For $0\leq t\leq\bar{t}$ er $p\geq 1$, $u=1$, og $\dot{x}=2-x$, $x(0)=0$ giver $x=2-2e^{-t}$. For $\bar{t}\leq t\leq 1$ er $u=e-e^t$, og $\dot{x}=2(e-e^t)-x$, $x(\bar{t})=2-2e^{-\bar{t}}$ giver $x=De^{-t}+2e-e^t$ med $2-2e^{-\bar{t}}=De^{-\bar{t}}+2e-e^{\bar{t}}$, hvoraf $D=-2-2(e-1)e^{\bar{t}}+(e^{\bar{t}})^2=-2-(e-1)^2=-e^2+2e-3$.

28 $\int 2/t^3dt = -1/t^2$, så $x = e^{1/t^2}\int_1^t e^{-1/t^2}\cdot 4/t^3\,dt = 2e^{1/t^2}[e^{-1/t^2}]_1^t = 2-2e^{-1+1/t^2}$.

29 i) $\ddot{x}_2 = 2\dot{x}_1-3\cos t = 2(5x_1-3x_2-5\sin t+4\cos t)-3\cos t$
$= 5(\dot{x}_2+3\sin t)-6x_2-10\sin t+5\cos t$, så

$$\ddot{x}_2-5\dot{x}_2+6x_2 = 5\sin t+5\cos t.$$

Basis for de homogene løsninger er $x_2=e^{2t}$ og $x_2=e^{3t}$ og partikulær løsning er $x_2=\cos t$. Altså

$$x_1 = \sin t+Ce^{2t}+3De^{3t}, \qquad x_2 = \cos t+Ce^{2t}+2De^{3t}.$$

29 ii) Partikulær løsning: $C=1$, $D=-1$.

31 i) $x_t = C(-1)^t+D5^t+t(-1)^t+t^2$.

31 ii) $C=-1$, $D=0$.

32 $\partial F/\partial x = -8x$, $\partial F/\partial u = -2u$. Euler: $-8x = d/dt\,(-2\dot{x}) = -2\ddot{x}$. Løsning: $x = Ce^{2t}+De^{-2t}$. Randbetingelser $x(0)=0$ og $x(1)=1$ giver $C=1/(e^2-e^{-2})$ og $D=-C$.

33 i) $H=-2x^2-u+pu$. (I) $\dot{p}=4x$. (II) $u=1$ hvis $p>1$, $u=0$ hvis $p<1$. (III) $p(1)=2$.

33 ii) $x(t)\geq 1$ fordi $x(0)=1$ og $\dot{x}=u\geq 0$.

33 iii) Da $\dot{p}=4x\geq 4$, er p strengt voksende, og p vokser hurtigere end $4t$. Af $p(1)=2$ følger så, at $p(0)\leq -2$.

33 iv) Lad $\bar{t}$, med $0<\bar{t}<1$, være tallet, hvor $p(\bar{t})=1$. For $t<\bar{t}$, er $p<1$, $u=0$, og $\dot{x}=0$, $x(0)=1$ giver $x=1$. For $t>\bar{t}$, er $p>1$, $u=1$, og $\dot{x}=1$, $x(\bar{t})=1$ giver $x=t-\bar{t}+1$; videre: $\dot{p}=4x=4t-4\bar{t}+4$, $p(\bar{t})=1$ giver $p=2t^2+(-4\bar{t}+4)t+2\bar{t}^2-4\bar{t}+1$. Endelig: af $p(1)=2$ fås $2=2-4\bar{t}+4+2\bar{t}^2-4\bar{t}+1$, eller $2\bar{t}^2-8\bar{t}+5=0$ med rødderne $(8\pm\sqrt{24})/4$; det giver $\bar{t}=(4-\sqrt{6})/2=2-\sqrt{3/2}$.

36(a) $z^2 - az + \frac{1}{4}(a-1) = 0$.

36(b) Når $|a| < 1 + \frac{1}{4}(a-1) < 2$, dvs når $-\frac{3}{5} < a < 1$.

36(c) $x_t = C(\frac{1}{2})^t + D(-\frac{1}{2})^t + \frac{4}{15}2^t$. Nærmer sig $\frac{4}{15}2^t$ for $t \to \infty$ idet $|x_t - \frac{4}{15}2^t| \to 0$.

38(b) (1) u maksimerer $H(u) = (p-1)(x+t^2)u + x + t^2$, dvs $u = 1$ for $p > 1$ og $u = 0$ for $p < 1$. (2) $\dot{p} = -up + u - 1$. (3) $p(2) = 0$.

38(d) For $0 \le t \le 1$ er $p(t) = 1$, $u(t) = 1$ ($u(1)$ ubestemt), $x(t) = 3e^t - t^2 - 2t - 2$. For $1 < t \le 2$ er $p(t) = 2 - t$, $u(t) = 0$, $x(t) = 3e - 5$.

38(e) Arrows funktion $\hat{H}(x)$ er konkav, nemlig for faste t og $p \ge 1$ lig med $px + pt^2$, og for $p \le 1$ lig med $x + t^2$, altså altid lineær + konstant.

40(a) $(\pm 2, 0)$ og $(1, \pm\sqrt{3})$. Jacobi: $J = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x-1 \end{pmatrix}$. det $J = 2x(x-1) - 2y^2$ er negativ i $(1, \pm\sqrt{3})$, så disse to punkter er saddelpunkter. I $(\pm 2, 0)$ er det $J > 0$, men Tr $J = 3x - 1$ er kun negativ i $(-2, 0)$. Altså er $(-2, 0)$ lokalt asymptotisk stabil, de tre andre ustabile.

40(c) Fordi: x-aksen med $x > 2$ er selv en bane, og ligevægtspunkterne $(2, 0)$ og $(1, \sqrt{3})$ er hver én bane. På resten af randen af M peger hastighedsvektoren ind i M. En løsning kan derfor ikke fra det indre af M krydse randen af M.

46(a) Karakteristisk polynomium $z^2 - 10z + 25 = (z-5)^2$ med dobbeltrod $\lambda = 5$; fuldstændig løsning $c5^t + dt5^t$.

46(b) Fuldstændige løsning: $c5^t + dt5^t + 2 \cdot 3^t + 4^t$.

46(c) $c = 1$, $d = -1$.

50(a) Ligevægtspunkter: $(-3, \pm 4)$.

50(b) $(-3, 4)$: ustabil; $(-3, -4)$: ingen konklusion.

50(d) Jacobi: $J = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$. det $J = -6x^2y$. Negativ, når $y > 0$ og $x \ne 0$, så $(-3, 4)$ er et saddelpunkt (ustabilt). I $(-3, -4)$ er det $J > 0$ og Tr $J = 2(-3) < 0$, så $(-3, -4)$ er lokalt asymptotisk stabil. [Faktisk er egenværdierne ikke-reelle, så $(-3, -4)$ er et spiralpunkt (ikke pensum)!]

51(a) $x_t = (\sqrt{2}/2)^t (A \cos \pi t/4 + B \sin \pi t/4)$.

51(b) $A = 1$, $B = 3$, $x_2 = 3/2$.

51(c) $x^* = 14$.

51(d) Ja (asymptotisk stabil) fordi . . . .

53(a) (1) $u(t)$ maksimerer $H = (t-1)x - u^2 + p(u-x)$ for $u \in I = [0,1]$ giver: $u = 1$ for $p \ge 2$, $u = p/2$ for $0 \le p \le 2$, $u = 0$ for $p \le 0$. (2) $\dot{p} = -(t-1) + p$ (og $\dot{x} = u - x$). (3) $p(1) = 0$ (og $x(0) = 1$).

53(b) $p = t - e^{t-1}$.

53(c) $\dot{p} = 1 - e^{t-1}$ er > 0 for $t < 1$, p er strengt voksende i I.

53(d)) $p(t) \le 0$ for $t \in I$, og så er $u(t) = 0$ og $x(t) = e^{-t}$.

53(e) Konkav Hamilton.

62 $F = x^2 + 2t^2x + \dot{x}^2$ er konveks, fordi ...

62(a) $2x + 2t^2 = (d/dt)(2\dot{x}) = 2\ddot{x}$, så (EL) er $\ddot{x} - x = t^2$. Den generelle løsning er $x = -t^2 - 2 + Ce^t + De^{-t}$ og $x(0) = -2$ giver $C + D = 0$, dvs $x = -t^2 - 2 + C(e^t - e^{-t})$.

62(b) $x(T) = -T^2$ giver $C(e^T - e^{-T}) = 2$ og $T = \ln 2$, dvs $C = 4/3$.

62(c) $x(T)$ fri giver $\dot{x}(T) = 0$, altså $-2T + C(e^T + e^{-T}) = 0$, dvs $C = (4/5)\ln 2$.

62(d) $C \geq 4/3$ og $C \geq (4/5)\ln 2$ og '=' et af stederne giver $C = 4/3$.

64(a) $x = 1$ og $x = 1 \pm t/\sqrt{1 + Kt^2}$

64(b) $x = 1 - t/\sqrt{1 + 3t^2}$

65(a) $(0, -2)$ og $(1, 1)$.

65(d) $(0, -2)$ assymptotisk stabilt, $(1, 1)$ saddelpunkt (ustabilt).

66(a) $C + D(\frac{1}{2})^t$.

66(b) $1 - 4t(\frac{1}{2})^t$.

66(c) Ikke stabil, da $\lambda = 1$ ikke opfylder, at $|\lambda| < 1$.

66(d) Da $C + D(\frac{1}{2})^t - 4t(\frac{1}{2})^t \to C$ for $t \to \infty$.

67(a) $2x/t = d/dt(2t\dot{x}) = 2t\ddot{x} + 2\dot{x}$, dvs $\ddot{x} + (1/t)\dot{x} - (1/t^2)x = 0$. Og $(2t\dot{x})(2) = 0$, dvs $\dot{x}(2) = 0$.

67(b) $Ct + Dt^{-1}$.

67(c) $C + D = 1$, $C - D/4 = 0$; altså $x = \frac{1}{5}t + \frac{4}{5}t^{-1}$.

68(a) $H = xu - x^2 - u^2 - px$. (I) $\dot{p} = -\partial H/\partial x = -u + 2x + p$; (II) $0 = \partial H/\partial u = x - 2u + p$; (III) $p(\ln 2) = 0$.

68(b) $u = (x + p)/2$, så $\dot{x} = -x + u = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}p$, og $\dot{p} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}p$. Systemet løses: $\ddot{x} = -\frac{1}{2}\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{p} = -\frac{1}{2}\dot{x} + \frac{1}{2}(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}p) = -\frac{1}{2}\dot{x} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\dot{x} + \frac{1}{4}x = x$, altså $\ddot{x} = x$. Altså $x = Ce^t + De^{-t}$, $p = 2\dot{x} + x = 3Ce^t - De^{-t}$, $u = 2Ce^t$. $C + D = 1$, $6C - D/2 = 0$, hvoraf $C = 1/13$, $D = 12/13$.

68(c) Hamiltonfunktionen er konkav, fx fordi $\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ er negativ definit, se bl.a. [S, s.172].

69(a) $x = 0$, $x = -1$, og $x = \big(C(1 + 1/t) - 1\big)^{-1}$ for $C \neq 0$.

69(b) $C = 2$, dvs $x = t/(t + 2)$.

70(d) $J = \begin{pmatrix} 2x & -32y \\ -2x & -2y \end{pmatrix}$, $\det J = -68xy$, $\operatorname{Tr} J = 2(x - y)$. I $(4, \pm 1)$ er $\operatorname{Tr} J > 0$ (og $\det J \neq 0$), så ustabilt; i $(-4, 1)$ er $\det J > 0$ og $\operatorname{Tr} J < 0$, så stabilt; i $(-4, -1)$ er $\det J < 0$, så ustabilt.

71(a) Karakteristisk polynomium $z^2 - z + 1$ med rødder $\zeta, \bar{\zeta}$, hvor $\zeta = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Rødderne har $\rho = 1$ og $\theta = \pm 2\pi/6 = \pm\frac{\pi}{3}$. Den generelle løsning: $C_1 \cos(\frac{\pi}{3}t) + C_2 \sin(\frac{\pi}{3}t)$ (eller $D_1\zeta^t + D_2\bar{\zeta}^t$).

71(b) (*) bestemmer: $x_2 = 1 + x_1 - x_0 = -1$, $x_3 = 1 + (-1) - (-1) = 1$, $x_4 = 1 + 1 - (-1) = 3$; da $6\theta = \pm 2\pi$, er $x_{t+6} = x_t$, så $x_{1000} = x_4 = 3$. Alternativ: Løsning

til (*): $x_t = 1 + C_1\cos(\frac{\pi}{3}t) + C_2\sin(\frac{\pi}{3}t)$ med $1 = x_0 = 1 + C_1$, dvs $C_1 = 0$, og $-1 = x_1 = 1 + C_2\sin\frac{\pi}{3}$, dvs $C_2 = -2/(\sqrt{3}/2) = -2\frac{2}{\sqrt{3}}$, altså $x_t = 1 - 2\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\pi}{3}t)$. For $t = 1000 = 6\cdot 166 + 4$ fås $x_{1000} = x_4 = 1 - 2\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(4\pi/3) = 1 + 2 = 3$.

71(c) Ikke stabil.

71(d) $|x_t| = |1 + C_1\cos(\frac{\pi}{3}t) + C_2\sin(\frac{\pi}{3}t)| \le 1 + |C_1| + |C_2|$ er begrænset.

72(a) $t = \frac{d}{dt}(-t + 2\dot{x}) = -1 + 2\ddot{x}$, dvs $\ddot{x} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$, og $\left(-t + 2\dot{x}\right)_{t=1} \ge 0$, dvs $\dot{x}(1) \ge \frac{1}{2}$, med '=' hvis $x(1) > 2$.

72(b) $x = \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + Ct + D$.

72(c) $x(0) = 0$ giver $D = 0$. Videre: $2 \le x(1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + C$, dvs $C \ge \frac{5}{3}$, og $\frac{1}{2} \le \dot{x}(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + C$, dvs $C \ge -\frac{1}{4}$, og mindst ét '='. Det giver $C = \frac{5}{3}$.

72(d) F er konveks i $(x, \dot{x})$.

73(a) $H = (x + u) + p(-u + 2t)$, $S(x) = -\frac{1}{4}x^2$. (I) $\dot{p} = -\partial H/\partial x = -1$. (II) u maksimerer $v \mapsto (1 - p)v + x + 2t$, dvs $u = 1$ hvis $p < 1$ og $u = 0$ hvis $p > 1$. (III) $p(2) = S'_x|_{t=2} = -\frac{1}{2}x(2)$.

73(b) (I) giver $p(t) = -t + \bar{t} + 1$ med passende $\bar{t}$. (II) giver $u = 1$ hvis $t > \bar{t}$ og $u = 0$ hvis $t < \bar{t}$. Antag først, at $\bar{t} \le 0$. For $0 < t < 1$ er $t > \bar{t}$, altså $u = 1$, og $x = t^2 - t + 1$. Så er $p(2) = \bar{t} - 1$ og $x(2) = 3$, og (III) giver $\bar{t} - 1 = -\frac{1}{2}\cdot 3$, dvs $\bar{t} = -\frac{1}{2}$: betingelserne er opfyldt, med $u = 1$, $x = t^2 - t + 1$, og $p = -t + \frac{1}{2}$. Antag dernæst, at $0 < \bar{t} < 1$. For $0 < t < \bar{t}$ er $u = 0$, og $x = t^2 + 1$; specielt $x(\bar{t}) = \bar{t}^2 + 1$. Videre: For $\bar{t} < t < 1$ er $u = 1$, og $x = t^2 - t + \bar{t} + 1$. Så er $x(2) = 3 + \bar{t}$, og (III) giver $\bar{t} - 1 = -\frac{1}{2}(3 + \bar{t})$, dvs $\bar{t} = -\frac{1}{3}$, og det er i modstrid med antagelsen. Tilsvarende giver antagelsen $\bar{t} \ge 1$ en modstrid.

73(c) Fordi $S(x) = -\frac{1}{4}x^2$ er konkav ($S''(x) = -\frac{1}{2} < 0$) og $H = x + (1 - p)u + 2pt$ er lineær i x, u) og dermed konkav i (x, u).

74(a) $x = t\sin t - \frac{1}{3}\cos 2t + C\cos t + D\sin t$,

74(b) $x = t\sin t - \frac{1}{3}\cos 2t + \frac{1}{3}\cos t$.

75(a) $(1, -2)$ og $(-3, 2)$.

75(d) $J = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2x & -2 \end{pmatrix}$. $(1, -2)$: stabilt (spiralpunkt); $(-3, 2)$: ustabilt.

76(a) $x_t = 1$, $y_t = 0$.

76(b) Stabilt.

76(c) $\lim x_t = 1$, $\lim y_t = 0$.

76(d) $x_t = 1 + C(\frac{1}{3})^t + D(\frac{2}{3})^t$, $y_t = -\frac{4}{5}C(\frac{1}{3})^t - D(\frac{2}{3})^t$.

77(a) $2t\dot{x} + 2x = \frac{d}{dt}(2tx + 8\dot{x}) = 2t\dot{x} + 2x + 8\ddot{x}$, altså $\ddot{x} = 0$. Transversalitet: $x(0) = 1$ og $(2tx + 8\dot{x})_{t=2} = 0$, dvs $x(2) + 2\dot{x}(2) = 0$.

77(b) $x = Ct + D$.

77(c) $x(0) = 1$ giver $D = 1$, og $x(2) + 2\dot{x}(2) = 0$ giver så $2C + 1 + 2C = 0$, altså $C = -\frac{1}{4}$.

77(d) $F(t,x,u) = 2txu + x^2 + 4u^2$ er konveks i (x,u), da Hesse-matricen $\begin{pmatrix} 2 & 2t \\ 2t & 8 \end{pmatrix}$ er positiv semidefinit: $2 > 0$ og determinanten $16 - 4t^2$ er ≥ 0, da $t \in [0,2]$.

78(a) $H = x - e^t u + p(-x+u) = (p - e^t)u + x - px$. (I) $\dot{p} = -\partial H/\partial x$, dvs $\dot{p} = -1 + p$. (II) $u = 1$ hvis $p > e^t$, $u = 0$ hvis $p < e^t$. (III) $p(\ln 3) = 2$.

78(b) (I),(III) giver $p = 1 + Ce^t$ og $1 + C{\cdot}3 = 2$, altså $p = 1 + \frac{1}{3}e^t$. Punktet t^*, der skiller i (II), opfylder $p(t^*) = e^{t^*}$, altså $1 + \frac{1}{3}e^{t^*} = e^{t^*}$, hvoraf $\frac{2}{3}e^{t^*} = 1$, dvs $t^* = \ln(\frac{3}{2})$. Altså $u = 1$ for $t < t^*$ og $u = 0$, hvis $t > t^*$.

For $t \leq t^*$ er $u = 1$ og altså $\dot{x} = -x + 1$ og $x(0) = 0$, hvoraf $x = 1 - e^{-t}$. Så er $x(t^*) = 1 - e^{-t^*} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. For $t \geq t^*$ er $u = 0$ og altså $\dot{x} = -x$, hvoraf $x = x(t^*)e^{-(t-t^*)} = \frac{1}{3}\frac{3}{2}e^{-t} = \frac{1}{2}e^{-t}$.

78(c) H som funktion af (x,u), og skrotfunktionen $S(x) = 2x$ som funktion af x, er lineære, og derfor konkave.

79(a) $x = 0$ og $x = -(C + \ln(2 + \sin t))^{-1}$.

79(b) $x = Ce^{3t} + Dte^{3t} + \frac{1}{9}$.

80(a) $(0, \pm 1)$.

80(d) $J = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2 & 2y \end{pmatrix}$. $(0,1)$: ustabilt (saddelpunkt); $(0,-1)$: stabilt (spiralpunkt).

81(a) $x_t = C + D(-1)^t + t + \frac{1}{8}3^t$.

81(b) $C = -3/4$, $D = 5/8$.

82(a) $-e^{\dot{x}-x} = \frac{d}{dt}\, e^{\dot{x}-x} = e^{\dot{x}-x}(\ddot{x} - \dot{x})$, altså $\ddot{x} - \dot{x} = -1$.

82(b) $\dot{x} = Ce^t + 1$, altså $x = Ce^t + t + D$.

82(c) $C = D = 0$, dvs $x = t$.

82(d) $F(t,x,u) = e^{u-x}$ er konveks i (x,u), da Hesse-matricen $\begin{pmatrix} F & -F \\ -F & F \end{pmatrix}$ er positiv semidefinit: $F > 0$ og determinanten er $= 0$.

83(a) $H = (2-t)e^t u - x + pu^2$. (I) $\dot{p} = -\partial H/\partial x$, dvs $\dot{p} = 1$. (II) $u = 1$, hvis $p \geq -(2-t)e^t/2$, og $u = -(2-t)e^t/(2p)$ ellers. (III) $p(2) = 0$.

83(b) (I),(III) giver $p = t - 2$. Specielt er $p < 0$ for $0 \leq t < 2$. Uligheden i (II), $p \geq -(2-t)e^t/2$, giver $t - 2 \geq (t-2)e^t/2$, altså $1 \leq e^t/2$, dvs $t \geq \ln 2$. For $0 \leq t \leq \ln 2$: $u = e^t/2$, og $\dot{x} = u^2 = e^{2t}/4$ med $x(0) = 0$, dvs $x = e^{2t}/8 - 1/8$ (og specielt $x(\ln 2) = \frac{3}{8}$). Og for $\ln 2 \leq t \leq 2$: $u = 1$, og $\dot{x} = u^2 = 1$ med $x(\ln 2) = 3/8$ giver $x = t - \ln 2 + \frac{3}{8}$.

83(c) H som funktion af (x,u), er sum af tre led: $(2-t)e^t u$ og $-x$ er lineære og pu^2 er konkav, da $p \leq 0$. Derfor . . . .

84(a) $x(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t)$. Stabil.

84(b) $x(t) = e^{-t}(1 + A\cos t + B\sin t)$. (c) $x(t) = e^{-t}(1 - \cos t)$.

85(a) Linie samt graf of trediegradspolynomium; der er seks regioner. Ligevægtspunkterne er $(2,-1)$, $(0,0)$, $(-2,1)$.

85(b) Første og sidste er ustabile.

85(c) Kan f.eks. ligge i regionen over punktet.

85(d) $\begin{pmatrix} 3x^2-9 & -10 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $3x^2-11$ og $-6x^2+8$.

85(e) $(0,0)$ er lokalt asymptotisk stabilt; de to andre er sadelpunkter.

86(a) $x_t = (\sqrt{2})^{-t}\big(C\cos(\frac{3\pi t}{4}) + D\sin(\frac{3\pi t}{4})\big)$.

86(b) $x_t = (\sqrt{2})^{2-t}\sin(\frac{3\pi t}{4})$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

86(c) (HL) er stabil.

87(a) $\ddot{x} = 0$, $x(t) = At + 1$. Det bemærkes, at funktionen F er konveks for $t \in [0,1]$, da dens Hesse-matrix har $2t \geq 0$ og 2 (≥ 0) i diagonalen, og dens determinant er $t(4-t^3) \geq 0$.

87(b) $x(t) = t+1$. (c) $x(t) = -\frac{1}{3}t + 1$. (d) $x(t) = 1$.

88(a) $H = -p(t)u^2 + \big(2tx + (4+2t)u\big)$, som er konkav, netop når $p(t) \geq 0$.

88(b) $p(t) = 4 - t^2$.

88(c) $u(t) = \frac{1}{2-t}$ for $t < 1$ og $u(t) = 1$ for $t > 1$.

88(d) $x(t) = \frac{1}{t-2} + \frac{1}{2}$ for $t \leq 1$ og $x(t) = \frac{1}{2} - t$ for $t \geq 1$.

88(e) (x, u) opfylder (MPB), og H er konkav i x, u ifølge (a), da $p(t) \geq 0$ for alle t.

89(a) $x(t) = \pm\sqrt{\ln|t| + A}$, $A \in \mathbb{R}$ og $t < -e^{-A}$ eller $t > e^{-A}$.

89(b) $x(t) = \sqrt{\ln t + 1}$ på (e^{-1}, ∞), graf: $x(e) = \sqrt{2}$, $\dot{x}(e) = 0{,}13$, $\dot{x}(1) = \frac{1}{2}$ samt $x(t) \to 0$ og $\dot{x}(t) \to \infty$ for $t \to e^{-1}$.

89(c) $x(t) = -\sqrt{\ln(-t)}$ på $(-\infty, -1)$, graf: $\dot{x}(-e) = 0{,}18$, $x(t) \to 0$ og $\dot{x}(t) \to \infty$ for $t \to -1$.

90(a) Cirkel med centrum i $(0,0)$ og radius 4 samt akserne; der er otte regioner; $(4,0)$, $(0,4)$, $(-4,0)$ og $(0,-4)$ er ligevægtspunkterne.

90(b) $(0,4)$ er ustabilt, og det er $(4,0)$ og $(-4,0)$ også.

90(c) Banen skærer cirklen vandret.

90(d) $\begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$, $3y$ og $2y^2 - 2x^2$.

90(e) $(0,4)$ ustabilt, $(4,0)$ og $(-4,0)$ sadelpunkter, $(0,-4)$ lokalt asymptotisk stabilt.

91(a) $x_t = A2^t + B(-1)^t$.

91(b) $x_t = \frac{1}{3}(2^t - (-1)^t)$, $x_5 = 11$.

91(c) Ikke stabil.

92(a) $\ddot{x} - x = 0$, $x(t) = A(e^t - e^{-t})$.

92(b) Hessematricen har 4 (≥ 0) og 2 (≥ 0) i diagonalen, og dens determinant er $8 - 4t^2$ (≥ 0 for $t \in [0\,,1]$). $x(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}}$.

92(c) $x(t) = 0$.

92(d) $x(t)$ som i (b).

93(a) $\dot{x} = u$, $\dot{p} = 1$, $p(t) \leq -2$, hvis $u(t) = 0$, $p(t) \geq -1$, hvis $u(t) = 1$, og $p(t) = u(t) - 2$ ellers.

93(b) $p(3) = 0$ og $p(t) = t - 3$.

93(c) $u(t) = 0$ for $t < 1$, $u(t) = 1$ for $t > 2$ og $u(t) = t - 1$ for $1 < t < 2$.

93(d) $x(t) = 0$ for $t \leq 1$, $x(t) = \frac{1}{2}(t-1)^2$ for $1 \leq t \leq 2$ og $x(t) = t - \frac{3}{2}$ for $t \geq 2$.

93(e) (x, u) opfylder (MPB) og Hamiltonfunktionen er konkav i x, u.

98(a) (1) u maksimerer $H = tx - x^2 - u^2 + p(u+1)^2 = (p-1)u^2 + 2pu + \dots$ for $1 \leq u \leq 2$. (2) $\dot{p} = -H'_x = -t + 2x$ og $\dot{x} = (u+1)^2$. (3) $x(0) = 1$, $p(2) = 0$.

98(b) Strengt voksende, fordi: $\dot{x} = (u+1)^2 \geq 2^2$. Med x voksende og $x(0) = 1$ fås $x(t) \geq 1$, og så er er $\dot{p} = -t + 2x > -2 + 2 = 0$ for $t < 2$.

98(c) Af (3) og (b) fås $p = p(t) \leq 0$. Så er H en parabel, der hænger nedad, med toppunkt hvor $H'_u = 0$, dvs for $2(p-1)u + 2p =$ eller $u = p/(1-p)$. Da $p \leq 0$ er $p/(1-p) \leq 0$ og så er $H(u)$ aftagende for $1 \leq u \leq 2$. Af (1) fås $u = 1$. Og så er $\dot{x} = 4$ og $x = 4t + 1$.

98(d) $\dot{p} = -t + 8t + 2$ giver $p = \frac{7}{2}t^2 + 2t - 18$.

98(e) $H(x, u)$ er konkav, da $p \leq 1$.

99(a) $x^{-2}dx = 2^t\,dt$ giver $-x^{-1} = (\ln 2)^{-1}2^t + D$ eller $x = (\ln 2)/(C - 2^t)$.

99(b) $C = 3$, $t < (\ln 3)/(\ln 2)$.

99(c) $C = 1$, $t > 0$.

99(d) $C = 0$, $-\infty < t < \infty$.

103(a) $H = 2tx - x^2 - u^2 + pu \dots$ konkav.

103(b) (1) u maksimerer $H(u)$ for $u \leq 1$ giver $u = p/2$ når $p/2 \leq 1$ og $u = 1$ for $p/2 \geq 1$. (2) $\dot{p} = -H'_x = -2t + 2x$ og $\dot{x} = u$. (3) $x(0) = 0$, $x(\ln 2) = 0$.

103(c) Antag $u(t) < 1$ for $0 \leq t \leq \ln 2$. Af (b) fås $u = p/2$. Af (2) fås $\dot{x} = u = \frac{1}{2}p$ og $\dot{p} = 2x - 2t$, hvoraf $\ddot{x} - x = -t$ eller $x = Ae^t + Be^{-t} + t$. (3) giver $A + B = 0$ og $2A + B/2 = -\ln 2$, hvoraf $A = -B = -\frac{2}{3}\ln 2$, dvs $x = -\frac{2}{3}(\ln 2)(e^t - e^{-t}) + t$.

103(d) Videre er $p = 2\dot{x} = -\frac{4}{3}(\ln 2)(e^t + e^{-t}) + 2$ og $u = -\frac{2}{3}(\ln 2)(e^t + e^{-t}) + 1$.

103(e) For de fundne funktioner er øjensynlig $u < 1$, og da maksimumprincippet, . . . , af (a) følger . . . .

117(a) Euler-ligning $\ddot{x} + \dot{x} = 0$. Løsning med $x(0) = 0$ er $x = A(1 - e^{-t}$.

117(b) Determinant af Hesse-matrix $\det \mathbf{F}'' = 4(e^t - t^2)$ er $\geq 4(e^0 - (\ln 2)^2) \geq 0$. Med $x(\ln 2) = 1$ fås $x = 2(1 - e^{-t}$.

117(c) $x(t) = 0$.

117(d) $x = 2(1 - e^{-t}$.

119 $\ln(x+1) = \frac{1}{3}t^3 + \sin t + C$, $x(t) = 5e^{\frac{1}{3}t^3 + \sin t} - 1$.

120 $z = x^{-4}$, $-\frac{1}{4}\dot{z} = z - 5$, $z = Ae^{-4t} + 5$, $x(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{11e^{-4t}+5}}$.

121 Karakteristisk ligning: $r^2 - 7r + 10 = (r-2)(r-5) = 0$. Fuldstændig løsning til homogen: $x(t) = Ae^{2t} + Be^{5t}$. Partikulær løsning til inhomogen: $x(t) = -\frac{1}{3}te^{2t}$. Fuldstændig løsning til inhomogen: $x(t) = Ae^{2t} + Be^{5t} - \frac{1}{3}te^{2t}$.

122(a) $r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 1 = (r-1)^4$.

122(b) $x(t) = Ae^t + Bte^t + Ct^2e^t + Dt^3e^t + t + 1$.

123 $(1,1)$ er (lokalt) sadelpunkt, $(-1,-1)$ er (lokalt) stabil.

124(a) Karakteristisk ligning: $m^2 - 2m - 1 = 0$. Rødder: $m_1 = 1+\sqrt{2}$ og $m_2 = 1-\sqrt{2}$. Løsning: $x_t = \frac{(1+\sqrt{2})^t - (1-\sqrt{2})^t}{2\sqrt{2}}$.

124(b) $x_t \approx \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^t$ og dermed $x_{t+1}/x_t \to 1+\sqrt{2}$.

125(a) Euler-ligning: $\ddot{x} - x = -t$. Løsning: $x(t) = Ae^t + Be^{-t} + t$.

125(b) $x(t) = e^t + e^{-t} + t$.

125(c) Ja, jfr. sætning side 343, da F er (sum af 3 konvekse og dermed) konveks i $(x, \dot{x})$.

126(a) $H = x \cdot \sin t + p \cdot u \cdot \sin t$, $S(x_1) = -x_1$, $p(\pi) = -1$, $\dot{p}(t) = -\sin t$, $p(t) = \cos t$.

126(b), (c)

$$u(t) = \begin{cases} 1; & t < \pi/2, \\ 0; & t > \pi/2. \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} 1 - \cos t; & t < \pi/2, \\ 1; & t > \pi/2. \end{cases}$$

126(d) Ja, jfr. sætning side 392, da H er (lineær og dermed) konkav i (x, u), da $U = [0,1]$ er konveks (et interval), og da $S(x_1) = -x_1$ er (lineær og dermed) konkav.

127(a) Homogene: $x(t) = Ce^t + De^{-t}$. Partikulær: $\frac{1}{2}te^t + \sin t$. Generelle løsning: $x(t) = \frac{1}{2}te^t + \sin t + Ce^t + De^{-t}$

127(b) $C = -3/4$, $D = 3/4$.

128(a) $(0,1)$ og $(-1,0)$.

128(d) $x(t) \to \infty$ og $y(t) \to 1$.

128(e) $J = \begin{pmatrix} y & x \\ 1-y & -1-x \end{pmatrix}$. I $(0,1)$: $\lambda = \pm 1$, ustabilt (saddelpunkt). I $(-1,0)$: $\Re\lambda = 0$, ingen konklusion!

129(a) $x_t = C\left(\frac{1}{2}\right)^t + Dt\left(\frac{1}{2}\right)^t + E\left(-\frac{1}{2}\right)^t + Ft\left(-\frac{1}{2}\right)^t$.

129(b) Indsæt 1; ud kommer $\frac{9}{16}$. Indsæt $t^2\left(\frac{1}{2}\right)^t$; ud kommer $(t+4)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{t+4} - \frac{1}{2}(t+2)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{t+2} + \frac{1}{16}t^2\left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^t$. Partikulær løsning: $16 + 2t^2\left(\frac{1}{2}\right)^t$.

129(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^t \to 0$ og $t\left(\frac{1}{2}\right)^t \to 0$ og $t^2\left(\frac{1}{2}\right)^t \to 0$, så $x(t) \to 16$ for $t \to \infty$.

130(a) Eulerligning: $3t\dot{x} + 4x = \frac{d}{dt}(3tx + \dot{x}) = 3t\dot{x} + 3x + \ddot{x}$, hvoraf $\ddot{x} - x = 0$. Transversalitet: $3 \cdot \frac{1}{3}x(\frac{1}{3}) + \dot{x}(\frac{1}{3}) = 0$, dvs $x(\frac{1}{3}) + \dot{x}(\frac{1}{3}) = 0$.

130(b) $x = Ce^t + De^{-t}$.

130(c) $x(0) = 1$ giver $C + D = 1$, og $x(\frac{1}{3}) + \dot{x}(\frac{1}{3}) = 0$ giver $2Ce^{\frac{1}{3}} = 0$, dvs $C = 0$ og $D = 1$, altså $x(t) = e^{-t}$.

130(d) $F(t,x,u) = 3txu + 2x^2 + \frac{1}{2}u^2$ er konveks i (x,u), da Hesse-matricen $\begin{pmatrix} 4 & 3t \\ 3t & 1 \end{pmatrix}$ er positiv semidefinit: diagonalen er > 0 og determinanten $4 - (3t)^2$ er > 0 i intervallet $[0, \frac{1}{3}]$, endda for $t < \frac{2}{3}$.

131(a) $H = 8e^{-t}x + u + p(-x-u)$.
(1) u maksimerer $H = (1-p)u + \ldots$, så $u = 0$ hvis $p > 1$, og $u = 1$ hvis $p < 1$.
(2)* $\dot{p} = -H'_x = -8e^{-t} + p$, og $\dot{x} = -x - u$.
(3)(iv)* $x(0) = 1$; da $S(x) = -x$ er $S'(x) = -1$, som giver $p(\ln 4) = -1$.

131(b) $\dot{p} = -8e^{-t} + p$ giver $p = Ce^t + 4e^{-t}$ og dermed $p(\ln 4) = 4C + 1$. Af $p(\ln 4) = -1$ fås $C = -\frac{1}{2}$. Altså $p = -\frac{1}{2}e^t + 4e^{-t}$. For alle t er $\dot{p} = -\frac{1}{2}e^t - 4e^{-t} < 0$, så $p(t)$ er strengt aftagende. Videre er $p(0) = -\frac{1}{2} + 4 > 1$ og $p(\ln 4) = -1 < 1$, så $p(t_0) = 1$ for præcis en værdi t_0. Da $p(\ln 2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 1$, er $t_0 = \ln 2$. Derfor er $u(t) = 0$ for $0 \le t < \ln 2$ og $u(t) = 1$ for $\ln 2 < t \le \ln 4$.

For $t < t_0$ er $u = 0$ og altså $\dot{x} = -x$; $x(0) = 1$ giver $x = e^{-t}$. For $t = t_0 = \ln 2$ fås $x(\ln 2) = \frac{1}{2}$. For $t > t_0$ er $u = 1$ og altså $\dot{x} = -x - 1$ som giver $x = De^{-t} - 1$. Af $x(\ln 2) = \frac{1}{2}$ fås $D = 3$ og $x(t) = 3e^{-t} - 1$.

131(c) H er lineær i (x,u), og derfor konkav.

132(a) Homogene: $x(t) = C\sin t + D\cos t$. Partikulær: $\frac{1}{2}e^t + t\cos t$. Generelle løsning: $x(t) = \frac{1}{2}e^t + t\cos t + C\sin t + D\cos t$.

132(b) $C = -3/2$, $D = -1/2$.

133(a) $(0,0)$ og $(1,1)$.

133(d) $J = \begin{pmatrix} y+1 & x-2y-1 \\ 0 & 2y-1 \end{pmatrix}$. I $(0,0)$: ustabilt (saddelpunkt). I $(1,1)$: ustabilt.

134(a) $x_t = 6$, $y_t = 6$.

134(b) Stabilt, da matricen har egenværdier $\lambda = \frac{1}{2}$ og $\lambda = -\frac{1}{3}$ med $|\lambda| < 1$.

134(c) $x_t \to 6$ og $y_t \to 6$ for $t \to \infty$.

134(d) $x_t = 6 + A(\frac{1}{2})^t + B(-\frac{1}{3})^t$, $y_t = 6 + \frac{1}{2}A(\frac{1}{2})^t - 2B(-\frac{1}{3})^t$.

135(a) Med $L(x) = \ddot{x} - 2t^2 - 2x$ er $L(t^2) = 2 - 2t^{-2}t^2 = 0$ og $L(t^{-1}) = 2t^{-3} - 3t^{-2}t^{-1} = 0$. Heraf $x = At^2 + Bt^{-1}$.

135(b) $x = t^2 + 16t^{-1}$.

135(c) Ligningen i (a) er Eulerligningen (divideret med 2). . . . standardkonkav . . . .

136(a) $H = -4x^2 - u^2 - 6txu + p(t+u)$.
(1) u maksimerer $H = -u^2 + u(p - 6tx) + \ldots$ for $0 \le u \le 1$. Da $H'_u = -2u + p - 6tx$, er $H'_u(u_0) = 0$ for $2u_0 = p - 6tx$. Specielt, hvis $x \ge 0$ og $p \le 0$, så er $u_0 \le 0$, og så maksimeres $H(u)$ af $u = 0$.
(2) $\dot{p} = -H'_x = 8x + 6tu$, og $\dot{x} = t + u$.
(3) $x(0) = 0$ og $p(1/3) = 0$.

136(b) $\dot{x}(t) \ge 0$ ifølge (2). Heraf, da $x(0) = 0$, fås $x(t) \ge 0$. Af (2) følger så $\dot{p} \ge 0$. Heraf, da $p(1/3) = 0$, fås $p(t) \le 0$.

Nu følger af (1), at $u(t) = 0$. Og så er $x(t) = \frac{1}{2}t^2$. Og $\dot{p} = 8x = 4t^2$ giver $p = \frac{4}{3}(t^3 - 1/3^3)$.

136(c) ... Hesse ...

137(a) $x(t) = \frac{1}{(1+t)^4}$.

137(b) $x(t) = 1$.

138(a) $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$.

138(b) Enhedscirklen og linierne givet ved $y = -x + 1$ og $y = -x - 1$.

138(d) Jacobi $= \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2(x+y) & 2(x+y) \end{pmatrix}$. $(-1, 0)$ stabilt, øvrige ustabile.

139(a) $x_t = x^* = 1/6$, $y_t = y^* = 2/3$.

139(b) Globalt asymptotisk stabtilt.

139(c) $x_t \to 1/6$, $y_t \to 2/3$.

139(d) $x_t = \frac{1}{6} + C(\frac{1}{3})^t + D(-\frac{1}{2})^t$, $y_t = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}C(\frac{1}{3})^t - \frac{1}{2}D(-\frac{1}{2})^t$.

140(a) $\ddot{x} - x = -1$.

140(b) $x(t) = (e^t - e^{-t})/(e - e^{-1}) + 1$.

140(c) Hesse-matricen (for fast t) er $\begin{pmatrix} 4 & 2t \\ 2t & 2 \end{pmatrix}$ med spor 6 og determinant $8 - 4t^2 \geq 4$, ... positiv definit, ... konkav ... .

141(a) $H = x \sin t + pu \sin t$, (1) $u(t)$ maksimerer $(\sin t)pu + x \sin t$ for $0 \leq u \leq 1$, (2) $\dot{p} = -\sin t$, (3) $p(\pi) = -3x(\pi)$.

141(b) ... $\dot{x} = u \sin t \geq 0$ ... $x(t)$ (svagt) voksende; $x(\pi) \geq 0$. ... $\dot{p} = -\sin t < 0$ ... $p(t)$ ... (strengt) aftagende.

141(c) $p(t) = \cos t - \cos t^*$. For $0 < t \leq t^*$ er $u(t) = 1$, $x = 1 - \cos t$. For $t^* < t \leq \pi$ er $u(t) = 0$, $x(t) = 1 - \cos t^*$. Og $t^* = \pi/3 (= 60°)$.

141(d) ... konkav ... fordi ... lineær.

142(a) $Ae^{3t}\cos(4t) + Be^{3t}\sin(4t)$.

142(b) $e^{3t} + 2t^2 + t$.

142(c) $e^{3t} + 2t^2 + t - e^{3t}\cos(4t)$.

143(a) (1,1) og (3,3)

143(b) Nulkurverne bliver henholdsvis en stående og en liggende parabel. Begge med toppunkt i (1,1).

143(c) Punktet (2,2) ligger i de 2 parablers fællesmængde, som er kompakt. I ethvert punkt på randen af denne mngde peger pilen i fasediagrammet ind i fællesmængden.

143(d) Punktet (1,1) er ikke lokalt assymptotisk stabilt, hvorimod (3,3) er det.

144(a) Da 1 er karakteristisk rod, er $x_t = 1^t = 1$ løsning.

144(b) $A + Bt + C(\frac{1}{2})^t$.

144(c) $8t(\frac{1}{2})^t$.

144(d) Ikke asymptotisk stabil.

145(a) $\ddot{x} + \dot{x} = 0$.

145(b) $x(t) = 1$.

145(c) For et givet t bliver determinanten af Hessematricen $t(8e^t - t^3)$. For t i $[1, 2]$ er $8e^t > 8$ og $t^3 < 8$ så determinanten er positiv.

146(a) u maksimerer $H = -x + u + p(u^2 - 2u + x)$ for $0 \le u \le 1$. $\dot{p} = -p + 1$, $p(\ln 3) = 0$.

146(b) $p = 1 - 3e^{-t}$, specielt $p(t) < 0$ for $t < \ln 3$.

146(c) $u(t) = 1$ (da $p(t) \le 0$), $x = 1 - e^t$.

146(d) ... konkav ... fordi $p(t) \le 0$ ... .

147(a) $Ae^{-t}\cos t + Be^{-t}\sin t$.

147(b) Ja.

147(c) $2t^2 - 2t$.

147(d) $2t^2 - 2t$.

148(a) $(-2, 8)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$.

148(b) Parablen $y = 2x^2$ og de 2 linier $x = 0$, $y = -2x + 4$.

148(c) Området, der indeholder $(-1, 4)$, og afgrænses af nulkurverne, er øjensynlig begrænset („Over parablen, til venstre for y-aksen, og under linien $y = -2x + 4$“). Det ses på skitsen, at på randen af området peger tangentvektorerne ind i området. Ingen løsningskurve kan derfor forlade området.

148(d) $\begin{pmatrix} 4x & -1 \\ 4x + y - 4 & x \end{pmatrix}$, $(-2, 8)$ lokalt assymptotisk stabilt, $(0, 0)$ lokalt saddelpunkt og ustabilt, $(1, 2)$ ustabilt.

149(a) $(a, b) = (4, 2)$.

149(b) $x_t = A(\frac{1}{2})^t + B(-\frac{1}{2})^t + 4$, $y_t = A(\frac{1}{2})^t + 2B(-\frac{1}{2})^t + 2$.

149(c) $x_t \to 4$ og $y_t \to 2$ for $t \to \infty$.

150(a) $\ddot{x} - 9x = -9t$.

150(b) $x = e^{3t} - e^{-3t} + t$.

150(c) Beregning af Hessematricen og relevante henvisninger.

151(a) Relevante henvisninger til teksten, anvendt på denne situation.

151(b) $p(t) = 2 - t^2$,

$$u(t) = \begin{cases} 2 & \text{hvis } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{hvis } 1 < t \le \sqrt{2} \end{cases}, \quad x(t) = \begin{cases} 4t - t^2 & \text{hvis } 0 \le t \le 1 \\ 3 & \text{hvis } 1 < t \le \sqrt{2}. \end{cases}$$

151(c) Relevante henvisninger samt oplysning om at Hamiltonfunktionen er lineær i x og u.

153(a) Ligevægtspunkter: $(4, 3)$, $(-4, 3)$, $(4, -3)$, $(-4, -3)$.

153(c) Lad M være punktmængden, hvor $y \geq 0$, $x \geq 6$, og $y^2 \leq x^2 - 7$. Det er nok at vise, at $(x(t), y(t)) \in M$ for $t \geq 0$. Der er ingen stationære punkter i M, og det fremgår af pilene, at hver hastighedsvektor på randen af M peger ind i M. De $(x(0), y(0))$ ligger på randen af M, løber løsningen først ind i M, og så forbliver den i M for $t \geq 0$, da den ikke igen kan krydse randen af M.

153(d) (4,3) ustabil (saddelpunkt), (-4,3) stabil, (4,-3) ustabil, (-4,-3) ustabil (saddelpunkt)

157(a)(b) $(x, y) = (0, D)$ (D arbitrær): for $t \in \mathbb{R}$.
$(x, y) = \big((t+C)^{-1}, D(t+C)^2\big)$ ($C > 0$, D arbitrær): for $-C < t < \infty$.
$(x, y) = \big((t+C)^{-1}, D(t+C)^2\big)$ ($C < 0$, D arbitrær): for $-\infty < t < -C$.

157(c) $(x, y) = \big((t+3)^{-1}, \frac{1}{9}(t+3)^2\big)$.

158(a) $(x, y) = (0, 0)$, $(x, y) = (-1, 1)$, $(x, y) = (2, 4)$.

158(c) Pilene på nulkurverne, der afgrænser D, peger ind i D. Derfor: $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t))$ er $= (0, 0)$, hvis $(x(0), y(0)) = (0, 0)$, og ellers $= (2, 4)$.

158(d) $J = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 2x - y + 2 & -x \end{pmatrix}$. $(0, 0)$: ustabil (saddelpunkt); $(-1, 1)$: ustabil; $(2, 4)$: asymp. stabil.

159(a) Koefficientmatrix $A = \begin{pmatrix} 1/2 & k \\ k & 1/2 \end{pmatrix}$. Karakteristisk polynomium $z^2 - \mathrm{tr}(A)z + \det(A) = z^2 - z + (\frac{1}{4} - k^2)$. Stabil: $1 < (\frac{1}{4} - k^2) + 1$ og $\frac{1}{4} - k^2 < 1$, giver $k^2 < \frac{1}{4}$, altså for $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$.

159(c) Kar pol $z^2 - z - \frac{3}{4}$ har rødder $z = \frac{3}{2}$ og $z = -\frac{1}{2}$. Generelle løsning til homogene andenordens ligning for x_t er $x_t = C(\frac{-1}{2})^t + D(\frac{3}{2})^t$. Og så bestemmes y_t af første ligning $y_t = -C(\frac{-1}{2})^t + D(\frac{3}{2})^t$.

159(d) Iflg (b),(c): $x_t = C(\frac{-1}{2})^t + D(\frac{3}{2})^t + (-1)^t$, $y_t = -C(\frac{-1}{2})^t + D(\frac{3}{2})^t + (-1)^{t+1}$.

160(a) $F'_{\dot{x}} = \frac{d}{dt}F'_{\dot{x}}$ reduceres til $24e^{rt}\ddot{x} + 24re^{rt}\dot{x} - 5re^{rt})x = 0$ eller: $\ddot{x} + r\dot{x} - \frac{5r}{24}x = 0$.

160(b) Kar pol $z^2 + \frac{2}{3}z - \frac{5}{36}$ har rødder $z = \frac{1}{6}$ og $z = -\frac{5}{6}$. Generelle løsning: $x = Ce^{\frac{1}{6}t} + De^{-\frac{5}{6}t}$. Randbetingelser giver $x = e^{\frac{1}{6}t}$.

160(c) Hessematricen $F'' \geq 0$? Har $F''_{xx} = 4 > 0$ og ønsker det $F'' > 0$. Har: $\det F'' = 4 \cdot 24e^{\frac{2}{3}t} - (4t - 5e^{\frac{2}{3}t})^2$.

Husk, at $0 \leq t \leq 1$. Derfor er $4 \cdot 24e^{\frac{2}{3}t} \geq 4 \cdot 24 = 96$. I differensen $4t - 5e^{\frac{2}{3}t}$ er begge led ≥ 0, og $4t \leq 4$ og $5e^{\frac{2}{3}t} \leq 5e^{\frac{2}{3}}$. Derfor er $|4t - 5e^{\frac{2}{3}t}| \leq 5e^{\frac{2}{3}}$. Altså er det $F'' \geq 96 - (5e^{\frac{2}{3}})^2 = 96 - 25e^{\frac{4}{3}} \geq 1$, sidste ulighed ifølge vinket. Konkav . . . .

161(a) $H = (-u-1)x^2 - pux^2 = -(1 + (p+1)u)x^2$, og
(i) $u(t)$ maksimerer H, dvs $u = 0$ hvis $p + 1 > 0$, og $u = 1$ hvis $p + 1 < 0$.
(ii) $\dot{p} = -H'_x = 2(1 + (p+1)u)x$, $\quad \dot{x} = -ux^2$.
(iii) $x(0) = \frac{1}{3}$, $\quad p(3) = 0$ (da $x(3)$ er fri).

161(b) For $p + 1 > 0$ er $\dot{p} = 2x$ og for $p + 1 < 0$ er $\dot{p} = 2x(p+2)$. Det må antages, at $x > 0$ og $p + 2 > 0$, så det følger, at $\dot{p} > 0$. Altså er $p(t)$ strengt voksende, og kan så højst antage værdien -1 for én værdi t^*.

For $t^* < t < 3$ er $p(t) > -1$, altså $u(t) = 0$ ifølge (i). Så er $\dot{p} = 2x$, $\dot{x} = 0$. Altså $x = k$ konstant, med $k > 0$, og videre $p = 2k(t-3)$, da $p(3) = 0$. Af $p(t^*) = -1$ følger $-1 = 2k(t^* - 3)$, eller $k = \frac{1}{2}/(3 - t^*)$.

161(c) For $0 < t < t^*$ er $p(t) < -1$, altså $u(t) = 1$ ifølge (i). Så er $\dot{x} = -x^2$, $\dot{p} = 2x(p+2)$. Altså er $x = 1/(t+3)$ (jfr opgave 1).

Af $x(t^*) = k$ fås $1/(t^*+3) = k = \frac{1}{2}/(3-t^*)$, hvoraf $t^* = 1$. Videre er $\dot{p} = 2x(p+2) = 2(t+3)^{-1}(p+2)$, hvoraf $p + 2 = K(t+3)^2$. For $t = t^*$ fås $1 = K \cdot 4^2$, altså $K = \frac{1}{16}$.

I alt: $t^* = 1$ (og $k = \frac{1}{4}$). For $0 \le t \le 1$ er $x = 1/(t+3)$, $u = 1$, $p = \frac{1}{16}(t+3)^2 - 2$,

161(d) Arrows funktion $\hat{H}(x)$, fast t og $p = p(t)$. $H(x,u) = -(1 + (p+1)u)x^2$. Hvis $p + 1 \ge 0$, er $\hat{H} = -x^2$ klart konkav; hvis $p + 1 \le 0$, er $\hat{H} = -(p+2)x^2$ konkav, da $p + 2 > 0$. Derfor, ...

162(a) Kar. pol. $z^2 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}$, rødder $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$. Generelle løsning: $x = Ce^{\frac{1}{2}t} + De^{-\frac{1}{3}t} + \frac{3}{2}e^t$.

162(b) Ikke asymptotisk stabil, da roden $\frac{1}{2}$ ikke har negativ realdel.

162(c) Pol. som (a). Generelle løsning: $x_t = C(\frac{1}{2})^t + C(-\frac{1}{3})^t + (e^2 - \frac{1}{6}e - \frac{1}{6})^{-1}e^t$.

162(d) Asymptotisk stabil, da begge rødder z har numerisk værdi $|z| < 1$.

163(a) Punkterne $(2,4)$, $(-2,4)$, og $(-1,1)$.

163(c) For $(x_0, y_0) = (-1, 1)$: konstant løsning. Ellers: Løsningen bliver i D (da ingen retningspile på nulkurverne peger ud af D), og $(x(t), y(t))$ konvergerer mod $(2,4)$ for $t \to \infty$. Specielt for (x_0, y_0) på linien, hvor $y = 4$: „vandret“ løsning, og for $(x_0, y_0) = (2,4)$: konstant løsning.

163(d) $(2,4)$: lokalt asymptotisk stabil ligevægt; $(-1,1)$ og $(-2,4)$: ustabile.

164(a) Koefficientmatrix $A = \begin{pmatrix} -1/2 & k \\ k & -1/2 \end{pmatrix}$. Karakteristisk polynomium $z^2 - \mathrm{tr}(A)z + \det(A) = z^2 + z + (\frac{1}{4} - k^2)$. Stabil: $\mathrm{tr}(A) = -1 < 0$ OK, og $\det(A) = \frac{1}{4} - k^2 > 0$ giver ialt $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$.

164(b) For $x = e^{-kt}$ og $y = -e^{-kt}$ er $y = -x$. I første ligning er VS$= \dot{x} = -kx$ og HS$= -\frac{1}{2}x - kx + \frac{1}{2}x = -kx$, dvs VS=HS. I anden ligning er VS$= \dot{y} = kx$ og HS$= kx + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = kx$, altså VS=HS.

164(c) For $k = 1$: kar. pol. $z^2 + z - \frac{3}{4}$, rødder $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$. Generelle løsning $x = Ce^{\frac{1}{2}t} + De^{-\frac{3}{2}t}$, hvoraf fra første (homogene) ligning $y = \dot{x} + \frac{1}{2}x$, altså $y = Ce^{\frac{1}{2}t} - De^{-\frac{3}{2}t}$.

164(d) En partikulær løsning $(x, y) = (e^{-t}, -e^{-t})$ bestemt i (b), så generelle løsning: $x = Ce^{\frac{1}{2}t} + De^{-\frac{3}{2}t} + e^{-t}$, $y = Ce^{\frac{1}{2}t} - De^{-\frac{3}{2}t} - e^{-t}$.

165(a) $F'_x = e^{a\dot{x}+bx}b$, $F'_{\dot{x}} = e^{a\dot{x}+bx}a$, $\frac{d}{dt}F'_{\dot{x}} = e^{a\dot{x}+bx}a(a\ddot{x} + b\dot{x})$. Eulerligning $F'_x = \frac{d}{dt}F'_{\dot{x}}$ giver $e^{a\dot{x}+bx}b = e^{a\dot{x}+bx}a(a\ddot{x} + b\dot{x})$ eller $\ddot{x} + \frac{b}{a}\dot{x} = b/a^2$.

165(b) Med $F(x,u) = e^{au+bx}$ er Hesse $F'' = \begin{pmatrix} b^2F & abF \\ abF & a^2F \end{pmatrix}$. Her er $F''_{xx} = b^2F > 0$ og $\det F'' = 0$, så positiv semidefinit. Altså er F konveks, og . . . .

165(c) For $a = b = 1$ fås $\ddot{x} + \dot{x} = 1$. Homogene løsninger er $x = 1$ og $x = e^{-t}$, generelle løsning $C + De^{-t} + t$. Randbetingelser giver $C + D = 0$ og $C + De^{-1} + 1 = 0$, hvoraf $x = -e/(e-a) + (e/(e-1))e^{-t} + t$.

166(a) Hamilton: $H = ue^{(r+k)t} - kxe^{kt} + pue^{rt} = e^{rt}(p + e^{kt})u - kxe^{kt}$.
(i) $u(t)$ maksimerer H (lineær), så $u = 0$ hvis $p + e^{kt} < 0$, og $u = 1$ hvis $p + e^{kt} > 0$.
(ii) $\dot{p} = -H'_x = ke^{kt}$, $\quad \dot{x} = ue^{rt}$.
(iii) $x(0) = 1$, $\quad p(2) = 0$ (da $x(2)$ er fri).

166(b) (ii)+(iii) giver $p = e^{kt} - e^{2k}$. Første ulighed i (i) er $2e^{kt} - e^{2k} < 0$, opfyldt når $t < t^*$ bestemt ved $2e^{kt^*} = e^{2k}$, eller $\ln 2 + kt^* = 2k$.

166(c) For $k = \ln 2$ er $\ln 2(1 + t^*) = 2\ln 2$, hvoraf $t^* = 1$. For $t < 1$ er $u = 0$; derfor er $\dot{x} = 0$ og $x(0) = 1$, hvoraf $x = 1$. For $t > 1$ er $u = 1$; derfor er $\dot{x} = e^{rt}$ og $x(1) = 1$ har vi lige vist, hvoraf $x = \frac{1}{r}(e^{rt} - e^r) + 1$.

166(d) Hamilton er lineær i (x, u), specielt konkav, derfor . . . .

167(a) Trivielt: Indsæt $x = \cos t$ på venstresiden.

167(b) $a < 1$.

167(c) $x = Ce^{-\frac{1}{2}t} + De^{2at}$ for $a \neq -\frac{1}{4}$, og $x = Ce^{-\frac{1}{2}t} + Dte^{-\frac{1}{2}t}$ når $a = -\frac{1}{4}$.

167(d) $x = \cos t - e^{-\frac{1}{2}t}$ (også når $a = -\frac{1}{4}$).

168(a) $(-1, 0)$, $(0, -2)$, samt $a := (0, 0)$, $b := (1, 0)$, $c := (0, 2)$.

168(c) På nul-kurverne, der afgrænser D, to cikelbuer og to intervaller på akserne, peger pilene ind i D (eller langs randen på intervallerne). Med $z(t) = (x(t), y(t))$ og $z(0) \in D$ gælder: $z(0) = b$ giver $z(t) = b$; $z(0) = c$ giver $z(t) = c$; $z(0) = (v, 0)$ giver $z(t) \to b$; alle andre tilfælde: $z(t) \to c$ for $t \to \infty$.

168(d) a er ustabilt; b er ustabilt (saddelpunkt); c asymptotisk stabilt.

169(a) $2atx + t^2\dot{x} + 8t = \frac{d}{dt}(t^2x + 2t\dot{x}) = 2tx + t^2\dot{x} + 2\dot{x} + 2t\ddot{x}$ eller $t\ddot{x} + \dot{x} + (1-a)tx = 4t$.

169(b) $F(t, x, u)$ er konveks: Hessematricen $A = F''$ har $a_{11} = 2at$ og det $F'' = 4at^2 - t^4 = t^2(4a - t^2)$; for $a \geq 1$ er begge ≥ 0 på intervallet $1 \leq t \leq 2$, altså positiv semidefinit.

169(c) $\frac{d}{dt}(t\dot{x}) = 4t$ giver $t\dot{x} = 2t^2 + C$ eller $\dot{x} = 2t + C/t$, hvoraf $x = t^2 + C\ln t + D$.

169(d) $x = t^2 + C\ln t + D$, med $D = -1$ og $C = -7/(\ln 2 + \frac{1}{2})$.

170(a) $(x_1, y_1) = (\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$, $(x_2, y_2) = (-\frac{5}{4}, 4)$.

170(b) Karakteristisk polynomium $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}$, altså asymptotisk stabil.

170(c) Med ligevægtspunkt (x^*, y^*) er $\lim_{t\to\infty} x_t = x^*$ og $\lim_{t\to\infty} y_t = y^*$.

170(d) $x^* = 2$, $y^* = 1$ (Løs ligningerne med $x_{t+1} = x_t = x^*$ og $y_{t+1} = y_t = y^*$.)

171(a) Hamilton: $H = 2\sin t\, x - \frac{1}{2}u^2 + pu$. (1) $u = 1$ for $p \geq 1$, $u = p$ for $0 \leq p \leq 1$, $u = 0$ for $p \leq 0$. (2) $\dot{p} = -H'_x = -2\sin t$. (3) $p(\pi/2) = 0$.

171(b) $p = 2\cos t$ ifølge (2) og (3). (aftagende for $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, og $\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$).

171(c) $u = 1$ for $t \le \frac{\pi}{3}$ og $u = 2\cos t$ for $t \ge \frac{\pi}{3}$. Heraf: $x = t - \frac{\pi}{3}$ for $t \le \frac{\pi}{3}$, specielt $x(\frac{\pi}{3}) = 0$, og $x = 2\sin t - \sqrt{3}$ for $t \ge \frac{\pi}{3}$.

171(d) H er konkav i (x, u), nemlig lig $-u^2$ plus lineært.

172(a) $k < 0$.

172(b) $(x, y) = (Ce^{kt} + Dte^{kt}, De^{kt})$.

172(c) $(x, y) = (-1/k + Ce^{kt} + Dte^{kt}, De^{kt})$.

172(d) $(x, y) = (C + (D + 1)t, D)$.

173(a) $(x, y) = (-4, 0), (0, 0), (0, 6), (4, 0)$.

173(c) Med $z(t) := (x(t), y(t))$: For $z(0) = (0, 0)$ (stationært) er $\lim z(t) = (0, 0)$. Ellers, på x-aksen, er $\lim z(t) = (4, 0)$. For alle andre muligheder for $z(0)$ er $\lim z(t) = (0, 6)$.

174(a) Eulerligning: $t^2\ddot{x} + bt\dot{x} + cx = 0$. Trans.bet.: $\dot{x}(2) = 0$.

174(b) Når $c \le 0$ er F sum af sur parabel i x og sur parabel i u, og derfor konkav i x, u.

174(c) $x = t^3$ og $x = t^{-1}$ indsat giver 0, så fuldstændige løsning: $x = At^3 + Bt^{-1}$.

174(d) Løsning $1 = x(1) = A + B$, $0 = \dot{x}(2) = 12A - B/4$, hvoraf $A = 1/49$, $B = 48/49$.

175(a) Trivielt: Indsættelse af $x_t = 2^t$ i venstresiden giver 0.

175(b) Asymptotisk stabil når $|2a - \frac{1}{2}| < 1 - a$ og $-a < 1$, altså når $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.

175(c) $x_t = C(-\frac{1}{2})^t + D(2a)^t$ for $a \ne -\frac{1}{4}$ og $x_t = C(-\frac{1}{2})^t + Dt(-\frac{1}{2})^t$ for $a = -\frac{1}{4}$.

175(d) $x_t = 2^t + 2(-\frac{1}{2})^t$ (også for $a = -\frac{1}{4}$).

176(a) Hamilton: $H = (-2tx - u^2) + 2pu$.
(i) $u(t)$ maksimerer H, dvs $u = 1$ hvis $p \ge 1$, $u = p$ hvis $-1 \le p \le 1$ og $u = -1$ for $p \le -1$. (ii) $\dot{p} = -H'_x = 2t$, $\quad \dot{x} = 2u$. (iii) $x(0) = 1$, $\quad p(2) = 1$).

176(b) (ii)+(iii) giver $p = t^2 - 3$.

176(c) $p(\sqrt{2}) = -1$. Heraf: for $0 \le t \le \sqrt{2}$ er $u = -1$ og $x = -2t + 1$; specielt $x(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}+1$. For $\sqrt{2} \le t \le 2$ er $u = t^2 - 3$ og $x = \frac{2}{3}t^3 - 6t + A$ hvor $A = \frac{8}{3}\sqrt{2} + 1$.

176(d) ... konkave ... (H er sum af lineær i x, u og sur parabel i u, og $S(x) = x$).