Eksamensopgaver 2004–?? (DOK)

Opgave 84. (Juni 2004, opgave 1) (15 %).

(a) Løs *differentialligningen:*

$$\text{(HL)} \qquad \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0\,,$$

og afgør, om den er stabil.

(b) Løs dernæst differentialligningen:

$$\text{(IL)} \qquad \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^{-t}\,.$$

(c) Bestem løsningen x til (IL) med $x(0) = 0$ og $\dot{x}(0) = 0$.

Opgave 85. (Juni 2004, opgave 2) (25 %).
Betragt *differentialligningssystemet*

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) := x^3 - 9x - 10y \\ \dot{y} &= g(x, y) := -x - 2y \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x, y)$ og $g(x, y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (dvs. ligevægtstilstande) for $(*)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i, og godtgør hvilke punkter, der er ustabile.

(c) Skitser en bane, der forløber i overstensstemmelse med fortegnene i (b), og som går mod $(2, -1)$.

(d) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x, y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x, y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x, y)\big)$.

(e) Afgør for ethvert ligevægtspunkt, om det er lokalt asymptotisk stabilt. Bestem mindst et lokalt sadelpunkt.

Opgave 86. (Juni 2004, opgave 3) (15 %).
Betragt *differensligningen*

$$\text{(HL)} \qquad x_{t+2} + x_{t+1} + \tfrac{1}{2}x_t = 0 \quad , \quad t = 0, 1, \ldots\,.$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til (HL).

(b) Bestem løsningen til (HL) med $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$, og udregn denne løsnings x_3.

(c) Afgør, om ligningen (HL) er stabil.

Opgave 87. (Juni 2004, opgave 4) (20 %).
Betragt *variationsproblemet*

$$\text{(Min)} \qquad \int_0^1 \big(t x(t)^2 + t^2 x(t)\dot{x}(t) + \dot{x}(t)^2\big)dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = 1$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) og dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen.

(b) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1) = 2$.

(c) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1)$ *fri*.

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1) \geq 1$.

Opgave 88. (Juni 2004, opgave 5) (25 %).
Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\text{(Max)} \qquad \int_0^2 \big(2t x(t) + (4 + 2t)u(t)\big)dt$$

når $\dot{x} = -u^2$, $x(0) = 0$, $x(2)$ fri og $u \in [\,0, 1\,]$.

Antag, at (x, u) er en løsning til (Max) med adjungeret funktion p.

(a) Bestem den (sædvanlige) Hamiltonfunktion $H = H(t, -, -, p(t))$, og afgør, hvornår den er konkav.

(b) Bestem funktionen p og skitsér dens graf.

(c) Bestem funktionen u og skitsér dens graf.

(d) Bestem funktionen x og skitsér dens graf.

(e) Begrund, at problemet (Max) har netop én løsning.

Opgave 89. (Juli 2004, opgave 1) (15 %).

(a) Løs den *separable differentialligning:*

$$(*) \qquad \dot{x} = \big(2t x(t)\big)^{-1}.$$

(b) Bestem løsningen x til $(*)$ med $x(1) = 1$, bestem dens maksimale definitionsinterval, udregn $x(e)$, og tegn grafen.

(c) Bestem løsningen x til $(*)$ med $x(-e) = -1$, bestem dens maksimale definitionsinterval, udregn $\dot{x}(-e)$, og tegn grafen.

Opgave 90. (Juli 2004, opgave 2) (25 %).
Betragt *differentialligningssystemet*

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) := xy \\ \dot{y} &= g(x, y) := x^2 + y^2 - 16 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x, y)$ og $g(x, y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (dvs. ligevægtstilstande) for $(*)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i, og bestem mindst et ustabilt punkt.

(c) Skitser en mulig bane, der forløber i overstensstemmelse med fortegnene i (b), og som går fra $(3, 1)$ til $(5, 2)$. (Om en sådan bane faktisk findes, ønskes ikke kommenteret.)

(d) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x, y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x, y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x, y)\big)$.

(e) Afgør for ethvert ligevægtspunkt, om det er lokalt asymptotisk stabilt. Bestem mindst et lokalt sadelpunkt.

Opgave 91. (Juli 2004, opgave 3) (15 %).
Betragt *differenslignigen*

$$(\dagger) \qquad x_{t+2} = x_{t+1} + 2x_t \quad , \quad t = 0, 1, \ldots .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til (†).

(b) Bestem løsningen til (†) med $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$, og udregn denne løsnings x_5.

(c) Afgør, om ligningen (†) er stabil.

Opgave 92. (Juli 2004, opgave 4) (20 %).
Betragt *variationsproblemet*

$$(\text{Min}) \qquad \int_0^1 \big(2x(t)^2 + 2tx(t)\dot{x}(t) + \dot{x}(t)^2\big)dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = 0$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) og dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen.

(b) Bevis, at for ethvert $t \in [0, 1]$ er funktionen $(x, y) \mapsto 2x^2 + 2txy + y^2$ konveks. Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1) = 1$.

(c) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1)$ *fri*.

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1) \geq 1$.

Opgave 93. (Juli 2004, opgave 5) (25 %).
Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$(\text{Max}) \qquad \int_0^3 \big(-x(t) - \tfrac{1}{2}u(t)^2 + 2u(t)\big)dt$$

når $\dot{x} = u$, $x(0) = 0$, $x(3)$ fri og $u \in [0, 1]$.

Antag, at (x, u) er en løsning til (Max) med adjungeret funktion p.

(a) Bestem de ligninger, som ifølge maksimumsprincippet gælder for funktionerne x, u og p.

(b) Bestem funktionen p og skitsér dens graf.

(c) Bestem funktionen u og skitsér dens graf.

(d) Bestem funktionen x og skitsér dens graf.

(e) Begrund, at der er fundet en løsning til (Max), og at der ikke findes andre.

Opgave 94. (Juni 2005, opgave 1) (20 %).

(a) Løs *trediegradsligningen* (KL) $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$.

(b) Løs *differentialligningen* (HL) $\dddot{x} - 6\ddot{x} + 11\dot{x} - 6x = 0$.

(c) Løs *differentialligningen* (IL) $\dddot{x} - 6\ddot{x} + 11\dot{x} - 6x = 2e^t$.

(d) Bestem løsningen x til (IL) med $x(0) = 3$, $\dot{x}(0) = 7$ og $\ddot{x}(0) = 16$.

Opgave 95. (Juni 2005, opgave 2) (20 %).
Betragt *differentialligningssystemet*

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) := x^2 + y^2 - 5 \\ \dot{y} &= g(x, y) := x^2 - 1 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x, y)$ og $g(x, y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (dvs. ligevægtstilstande) for $(*)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i, og begrund, at punktet $(1, 2)$ er ustabilt.

(c) Skitser en mulig bane, der forløber i overstensstemmelse med fortegnene i (b), og som går fra $(0, 3)$ mod $(-1, 2)$. (Om en sådan bane faktisk findes, ønskes ikke kommenteret.)

(d) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x, y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x, y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x, y)\big)$. Afgør for ethvert ligevægtspunkt, om det er lokalt asymptotisk stabilt. Bestem mindst et lokalt sadelpunkt.

Opgave 96. (Juni 2005, opgave 3) (15 %).
Betragt *differensligningen*

$$(\dagger) \qquad x_{t+2} = -x_{t+1} - \tfrac{1}{4}x_t \quad , \quad t = 0, 1, \ldots .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til $(\dagger)$.

(b) Bestem løsningen til $(\dagger)$ med $x_0 = 1$ og $x_1 = 0$, og udregn denne løsnings x_5.

(c) Afgør, om ligningen $(\dagger)$ er stabil.

Opgave 97. (Juni 2005, opgave 4) (20 %).
Betragt *variationsproblemet*

$$(\text{Min}) \qquad \int_0^1 \big((\ln 2)^2 x(t)^2 + \dot{x}(t)^2\big)dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = 0$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) samt de af dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen.

(b) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1) = 2$.

(c) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1)$ *fri*.

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(1) \geq 2$.

Opgave 98. (Juni 2005, opgave 5) (25 %).
Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\text{(Max)} \qquad \int_0^2 \big(tx(t) - x(t)^2 - u(t)^2\big)dt$$

når $\dot{x} = (u+1)^2$, $x(0) = 1$, $x(2)$ fri og $u \in [\,1, 2\,]$.

Antag, at (x, u) er en løsning til (Max) med adjungeret funktion p.

(a) Bestem de ligninger, som ifølge maksimumsprincippet gælder for x, u og p.

(b) Bevis, at funktionerne x og p er strengt voksende, og at $p(t) < 0$ for $t < 2$.

(c) Bestem funktionerne u og x.

(d) Bestem funktionen p.

(e) Begrund, at der er fundet en løsning til (Max), og at der ikke findes andre.

Opgave 99. (Juli 2005, opgave 1) (20 %).

(a) Bestem samtlige løsninger til den *separable differentialligning:*

$$(*) \qquad \dot{x}(t) = x(t)^2 2^t\,,$$

idet definitionsintervallerne dog ikke ønskes angivet.

(b) Bestem løsningen x til $(*)$ med $x(1) = \ln 2$, og bestem denne løsnings maksimale definitionsinterval.

(c) Bestem løsningen x til $(*)$ med $x(1) = -\ln 2$, og bestem denne løsnings maksimale definitionsinterval.

(d) Bestem løsningen x til $(*)$ med $x(1) = -\ln\sqrt{2}$, og bestem denne løsnings maksimale definitionsinterval.

Opgave 100. (Juli 2005, opgave 2) (20 %).
Betragt *differentialligningssystemet*

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) := x^2 - y \\ \dot{y} &= g(x, y) := x^2 - (y-2)^2 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x, y)$ og $g(x, y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (dvs. ligevægtstilstande) for $(*)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i, og begrund, at punktet $(1, 1)$ er ustabilt.

(c) Skitser en mulig bane, der forløber i overstensstemmelse med fortegnene i (b), og som går fra $(-3, 0)$ mod $(-1, 1)$. (Om en sådan bane faktisk findes, ønskes ikke kommenteret.)

(d) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x, y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x, y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x, y)\big)$. Afgør for ethvert ligevægtspunkt, om det er lokalt asymptotisk stabilt. Bestem samtlige lokale sadelpunkter.

Opgave 101. (Juli 2005, opgave 3) (15 %).
Betragt *differenslignigerne*

$$\begin{aligned} &\text{(IL)} \quad x_{t+2} - x_t = t \quad , \quad t = 0, 1, \ldots \\ &\text{(HL)} \quad x_{t+2} - x_t = 0 \quad , \quad t = 0, 1, \ldots . \end{aligned}$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til (HL). Afgør, om løsningerne er stabile.

(b) Bestem den fuldstændige løsning til (IL).

(c) Bestem x_5 for den løsning x til (IL) med $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$.

Opgave 102. (Juli 2005, opgave 4) (20 %).
Betragt *variationsproblemet*

$$\text{(Min)} \qquad \int_0^{\ln 2} \big(x(t)^2 + x(t)\dot{x}(t) + \dot{x}(t)^2 + 2x(t) + 2\dot{x}(t)\big)dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = 1$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) samt de af dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen.

(b) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2) = 3$.

(c) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2)$ *fri*.

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2) \geq 3$.

Opgave 103. (Juli 2005, opgave 5) (25 %).
Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\text{(Max)} \qquad \int_0^{\ln 2} \big(2tx(t) - x(t)^2 - u(t)^2\big)dt$$

når $\dot{x} = u$, $x(0) = 0$, $x(\ln 2) = 0$ og $u \leq 1$.

Antag, at (x, u) er en løsning til (Max) med adjungeret funktion p.

(a) Begrund, at den tilhørende (sædvanlige) Hamiltonfunktion er konkav.

(b) Bestem de ligninger, som ifølge maksimumsprincippet gælder for x, u og p.

(c) Bestem $x(t)$, når $u(t) < 1$.

(d) Bestem $u(t)$ og $p(t)$, når $u(t) < 1$.

(e) Bestem en løsning til (Max).

Opgave 104. (Juni 2006, opgave 1) (20 %).
Betragt *differentialligningen*

$$\text{(IL)} \qquad \dddot{x} - 2\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 5e^{2t} \, .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning (FHL) til den tilsvarende *homogene* ligning (HL).

(b) Bestem den fuldstændige løsning (FIL) til (IL).

(c) Bestem løsningen x til (IL) med $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ og $\ddot{x}(0) = -1$

(d) Afgør om (IL) er lokalt asymptotisk stabil.

Opgave 105. (Juni 2006, opgave 2) (20 %).
Betragt *differentialligningssystemet*

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) := x^2 + y^2 - 2 \\ \dot{y} &= g(x, y) := x^2 - y^2 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} .$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x, y)$ og $g(x, y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (dvs. ligevægtstilstande) for $(*)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i. Skitser en mulig bane, der forløber i overstensstemmelse med pilesymbolerne, og som går fra $(0, 2)$ mod $(1, 1)$. (Om en sådan bane faktisk findes, ønskes ikke kommenteret.)

(c) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x, y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x, y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x, y)\big)$.

(d) Afgør for ethvert ligevægtspunkt, om det er lokalt asymptotisk stabilt. Bestem mindst et lokalt sadelpunkt.

Opgave 106. (Juni 2006, opgave 3) (15 %). Lad a være et positivt reelt tal.

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den *homogene differensligning:*

$$(\mathrm{HL}_a) \qquad x_{t+2} + a^2 x_t = 0 \quad , \quad t = 0, 1, \ldots .$$

(b) Bestem mængden af $a > 0$ for hvilke (HL_a) er lokalt asymptotisk stabil.

(c) Bestem for $a = \frac{1}{2}$ løsningen til (HL_a) med $x_0 = 1$ og $x_1 = 2$. Udregn denne løsnings x_5.

Opgave 107. (Juni 2006, opgave 4) (20 %).
Betragt *variationsproblemet*

$$(\mathrm{Min}) \qquad \int_0^{\ln 2} \Big(\big(x(t) + \dot{x}(t)\big)^2 + 2x(t) \Big) dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = -1$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) samt de af dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen.

(b) Begrund, at afbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $F(x, y) := (x + y)^2 + 2x$ er konveks.

Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2) = 2$.

(c) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2)$ *fri*, og udregn denne løsnings værdi for $t = \ln 2$.

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2) \geq 2$.

Opgave 108. (Juni 2006, opgave 5) (25 %).
Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\text{(Max)} \qquad \int_0^1 \big(x(t) - e^{u(t)}\big)dt$$

når $\dot{x} = u - x$, $x(0) = 1$, $x(1)$ er fri, og u tilhører et kontrolrestriktionsinterval I, der angives senere.

Antag, at (x, u) er et tilladt par for (Max), således at maksimumsprincippets betingelser gælder for (x, u) med adjungeret funktion p.

(a) Bestem disse betingelser for x, u og p.

(b) Bestem funktionen p. (Dette kan gøres uden at kende I.) Begrund, at $p(t) > 0$ for $t < 1$.

(c) Antag nu, at $I = [0\,,1]$. Bestem funktionerne u og x i dette tilfælde, og begrund, at (x, u) er en løsning til (Max).

(d) Antag dernæst, at $I = \mathbb{R}$. Bestem funktionen u i dette tilfælde, og begrund, at der findes netop en løsning (x, u) til (Max), men x ønskes ikke angivet eksplicit.

(e) Antag fortsat, at $I = \mathbb{R}$. Lad $G : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ være stamfunktionen til funktionen $u(t)e^t$ med $G(0) = 1$ (men G ønskes ikke bestemt). Bevis, at $x(t) = G(t)e^{-t}$ (og x ønskes stadig ikke angivet eksplicit).

Opgave 109. (Juli 2006, opgave 1) (15 %).
(a) Bestem $a, b \in \mathbb{R}$, så der for alle $t \in \mathbb{R}$ med $|t| \neq 2$ gælder:

$$(\dagger) \qquad \frac{4}{t^2 - 4} = \frac{a}{t-2} + \frac{b}{t+2}\,.$$

(b) Bestem den fuldstændige løsning til *differentialligningen*

$$(*) \qquad \dot{x} = \frac{4x}{t^2 - 4}\,.$$

(c) Bestem først løsningen x til $(*)$ med $x(1) = 1$ og denne løsnings maksimale definitionsinterval. Bestem dernæst løsningen x til $(*)$ med $x(-3) = 0$ og denne løsnings maksimale definitionsinterval.

Opgave 110. (Juli 2006, opgave 2) (20 %).
Betragt *differentialligningssystemet*

$$(**) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} y \\ \dot{y} &= g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - y - 1 \end{aligned}$$

og *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x, y)$ og $g(x, y)$, og bestem samtlige *ligevægtspunkter* (dvs. ligevægtstilstande) for $(**)$.

(b) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x, y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x, y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x, y)\big)$. Afgør for ethvert ligevægtspunkt, om det er lokalt asymptotisk stabilt. Bestem samtlige lokale sadelpunkter.

(c) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som F og G inddeler planen i.

(d) Skitsér en mulig bane fra $(0, 1)$ mod $(1, 0)$, der forløber i overstensstemmelse med pilesymbolerne.

Skitsér endvidere en mulig bane fra $(2, -1)$ mod $(1, 0)$, der forløber i overstensstemmelse med pilesymbolerne og informationerne fra (b).

Skitsér endelig en mulig bane fra $(0, 1)$ mod $(-1, 0)$, der forløber i overstensstemmelse med pilesymbolerne, og som går gennem *fire* regioner.

(Om sådanne baner faktisk findes, ønskes ikke kommenteret.)

Opgave 111. (Juli 2006, opgave 3) (20%).

(a) Bestem
den fuldstændige løsning til den *homogene differensligning:*

$$\text{(HL)} \qquad x_{t+3} - x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = 0 \quad , \quad t = 0, 1, \ldots .$$

(b) Bestem den fuldstændige løsning til den *inhomogene differensligning:*

$$\text{(IL)} \qquad x_{t+3} - x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = 8 \quad , \quad t = 0, 1, \ldots .$$

(c) Bestem løsningen til (IL) med $x_0 = 2$, $x_1 = 2$ og $x_2 = 10$. Udregn denne løsnings x_5.

(d) Afgør om (IL) er lokalt asymptotisk stabil.

Opgave 112. (Juli 2006, opgave 4) (25 %).
Betragt *variationsproblemet*

$$\text{(Min)} \qquad \int_0^{\pi} \Big(\big(x(t) + 2\sin t\big)^2 + \big(\dot{x}(t) + 1\big)^2 \Big) dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = 0$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) samt de af dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen.

(b) Bevis, at afbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $F(x, y) \overset{\text{def}}{=\!=} (x + 2\sin t)^2 + (y + 1)^2$ er konveks.

(c) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\pi) = 0$.

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er, at $x(\pi)$ er *fri*. Begrund, at der her gælder $x(\pi) < 0$.

(e) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\pi) \geq 0$.

Opgave 113. (Juli 2006, opgave 5) (20 %).
Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\text{(Max)} \qquad \int_0^2 \big(x(t) - e^{u(t)}\big) dt$$

når $\dot{x} = u$, $x(0) = 0$, $x(2)$ er fri, og $u \in [0, 1]$.

Antag, at (x, u) er et tilladt par for (Max), således at maksimumsprincippets betingelser gælder for (x, u) med adjungeret funktion p.

(a) Bestem de betingelser, som x, u og p ifølge maksimumsprincippet opfylder.

(b) Bestem funktionen p, og skitsér dens graf.

(c) Bestem funktionen u.

(d) Bestem funktionen x, og skitsér dens graf.

Opgave 114. (Maj 2007, opgave 1) (20 %).
Lad a være et reelt tal, og betragt den *homogene* differentialligning

$$(\mathrm{HL}_a) \qquad \ddot{x} - (a+1)\dot{x} + ax = 0\,.$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning, når $a \neq 1$.

(b) Bestem den fuldstændige løsning, når $a = 1$.

(c) Bestem den fuldstændige løsning til den *inhomogene* ligning

$$(\mathrm{IL}_1) \qquad \ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t\,.$$

(d) Afgør om (IL_1) er (lokalt asymsymptotisk) stabil.

Opgave 115. (Maj 2007, opgave 2) (25 %).
Betragt *differentialligningssystemet*

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} y - x^2 \\ \dot{y} &= g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (y-1)(y-4) \end{aligned}$$

samt *Jacobi–matricen*

$$\underline{\underline{J}}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

(a) Skitsér på en tegning *nulpunktsmængderne* F og G for henholdsvis $f(x, y)$ og $g(x, y)$, og bestem og angiv samtlige ligevægtspunkter for $(*)$.

(b) Udfør en *faseplananalyse:* Markér med pilesymboler på tegningen fortegn for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de regioner, som F og G inddeler planen i.

(c) Benyt faseplansanalysen til at begrunde, at punktet $(-2, 4)$ *ikke* er lokalt asymptotisk stabilt.

(d) Bestem Jacobi–matricen $\underline{\underline{J}}(x, y)$, sporet $\operatorname{tr}\big(\underline{\underline{J}}(x, y)\big)$ og determinanten $\det\big(\underline{\underline{J}}(x, y)\big)$.

(e) Afgør for ethvert ligevægtspunkt, om det er lokalt asymptotisk stabilt. Bestem mindst et lokalt sadelpunkt.

Opgave 116. (Maj 2007, opgave 3) (10 %).

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den *homogene differensligning:*

$$(\dagger) \qquad x_{t+2} = -2x_{t+1} - 2x_t \quad , \quad t = 0, 1, \ldots\,.$$

(b) Bestem løsningen til $(\dagger)$ med $x_0 = 1$ og $x_2 = 2$. Udregn denne løsnings x_1 og x_4.

Opgave 117. (Maj 2007, opgave 4) (20 %).
Betragt *variationsproblemet*

$$\text{(Min)} \qquad \int_0^{\ln 2} \big(x(t)^2 + 2tx(t)\dot{x}(t) + e^t \dot{x}(t)^2\big)dt$$

med *begyndelsesværdibetingelsen* $x(0) = 0$.

(a) Bestem *Euler–ligningen* (EL) samt de af dens løsninger, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen.

(b) Betragt afbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $F(x, y) \overset{\text{def}}{=\!=} x^2 + 2txy + e^t y^2$, og bevis, at den er konveks for alle $t \in [0, \ln 2]$.

Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2) = 1$.

(c) Bestem en funktion x, der løser problemet (Min), når slutværdien $x(\ln 2)$ er *fri*, og angiv $x(\ln 2)$.

(d) Løs problemet (Min), når slutværdibetingelsen er $x(\ln 2) \geq 1$.

Opgave 118. (Maj 2007, opgave 5) (25 %).
Betragt det *optimale kontrolproblem*

$$\text{(Max)} \qquad \int_0^2 \big(x(t) - u(t) - u(t)^2\big)dt$$

når $\dot{x} = u$, $x(0) = 1$, $x(2)$ er fri, og $u \in [0, 1]$.

Antag, at (x, u) er et tilladt par for (Max), således at maksimumsprincippets betingelser gælder for (x, u) med adjungeret funktion p.

(a) Bestem disse betingelser for x, u og p.

(b) Bestem funktionen p.

(c) Bestem funktionen u.

(d) Bestem funktionen x.

(e) Begrund, at problemet (Max) er løst.

Opgave 119. (Maj 2008, opgave 1)
Find en løsning til differentialligningen

$$\dot{x} = (x + 1) \cdot (t^2 + \cos t)\ ,\ x(0) = 4\ .$$

Opgave 120. (Maj 2008, opgave 2)
Find en løsning til differentialligningen

$$\dot{x} = x - 5x^5\ ,\ x(0) = \frac{1}{2}\ .$$

Opgave 121. (Maj 2008, opgave 3)
Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\ddot{x} - 7\dot{x} + 10x = e^{2t}\ .$$

Opgave 122. (Maj 2008, opgave 4)
Betragt differentialligningen

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 4\frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + x = t - 3 \, .$$

(a) Opskriv den karakteristiske ligning, og vis, at den har én reel rod med multiplicitet 4.
(b) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Opgave 123. (Maj 2008, opgave 5)
Betragt systemet af differentialligninger

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + y^2 - 2 \, , \\ \dot{y} &= x^3 - y \, . \end{aligned}$$

(a) Tegn kurverne $x^2 + y^2 - 2 = 0$ og $x^3 - y = 0$, og find systemets ligevægtspunkter.
(b) Find for hvert ligevægtspunkt dettes art (dvs. afgør, om det er stabilt, en kilde, et sadelpunkt eller et center).

Opgave 124. (Maj 2008, opgave 6)
(a) Find løsningen $(x_t)_{t \geq 0}$ til differensligningen

$$x_{t+2} = 2x_{t+1} + x_t \, , \; x_0 = 0 \, , \; x_1 = 1 \, .$$

(b) Vis, at følgen $\left(\frac{x_{t+1}}{x_t}\right)_{t \geq 1}$ er konvergent, og find grænseværdien.

Opgave 125. (Maj 2008, opgave 7)
Betragt variationsproblemet

$$\min \int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2 + t^2\dot{x})dt \, , \; x(0) = 2 \, , \; x(1) = e + e^{-1} + 1 \, .$$

(a) Opskriv Euler-ligningen.
(b) Find den løsning til Euler-ligningen, som opfylder randkravene.
(c) Afgør med henvisning til en sætning i bogen, om den fundne funktion løser minimeringsproblemet.

Opgave 126. (Maj 2008, opgave 8)
Antag, at (x, u) er en løsning til skrotværdiproblemet (norsk: *skrapverdiproblemet*)

$$\text{maks} \left\{ \int_0^\pi (x \cdot \sin t)dt - x(\pi) \right\}$$

med bibetingelserne

$$x(0) = 0 \, , \; x(\pi) \text{ fri} \, , \; \dot{x} = u \cdot \sin t \, , \; u \in [0, 1] \, .$$

(a) Opskriv Hamilton-funktionen, skrotværdifunktionen og transversalitetsbetingelsen, og bestem den adjungerede funktion p.
(b) Find kontrolfunktionen u.
(c) Find tilstandsvariablen x.
(d) Afgør med henvisning til en sætning i bogen, om det ovenfor fundne par (x, u) faktisk løser skrotværdiproblemet.

Opgave 127. (maj 2009, opgave 1)
Betragt følgende differentialligning:

$$\ddot{x} - x = e^t - 2\sin t.$$

(a) Bestem den generelle løsning til ligningen.

(b) Bestem den løsning $x(t)$ til ligningen, som opfylder $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Opgave 128. (maj 2009, opgave 2)
Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= xy, \\ g(x, y) &= (1 + x)(1 - y). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurver, dvs kurven hvor $f(x, y) = 0$, og kurven hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler ($\llcorner$, $\lrcorner$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af de to kurver. [Bemærk: Hver af de to nul-kurver består af to kurver.]

(c) Skitser banen for en kurve i planen, der begynder i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ og hvis forløb er i overensstemmelse med fortegnsbestemmelserne i (b).

(d) Lad $M \subseteq \mathbb{R}^2$ betegne delmængden bestemt ved ulighederne $x > 0$ og $0 < y < 1$. Lad $(x(t), y(t))$ være en løsning, defineret for alle $t \geqslant t_0$ og med $(x(t_0), y(t_0)) \in M$. Begrund, at $(x(t), y(t)) \in M$ for alle $t \geqslant t_0$. Hvad sker der med $x(t)$ og $y(t)$ for $t \to \infty$?

(e) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgave 129. (maj 2009, opgave 3)
Betragt følgende differensligning:

$$(*) \qquad x_{t+4} - \tfrac{1}{2}x_{t+2} + \tfrac{1}{16}x_t = 9 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning. [Vink: For alle komplekse tal z gælder: $z^4 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{16} = (z - \frac{1}{2})^2(z + \frac{1}{2})^2$.]

(b) Bestem en partikulær løsning til (*).

(c) Afgør om differensligningen er globalt asymptotisk stabil.

(d) Vis, at hvis følgen x_t løser (*), så er følgen x_t konvergent. Bestem grænseværdien.

Opgave 130. (maj 2009, opgave 4)
Betragt følgende variationsproblem:

$$(\min) \int_0^{1/3} (3tx\dot{x} + 2x^2 + \tfrac{1}{2}\dot{x}^2)\, dt, \quad \text{for } x(0) = 1, \text{ og } x(\tfrac{1}{3}) \text{ fri.}$$

(a) Opstil Eulerligningen og transversalitetsbetingelsen svarende til problemet.

(b) Angiv den fuldstændige løsning til Eulerligningen.

(c) Bestem den funktion $x = x(t)$, som løser Eulerligningen og opfylder betingelserne i endepunkterne.

(d) Gør rede for, at funktionen fra (c) løser variationsproblemet.

Opgave 131. (maj 2009, opgave 5)
Betragt følgende problem om optimal kontrol, med skrotværdifunktion:

$$\text{(max)} \quad -x(\ln 4) + \int_0^{\ln 4} (8e^{-t}x + u)dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1,\ \dot{x} = -x - u,\ x(0) = 1,$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer } -x(\ln 4) + \int_0^{\ln 4} (8e^{-t}x(t) + u(t))\,dt \text{ for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1,\ \dot{x}(t) = -x(t) - u(t),\ x(0) = 1.$$

(a) Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet. Opstil de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).

(b) Bestem de funktioner x, u og p, som opfylder betingelserne i (a) og bibetingelserne. [Vink: for at bestemme $u(t)$ og $x(t)$ må du vise, at ligningen $p(t_0) = 1$ gælder, hvis og kun hvis $t_0 = \ln 2$.]

(c) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (b) er den optimale kontrol.

Opgave 132. (august 2009, opgave 1)
Betragt følgende differentialligning:

$$\ddot{x} + x = e^t - 2\sin t.$$

(a) Bestem den generelle løsning til ligningen.

(b) Bestem den løsning $x(t)$ til ligningen, som opfylder $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Opgave 133. (august 2009, opgave 2)
Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= (x - y)(y + 1), \\ g(x, y) &= y(y - 1). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurver, dvs kurven hvor $f(x, y) = 0$, og kurven hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler (↳, ↲, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af de to kurver. [Bemærk: Hver af de to nul-kurver består af to linier.]

(c) Skitser banerne for de tre løsningskurver, dvs kurver bestemt ved løsninger $(x(t), y(t))$, der begynder, henholdsvis, i $(1-\varepsilon, 1-\varepsilon)$, i $(1, 1)$, og i $(1+\varepsilon, 1)$, hvor $\varepsilon = 1/10$.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgave 134. (august 2009, opgave 3)
Betragt følgende differensligningssystem:

$$(*) \qquad \begin{aligned} x_{t+1} &= \tfrac{1}{3}x_t + \tfrac{1}{3}y_t + 2, \\ y_{t+1} &= \tfrac{1}{3}x_t - \tfrac{1}{6}y_t + 5, \end{aligned} \qquad \text{for } t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Bestem de to konstante følger x_t og y_t, der løser systemet (*).

(b) Afgør om systemet (*) er (globalt asymptotisk) stabilt.

(c) Antag, at følgerne x_t og y_t løser systemet (*). Begrund, at følgerne er konvergente, og bestem deres grænseværdier.

(d) Bestem den fuldstændige løsning til systemet (*).

Opgave 135. (august 2009, opgave 4)
(a) Vis, at funktionerne $x(t) = t^2$ og $x(t) = t^{-1}$ er løsninger til differentialligningen,

$$\ddot{x} = 2t^{-2}x, \qquad t > 0,$$

og angiv den generelle løsning.

(b) Bestem den funktion $x(t)$, som løser differentialligningen i (a) og opfylder, at $x(1) = 17$ og $\dot{x}(2) = 0$.

(c) Gør rede for, at funktionen $x(t)$ bestemt i (b) for $1 \leqslant t \leqslant 2$ løser følgende variationsproblem: [Fodnote[1]]

$$(\min) \int_1^2 \left(\dot{x}^2 + 2t^{-2}x^2\right) dt, \quad \text{for } x(1) = 17, \text{ og } x(2) \text{ fri.}$$

Opgave 136. (august 2009, opgave 5)
Betragt følgende problem om optimal kontrol:

$$(\max) \quad \int_0^{\frac{1}{3}} (-4x^2 - u^2 - 6txu)dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1, \ \dot{x} = t + u, \ x(0) = 0, x(\tfrac{1}{3}) \text{ fri,}$$

eller, udførligt: Maksimer

$$\int_0^{\frac{1}{3}} (-4x(t)^2 - u(t)^2 - 6tx(t)u(t))dt \quad \text{for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1, \ \dot{x}(t) = t + u(t), \ x(0) = 0, x(\tfrac{1}{3}).\text{fri}$$

(a) Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet. Opstil de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).

(b) Antag, at funktionerne x, u, p opfylder betingelserne i (a) og bibetingelserne. Gør rede for, at der for $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}$ gælder: $\dot{x}(t) \geqslant 0$, $x(t) \geqslant 0$, $\dot{p}(t) \geqslant 0$, $p(t) \leqslant 0$. Bestem dernæst funktionerne u, x og p.

(c) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (b) er den optimale kontrol.

[1] Originalteksten havde (fejlagtigt) $\dot{x}^2 + 2t^{-1}x^2$ i integralet!

Opgave 137. (maj 2010, opgave 1)

(a) Betragt i området af $TX-$planen givet ved $\{(t, x) \mid t > -1 \text{ og } x > 0\}$ følgende differentialligning:

$$\dot{x} = -4x^2(1+t)^3.$$

Bestem den løsning til ligningen som opfylder $x(0) = 1$.

(b) Betragt i området af $TX-$planen givet ved $\{(t, x) \mid t > -1\}$ følgende differentialligning:

$$\dot{x} + \frac{4}{1+t}x = \frac{4}{1+t}.$$

Bestem den løsning til ligningen som opfylder $x(0) = 1$.

Opgave 138. (maj 2010, opgave 2)
Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 - 1, \\ g(x, y) &= (x + y + 1)(x + y - 1). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurven, dvs kurven hvor $f(x, y) = 0$, og de 2 linier hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler ($\llcorner$, $\lrcorner$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af kurven og de 2 linier.

(c) Vis at den løsningskurve $\big(x(t), y(t)\big)$ til differentialligningssystemet, som opfylder $\big(x(0), y(0)\big) = \big(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\big)$, forløber indenfor enhedcirklen for $t > 0$.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgave 139. (maj 2010, opgave 3)
Betragt følgende differensligningssystem:

$$(*) \qquad \begin{aligned} x_{t+1} &= -x_t - y_t + 1, \\ y_{t+1} &= \tfrac{2}{3}x_t + \tfrac{5}{6}y_t. \end{aligned} \qquad \text{for } t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Bestem de to konstante følger x_t og y_t, der løser systemet (*).

(b) Afgør om systemet (*) er globalt asymptotisk stabilt.

(c) Antag, at følgerne x_t og y_t løser systemet (*). Begrund, at følgerne er konvergente, og bestem deres grænseværdier.

(d) Bestem den fuldstændige løsning til systemet (*).

Opgave 140. (maj 2010, opgave 4)
Betragt følgende variationsproblem:

$$(\min) \int_0^1 (2x^2 + \dot{x}^2 + 2tx\dot{x} + 4t\dot{x} + 2x)\, dt, \quad \text{for } x(0) = 1, \text{ og } x(1) = 2.$$

(a) Opstil Eulerligningen.
(b) Bestem den løsning til Eulerligningen som opfylder de givne randbetingelser.
(c) Gør rede for, at funktionen fra (b) løser variationsproblemet.

Opgave 141. (maj 2010, opgave 5)
Betragt følgende problem om optimal kontrol, med skrotværdifunktion:

$$(\max) \quad -\tfrac{3}{2}x(\pi)^2 + \int_0^\pi x \sin t\, dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1,\ \dot{x} = u \sin t,\ x(0) = 0,$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer } -\tfrac{3}{2}x(\pi)^2 + \int_0^\pi x(t) \sin t\, dt \text{ for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1,\ \dot{x}(t) = u(t) \sin t,\ x(0) = 0.$$

Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet.

(a) Opskriv Hamiltonfunktionen og de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).
(b) Vis, at funktionen $x(t)$ er voksende og at $p(t)$ er aftagende på intervallet $[0, \pi]$. Vis, at der findes en værdi t^* med $0 < t^* < \pi$ så $p(t^*) = 0$.
(c) Bestem derefter funktionerne $u(t)$ og $x(t)$ og værdien t^*.
(d) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (c) er den optimale kontrol.

Opgave 142. (august 2010, opgave 1)
Der er givet en differentialligning

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 25x = 16e^{3t} + 50t^2 + t - 2.$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den homogene ligning.
(b) Bestem en partikulær løsning til den inhomogene ligning.
(c) Bestem den løsning til den inhomogene ligning som opfylder randbetingelserne $x(0) = 0$ og $\dot{x}(0) = 1$.

Opgave 143. (august 2010, opgave 2)
Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= -x^2 + 2x + 2y - 3, \\ g(x, y) &= -y^2 + 2x + 2y - 3. \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurver, dvs kurverne hvor $f(x, y) = 0$, og $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler ($\llcorner\!\!\rightarrow$, $\leftarrow\!\!\lrcorner$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af de 2 kurver.

(c) Lad $(x(t), y(t))$ betegne den løsningskurve til differentialligningssystemet som opfylder $(x(0), y(0)) = (2, 2)$. Angiv, med begrundelse, en begrænset delmængde af planen som vil indeholde alle punkterne $(x(t), y(t))$ for $t \geqslant 0$.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgave 144. (august 2010, opgave 3)
Betragt følgende (inhomogene) differensligning:

$$x_{t+3} - \tfrac{5}{2}x_{t+2} + 2x_{t+1} - \tfrac{1}{2}x_t = \left(\tfrac{1}{2}\right)^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Vis, at den konstante følge $x_t = 1$ løser den tilsvarende homogene ligning. [Vink: Tallet $z = 1$ er rod i polynomiet $z^3 - \frac{5}{2}z^2 + 2z - \frac{1}{2}$.]

(b) Bestem den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning.

(c) Bestem en partikulær løsning til den inhomogene ligning.

(d) Afgør om differensligningen er globalt asymptotisk stabil.

Opgave 145. (august 2010, opgave 4)
Betragt følgende variationsproblem:

$$(\min) \int_1^2 (tx^2 + 2e^t\dot{x}^2 + t^2x\dot{x})\,dt, \quad \text{for } x(1) = 1, \text{ og } x(2) = 1.$$

(a) Opstil Eulerligningen.

(b) Bestem den løsning til Eulerligningen som opfylder de givne randbetingelser.

(c) Gør rede for, at funktionen fra (b) løser variationsproblemet.

Opgave 146. (august 2010, opgave 5)
Betragt følgende problem om optimal kontrol:

$$(\max) \quad \int_0^{\ln 3} (-x + u)\,dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1,\ \dot{x} = u^2 - 2u + x,\ x(0) = 0,$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer} \int_0^{\ln 3} \big(-x(t) + u(t)\big)\,dt \quad \text{for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1,\ \dot{x}(t) = u(t)^2 - 2u(t) + x(t),\ x(0) = 0.$$

Slutværdien $x(\ln 3)$ er altså fri. Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet, og at p er den adjungerede funktion.

(a) Opskriv Hamiltonfunktionen og de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$.

(b) Bestem funktionen $p(t)$ og vis specielt, at $p(t) < 0$ for $t < \ln 3$.

(c) Bestem derefter funktionerne $u(t)$ og $x(t)$.

(d) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (c) er den optimale kontrol.

Opgave 147. (maj 2011, opgave 1)
Der er givet en differentialligning

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x \;=\; 4t^2 + 4t.$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den homogene ligning.

(b) Afgør om differentialligningen er globalt assymptotisk stabil.

(c) Bestem en partikulær løsning til den inhomogene ligning.

(d) Bestem den løsning til den inhomogene ligning som opfylder randbetingelserne $x(0) = 0$ og $\dot{x}(0) = -2$.

Opgave 148. (maj 2011, opgave 2)
Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= 2x^2 - y, \\ g(x, y) &= x(2x + y - 4). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Angiv koordinaterne for systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-mængder, dvs mængden hvor $f(x, y) = 0$, og mængden hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler ($\llcorner\!\!\rightarrow$, $\leftarrow\!\!\lrcorner$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de 8 områder, som planen deles i af disse mængder.

(c) Lad $\big(x(t), y(t)\big)$ betegne den løsningskurve til differentialligningssystemet, som opfylder $\big(x(0), y(0)\big) = (-1, 4)$. Vis at mængden af punkter i planen, som er givet ved $\{\big(x(t), y(t)\big) \,\big|\, t \geqslant 0\}$ er en begrænset delmængde af planen.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgave 149. (maj 2011, opgave 3)
Betragt følgende lineære system af første ordens differensligninger.

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \frac{3}{2}x_t - y_t \\ y_{t+1} &= 2x_t - \frac{3}{2}y_t - 3 \end{aligned}$$

(a) Bestem den konstante løsning $x_t = a,\ y_t = b$ til systemet.

(b) Bestem den fuldstændige løsning til systemet.

(c) Vis, at hvis følgerne x_t og y_t løser systemet, så er de begge konvergente. Bestem grænseværdierne.

Opgave 150. (maj 2011, opgave 4)
Betragt følgende variationsproblem:

$$(\max) \int_0^1 (-9x^2 + 4x\dot{x} - \dot{x}^2 + 18tx)\, dt, \quad \text{for } x(0) = 0, \text{ og } x(1) = e^3 - e^{-3} + 1.$$

(a) Opstil Eulerligningen.
(b) Bestem den løsning til Eulerligningen som opfylder de givne randbetingelser.
(c) Gør rede for, at funktionen fra (b) løser variationsproblemet.

Opgave 151. (maj 2011, opgave 5)
Betragt følgende problem om optimal kontrol:

$$(\max) \quad \int_0^{\sqrt{2}} (2tx + (t-2)u)dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 2,\ \dot{x} = (2-t)u,\ x(0) = 0,\ x(\sqrt{2}) \text{ fri.}$$

(a) Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet. Opstil de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$, hvor p er den adjungerede funktion.
(b) Bestem de funktioner x, u og p, som opfylder betingelserne i (a) og bibetingelserne.
(c) Begrund, at den fundne tilstandsfunktion $x(t)$ løser maksimeringsproblemet.

»»

Opgave 152. (August 2011, opgave 1)
Der er givet en differentialligning

$$\ddot{x} + 4x = 4\cos 2t + 8\sin 2t.$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den homogene ligning.
(b) Afgør om differentialligningen er globalt assymptotisk stabil.
(c) Bestem en partikulær løsning til den inhomogene ligning.
(d) Bestem den løsning til den inhomogene ligning som opfylder randbetingelserne $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$.

Opgave 153. (August 2011, opgave 2)
Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \quad \text{hvor} \quad \begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 - 25, \\ g(x, y) &= x^2 - y^2 - 7. \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Angiv koordinaterne for systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).
(b) Skitser på en tegning de to nul-mængder, dvs mængderne hvor $f(x, y) = 0$, og $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler (↳, ↲, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de 7 områder, som planen deles i af disse mængder.

(c) Lad $\big(x(t),\, y(t)\big)$ betegne den løsningskurve til differentialligningssystemet, som opfylder $\big(x(0),\, y(0)\big) = (6, 0)$. Vis at for $t \geqslant 0$ vil $g\big((x(t),\, y(t)\big) \geqslant 0$.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgave 154. (August 2011, opgave 3)
Betragt følgende anden ordens differensligning

$$x_{t+2} - x_{t+1} + \frac{1}{2}x_t = t.$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den homogene ligning.

(b) Afgør om løsningerne til den homogene ligning er stabile.

(c) Bestem en partikulær løsning til den inhomogene ligning.

(d) Bestem den løsning til den inhomogene ligning som opfylder $x_0 = -4$ og $x_1 = 0$.

Opgave 155. (August 2011, opgave 4)
Betragt følgende variationsproblem:

$$(\max) \int_0^1 \big(-(x+t)^2 + x\dot{x} - (\dot{x}+t)^2 \big)\, dt, \quad \text{for } x(0) = 2 \text{ og } x(1) = e.$$

(a) Opstil Eulerligningen.

(b) Bestem den løsning til Eulerligningen som opfylder de givne randbetingelser.

(c) Gør rede for, at funktionen fra (b) løser variationsproblemet.

Opgave 156. (August 2011, opgave 5)
Betragt følgende problem om optimal kontrol:

$$(\max) \quad \int_0^4 \Big(\frac{6}{2+t}x + (t-1)u \Big) dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1,\ \dot{x} = -\frac{1}{2+t}x - 2u,\ x(0) = -5,\ x(4) \text{ fri.}$$

(a) Antag, at (x, u) er et tilladt par, som løser problemet. Opstil de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$, hvor p er den adjungerede funktion.

(b) Bestem de funktioner x, u og p, som opfylder betingelserne i (a) og bibetingelserne.

(c) Begrund, at den fundne tilstandsfunktion $x(t)$ løser maksimeringsproblemet.

Opgave 157. (maj 2012, opgave 1)
Betragt differentialligningssystemet,

$$\dot{x} = -x^2, \qquad \dot{y} = 2xy,$$

for par af funktioner $(x, y) = (x(t), y(t))$ defineret i et interval omkring $t = 0$.

(a) Angiv den fuldstændige løsning til ligningssystemet. [Vink: Bestem den generelle løsning $x = x(t)$ til den første ligning, og indsæt denne løsning i den anden ligning.]

(b) Angiv for hvert par af løsninger (x, y) det maksimale definitionsinterval, som indeholder $t = 0$.

(c) Bestem det par af løsninger, som opfylder $x(0) = \frac{1}{3}$, $y(0) = 1$.

Opgave 158. (maj 2012, opgave 2)
Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= y - x^2, \\ g(x, y) &= x(x - y + 2). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurver, dvs kurven hvor $f(x, y) = 0$, og de 2 linier hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler ($\llcorner\!\!\rightarrow$, $\leftarrow\!\!\lrcorner$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af kurven og de 2 linier.

(c) Lad D være området i xy-planen bestemt ved $x \geqslant 0$, $y \geqslant x^2$, $x - y + 2 \geqslant 0$. Lad $(x(t), y(t))$ være en løsningskurve, som opfylder, at $(x(0), y(0)) \in D$. Vis, at $(x(t), y(t)) \in D$ for $t \geqslant 0$, og undersøg løsningskurven for $t \to \infty$.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgave 159. (maj 2012, opgave 3)
Betragt følgende differensligningssystem, hvor $k \in \mathbb{R}$ er et givet tal:

$$(*) \qquad \begin{aligned} x_{t+1} &= \tfrac{1}{2}x_t + ky_t - \tfrac{1}{2}(-1)^t k^t, \\ y_{t+1} &= kx_t + \tfrac{1}{2}y_t + \tfrac{1}{2}(-1)^t k^t. \end{aligned} \qquad \text{for } t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) For hvilke værdier af k er differensligningssystemet asymptotisk stabilt?

(b) Vis, at med følgerne $x_t = (-1)^t k^t$, $y_t = (-1)^{t+1} k^t$ for $t = 0, 1, 2, \ldots$ er parret (x_t, y_t) en løsning.

(c) Antag, at $k = 1$. Bestem den generelle løsning til det tilhørende homogene system.

(d) Antag stadig, at $k = 1$. Bestem den generelle løsning til differensligningssystemet.

Opgave 160. (maj 2012, opgave 4)
Betragt følgende variationsproblem (hvor $r \in \mathbb{R}$ er konstant):

$$(\min) \int_0^1 (2x^2 + (4t - 5e^{rt})x\dot{x} + 12e^{rt}\,\dot{x}^2)\,dt, \quad \text{for } x(0) = 1, \text{ og } x(1) = e^{\frac{1}{6}}.$$

(a) Opstil Eulerligningen.

(b) Antag i det følgende, at $r = \frac{2}{3}$. Eulerligningen er da ligningen $\ddot{x} + \frac{2}{3}\dot{x} - \frac{5}{36}x = 0$. Bestem den løsning til Eulerligningen, som opfylder de givne randbetingelser.

(c) Gør rede for, stadig for $r = \frac{2}{3}$, at funktionen fra (b) løser variationsproblemet. [Du kan fx have brug for at vise for $0 \leqslant t \leqslant 1$, at $|4t - 5e^{\frac{2}{3}t}| \leqslant 5e^{\frac{2}{3}}$; i øvrigt må du bruge vurderingen $e^{\frac{4}{3}} \leqslant 3,8$.]

Opgave 161. (maj 2012, opgave 5)
Betragt følgende problem om optimal kontrol:

$$(\max) \quad \int_0^3 (-u-1)x^2\,dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1,\ \dot{x} = -ux^2, \quad x(0) = \tfrac{1}{3},\ x(3) \text{ fri.}$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer} \int_0^3 (-u(t)-1)x(t)^2\,dt \text{ for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1,\ \dot{x}(t) = -u(t)x(t)^2,\ x(0) = \tfrac{1}{3},\ x(3) \text{ fri.}$$

Antag, at (x, u) er et tilladt par af funktioner, som løser problemet.

(a) Opskriv Hamiltonfunktionen og de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).

Man kan vise for alle $t \in [0, 3]$, at $x(t) > 0$ og at $p(t) > -2$. Det kræves ikke bevist, men det må bruges i det følgende.

(b) Vis, at $p(t)$ er strengt voksende på intervallet $[0, 3]$. Vis, at der højst findes én værdi $t^* \in [0, 3]$, så $p(t^*) = -1$. Bestem dernæst $x(t)$, $u(t)$ og $p(t)$ for $t \in [t^*, 3]$.

(c) Bestem derefter værdien t^* og funktionerne $x(t)$, $u(t)$ og $p(t)$ for alle $t \in [0, 3]$.

(d) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (c) er den optimale kontrol.

Opgave 162. (august 2012, opgave 1)
(a) Bestem den generelle løsning til differentialligningen $\ddot{x} - \frac{1}{6}\dot{x} - \frac{1}{6}x = e^t$.
(b) Afgør om differentialligningen i (a) er asymptotisk stabil.
(c) Bestem den generelle løsning til differensligningen $x_{t+2} - \frac{1}{6}x_{t+1} - \frac{1}{6}x_t = e^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$.
(d) Afgør om differensligningen i (c) er asymptotisk stabil.

Opgave 163. (august 2012, opgave 2)
Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= y - x^2, \\ g(x, y) &= (x+1)(4-y). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurver, dvs kurven hvor $f(x, y) = 0$, og kurven (de 2 linier) hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler ($\rightarrow$, $\searrow$, $\downarrow$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af de to nulkurver.

(c) Lad D være området i xy-planen bestemt ved $x \geqslant -1$, $y \geqslant x^2$, $y \leqslant 4$. Lad (x_0, y_0) være et punkt i D, og lad $(x(t), y(t))$ være løsningen, som opfylder, at $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Beskriv, for nogle udvalgte punkter (x_0, y_0) i D, løsningens bana for $t \geqslant 0$.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne.

Opgave 164. (august 2012, opgave 3)
Betragt følgende (inhomogene) differentialligningssystem, hvor $k \in \mathbb{R}$ er et givet tal:

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= -\tfrac{1}{2}x + ky + \tfrac{1}{2}e^{-kt}, \\ \dot{y} &= \quad kx - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}e^{-kt}. \end{aligned}$$

(a) For hvilke værdier af k er systemet asymptotisk stabilt?
(b) Vis, at med funktionerne $x = e^{-kt}$, $y = -e^{-kt}$ er parret (x, y) en løsning.
(c) Antag, at $k = 1$. Bestem den generelle løsning til det tilhørende homogene system.
(d) Antag stadig, at $k = 1$. Bestem den generelle løsning til differentialigningssystemet (*).

Opgave 165. (august 2012, opgave 4)
Betragt følgende variationsproblem, hvor a og b er positive konstanter:

$$(\min) \int_0^1 e^{a\dot{x}+bx}\, dt, \quad \text{for } x(0) = 0, \text{ og } x(1) = 0.$$

(a) Opstil Eulerligningen.
(b) Gør rede for, at en funktion $x = x(t)$, der tilfredsstiller Eulerligningen og de givne randbetingelser, vil løse minimeringsopgaven.
(c) Antag, at $a = b = 1$, hvor Eulerligningen bliver $\ddot{x} + \dot{x} = 1$. Løs minimeringsopgaven.

Opgave 166. (august 2012, opgave 5)
Betragt følgende problem om optimal kontrol (r og k er givne positive konstanter):

$$(\max) \quad \int_0^2 \left(ue^{(r+k)t} - kxe^{kt}\right) dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1, \ \dot{x} = ue^{rt}, \quad x(0) = 1, \ x(2) \text{ fri.}$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer} \int_0^2 \left(u(t)e^{(r+k)t} - kx(t)e^{kt}\right) dt \text{ for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1, \ \dot{x}(t) = u(t)e^{rt}, \ x(0) = 1, \ x(2) \text{ fri.}$$

Antag, at (x, u) er et tilladt par af funktioner, som løser problemet.

(a) Opskriv Hamiltonfunktionen og de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).
(b) Bestem funktionen $p(t)$. Begrund, at der findes et tal $t^* \in [0,2]$ således, at $u(t) = 0$ for $0 \leqslant t < t^*$ og $u(t) = 1$ for $t^* < t \leqslant 2$ (Det er ikke udelukket, at $t^* = 0$ eller $t^* = 2$).
(c) Antag, at $k = \ln 2$, og bestem værdien t^* og funktionerne x og u.
(d) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (c) er den optimale kontrol.

Opgave 167. (maj 2013, opgave 1)
Betragt for et reelt tal a den inhomogene differentialligning,

$$\ddot{x} - (2a - \tfrac{1}{2})\,\dot{x} - ax = (2a - \tfrac{1}{2}) \sin t - (a+1) \cos t.$$

(a) Vis, at funktionen $x = \cos t$ er en partikulær løsning.
(b) For hvilke værdier af a er ligningen asymptotisk stabil?
(c) Bestem den generelle løsning til den tilsvarende homogene ligning.
(d) Angiv den løsning $x = x(t)$ til den inhomogene ligning, som opfylder $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \frac{1}{2}$.

Opgave 168. (maj 2013, opgave 2)
Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= x(1 - x^2 - y^2), \\ g(x, y) &= y(4 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurver, altså dels kurverne hvor $f(x, y) = 0$, dels kurverne hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler (f.eks. $\uparrow$, $\downarrow$, $\rightarrow$, $\leftarrow$, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af nul-kurverne. Du må gerne indskrænke undersøgelsen til første kvadrant: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

(c) Lad D være området i xy-planen bestemt ved $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$. Lad $(x(t), y(t))$ være en løsningskurve, som opfylder, at $(x(0), y(0)) \in D$. Begrund, at $(x(t), y(t)) \in D$ for $t \geqslant 0$, og undersøg løsningskurven for $t \to \infty$.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne i første kvadrant.

Opgave 169. (maj 2013, opgave 3)
Betragt følgende variationsproblem, hvor a er en reel konstant:

$$\text{(min)} \qquad \int_1^2 (8tx + atx^2 + t^2 x\dot{x} + t\dot{x}^2)\, dt,$$

med begyndelsesbetingelsen $x(1) = 0$ og $x(2)$ fri.

(a) Opstil Eulerligningen.

(b) Gør rede for, at hvis $a \geqslant 1$, så vil en funktion $x = x(t)$, der tilfredsstiller Eulerligningen og begyndelsesbetingelsen og transversalitetsbetingelsen, også løse minimeringsopgaven.

(c) For $a = 1$ kan Eulerligningen reduceres til $\frac{d}{dt}\big(t\dot{x}\big) = 4t$. Bestem den fuldstændige løsning til denne ligning.

(d) Opstil transversalitetsbetingelsen (stadig for $a = 1$), og løs minimeringsopgaven.

Opgave 170. (maj 2013, opgave 4)
Betragt følgende differensligningssystem:

$$\text{(*)} \qquad \begin{aligned} x_{t+1} &= \phantom{\tfrac{7}{2}}x_t - \tfrac{1}{2}y_t + \tfrac{1}{2}, \\ y_{t+1} &= \tfrac{7}{2}x_t - \tfrac{3}{2}y_t - \tfrac{9}{2}, \end{aligned} \qquad \text{for } t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Lad (x_t, y_t) være løsningen bestemt ved $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Bestem (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

(b) Afgør, om differensligningssystemet er asymptotisk stabilt.

(c) Begrund, at for et vilkårligt par (x_t, y_t) af følger, der løser systemet, eksisterer grænseværdierne $\lim_{t\to\infty} x_t$ og $\lim_{t\to\infty} y_t$.

(d) Bestem de to grænseværdier i (c).

Opgave 171. (maj 2013, opgave 5)
Betragt følgende problem om optimal kontrol:

$$(\max) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x \sin t - \tfrac{1}{2}u^2)\, dt \quad \text{for } 0 \leqslant u \leqslant 1,\ \dot{x} = u, \quad x(0) = \tfrac{-\pi}{3},\ x(\tfrac{\pi}{2}) \text{ fri},$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x(t) \sin t - \tfrac{1}{2}u(t)^2)\, dt \text{ for } 0 \leqslant u(t) \leqslant 1,\ \dot{x}(t) = u(t),\ x(0) = \tfrac{-\pi}{3},\ x(\tfrac{\pi}{2}) \text{ fri}.$$

Antag, at (x, u) er et tilladt par af funktioner, som løser problemet.

(a) Opskriv Hamiltonfunktionen og de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).

(b) Bestem funktionen $p(t)$, og begrund, at $p(t)$ er strengt aftagende i intervallet $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, og at det eneste tal t^* i intervallet, for hvilket $p(t^*) = 1$, er $t^* = \frac{\pi}{3}$.

(c) Bestem derefter funktionerne $x(t)$, $u(t)$.

(d) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (c) er den optimale kontrol.

Opgave 172. (august 2013, opgave 1)
Betragt følgende lineære (inhomogene) differentialligningssystem, hvor $k \in \mathbb{R}$ er et givet tal:

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= kx + y + 1, \\ \dot{y} &= \phantom{kx + {}} ky. \end{aligned}$$

(a) For hvilke værdier af k er ligningssystemet asymptotisk stabilt?

(b) Bestem den generelle løsning til det tilsvarende homogene ligningssystem.

(c) Antag, at $k \neq 0$. Bestem den generelle løsning til differentialligningssystemet (*).

(d) Antag, at $k = 0$. Bestem den generelle løsning til differentialigningssystemet (*).

Opgave 173. (august 2013, opgave 2)
Betragt følgende differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \qquad \text{hvor} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= x(16 - x^2 - y^2), \\ g(x, y) &= y(6 - x - y). \end{aligned}$$

Der ønskes en faseplansanalyse i form af svar på de efterfølgende spørgsmål.

(a) Bestem systemets ligevægtspunkter (=stationære tilstande).

(b) Skitser på en tegning de to nul-kurver, altså dels kurverne hvor $f(x, y) = 0$, dels kurverne hvor $g(x, y) = 0$. Angiv med pilesymboler (f.eks. ↑ , ↓ , ↳, ↲, osv.) fortegnene for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i de områder, som planen deles i af nul-kurverne. Du må gerne indskrænke undersøgelsen til første kvadrant: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

(c) Lad $(x(t), y(t))$ være en løsningskurve, som opfylder, at $(x(0), y(0))$ ligger i første kvadrant. Begrund, at $(x(t), y(t))$ ligger i første kvadrant for alle $t \geqslant 0$, og undersøg løsningskurven for $t \to \infty$.

(d) Bestem Jacobi-matricen,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

og undersøg stabilitetsforholdene i ligevægtspunkterne i første kvadrant.

Opgave 174. (august 2013, opgave 3)
Betragt følgende variationsproblem, hvor b og c er reelle konstanter:

$$\text{(max)} \qquad \int_1^2 (ct^{b-2}x^2 - t^b\dot{x}^2)\,dt$$

med begyndelsesbetingelsen $x(1) = 1$ og $x(2)$ fri.

(a) Opstil Eulerligningen og transversalitetsbetingelsen.

(b) Gør rede for, at hvis $c \leqslant 0$, så vil en funktion $x = x(t)$, der tilfredsstiller Eulerligningen og begyndelsesbetingelsen og transversalitetsbetingelsen, også løse maksimeringsopgaven.

(c) For $b = -1$ og $c = -3$ kan Eulerligningen reduceres til følgende: $t^2\ddot{x} - t\dot{x} - 3x = 0$. Vis, at funktionerne $x = t^3$ og $x = t^{-1}$ (for $t > 0$) løser denne differentialligning, og angiv den fuldstændige løsning.

(d) Løs maksimeringsopgaven (stadig for $b = -1$ og $c = -3$).

Opgave 175. (august 2013, opgave 4)
Betragt for et reelt tal a den inhomogene differensligning,

$$x_{t+2} - (2a - \tfrac{1}{2})\,x_{t+1} - ax_t = 5(1-a)2^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Vis, at følgen $x_t = 2^t$ er en partikulær løsning.

(b) For hvilke værdier af a er ligningen asymptotisk stabil?

(c) Bestem den generelle løsning til den tilsvarende homogene ligning.

(d) Angiv den løsning x_t til den inhomogene ligning, som opfylder $x_0 = 3$, $x_1 = 1$.

Opgave 176. (august 2013, opgave 5)
Betragt følgende problem om optimal kontrol, med skrotværdifunktion:

$$\text{(max)} \quad x(2) + \int_0^2 (-2tx - u^2)\,dt \quad \text{for } -1 \leqslant u \leqslant 1,\ \dot{x} = 2u, \quad x(0) = 1,$$

eller, udførligt:

$$\text{maksimer} \quad x(2) + \int_0^2 \left(-2tx(t) - u(t)^2\right) dt \quad \text{for } -1 \leqslant u(t) \leqslant 1,\ \dot{x}(t) = 2u(t), \quad x(0) = 1.$$

Antag, at (x, u) er et tilladt par af funktioner, som løser problemet.

(a) Opskriv Hamiltonfunktionen og de betingelser, som ifølge maksimumprincippet gælder for funktionerne $x = x(t)$, $u = u(t)$ og $p = p(t)$ (p er den adjungerede funktion).

(b) Bestem funktionen $p(t)$.

(c) Bestem derefter funktionerne $x(t)$ og $u(t)$.

(d) Begrund, at funktionen $u = u(t)$ bestemt i (c) er den optimale kontrol.