DOK-Eksempler

Eksempel 1. $\dot{x} = tx + 1$ er en lineær differentialligning. Med $a(t) = -t$ er $A(t) = -t^2/2$ en stamfunktion. En partikulær løsning og den generelle løsning bestemmes ved

$$e^{-A(t)} \int e^{A(t)} f(t)\, dt = e^{t^2/2} \int e^{-t^2/2} dt, \qquad x = Ce^{t^2/2} + e^{t^2/2} \int e^{-t^2/2} dt.$$

Stamfunktionen kan ikke udtrykkes ved elementære funktioner.

Eksempel 2. Differentialligningen $\dot{x} = rx$ bestemmer *eksponentiel vækst*, hvis $r > 0$, og *henfald*, hvis $r < 0$. Størrelsen r er den *specifikke vækstrate*. Den konstante funktion $x = 0$ er en ligevægt, asymptotisk stabil hvis $r < 0$, og ustabil hvis $r > 0$.

Eksempel 3. *Logistisk vækst* bestemmes af differentialligningen,

$$\dot{x} = \tfrac{r}{b} x(b - x) = rx - \tfrac{r}{b} x^2,$$

hvor $r, b > 0$. Det kan fx beskrive bestanden af torsk i Nordsøen. Størrelsen r er den *specifikke vækstrate*, og b er *bærekapaciteten*. Når $x > 0$ er lille, bliver x^2 helt forsvindende, og ligningen er med tilnærmelse $\dot{x} = rx$, dvs eksponentiel vækst. Men når x vokser, og nærmer sig b, får faktoren $b - x$ betydning: den tvinger $\dot{x}$ til at nærme sig 0, dvs den får væksten x til at flade ud. Ligningen giver kun (biologisk) mening, når $x \geq 0$ (og $x > b$ er ikke udelukket). Det er ikke svært at løse ligningen eksplicit.

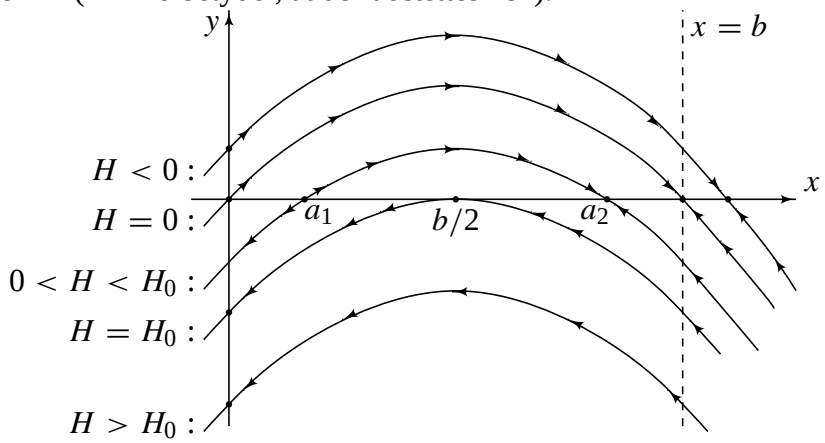
Ligevægt: $x = 0$ og $x = b$, den første ustabil, den anden asymptotisk stabil.

Eksempel 4. Logistisk vækst med *konstant fangst* (høst):

$$\dot{x} = \tfrac{r}{b} x(b - x) - H = rx - \tfrac{r}{b} x^2 - H.$$

Fangsten pr tidsenhed er konstant, uafhængig af bestandens størrelse. Det opnås med den konstante *fangstkvote* H: så mange tons må der fiskes pr år.

Herunder nogle fasediagrammer (grafer for $y = \frac{r}{b} x(b - x) - H$) for forskellige værdier af fangsten H ($H < 0$ betyder, at der udsættes fisk).



Ligevægtspunkterne er skæringspunkterne med x-aksen. Værdien H_0 svarer til, at grafen netop rører x-aksen, altså

$$H_0 = rb/4.$$

For $H < H_0$ er der to ligevægtspunkter: én ustabil mindre end $b/2$, og en asymptotisk stabil større end $b/2$. For $H = H_0$ er der én ligevægt $x = b/2$, men den er ustabil. Endelig, for $H > H_0$, er der ingen ligevægt: bestanden uddør. Værdien $H_0 = \frac{1}{4}rb$ er altså den største værdi af fangstkvoten, for hvilken der er en ligevægt; den et det *maksimale bæredygtige udbytte* (*maximal sustainable yield*). Men vi tager det lige én gang til: Den tilsvarende ligevægt er ustabil: hvis bestanden kommer bare én fisk under ligevægten $b/2$, vil den uddø!

Eksempel 5. Logistisk vækst med *konstant fangstkapacitet* c,

$$\dot{x} = \tfrac{r}{b}x(b-x) - cx = (r-c)x - \tfrac{r}{b}x^2.$$

Fangsten pr tidsenhed cx er proportional med bestandens størrelse. Det opnås med et konstant antal fiskerbåde (eller bedre: konstant tonnage). Der er to ligevægtspunkter, $x = 0$ og $x = b(r-c)/r$. Antages $c < r$, er ligevægten $x = b(r-c)/r$ asymptotisk stabil. Fangsten (pr tidsenhed), opnået fra ligevægten, er

$$h = c \cdot \frac{b(r-c)}{r}.$$

Den største værdi af h fås, når $c(r-c)$ er størst mulig, dvs når $c = r/2$. Med denne værdi af c er ligevægten $b/2$ og værdien af h er

$$\frac{1}{4}r^2 b/r = rb/4,$$

altså præcis som ved det maksimale udbytte H_0 ved konstant fangstkvote. Men med konstant kapacitet er ligevægten asymptotisk stabil!

Eksempel 6. Differentialligningen $x^2 + \dot{x}^2 = 1$ er ikke på „normalform“. Den splitter i to: $\dot{x} = \sqrt{1-x^2}$ og $\dot{x} = -\sqrt{1-x^2}$. Vi løser den første: Ligningen er separabel. Klart, at de konstante funktioner $x = \pm 1$ er løsninger. For en løsning med $-1 < x < 1$ omformes:

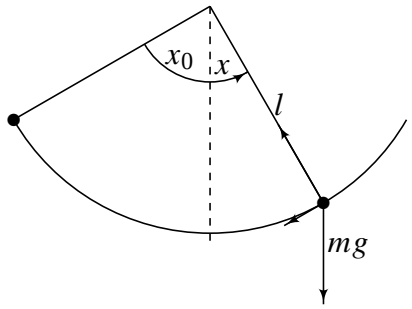
$$(*) \qquad G(x) := \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int dt + C = t + C.$$

En stamfunktion $G(x)$ på venstresiden bestemmes ved substitutionen $x = \sin u$, $dx = \cos u\, du$, som giver $1 - x^2 = 1 - \sin^2 u = \cos^2 u$, og altså $\sqrt{1-x^2} = \cos u$, og dermed

$$(**) \qquad G(x) = \int \frac{\cos u\, du}{\cos u} = \int du = u.$$

Bemærk, at '=' i (**) betyder, at når man indsætter $x = \sin u$ i $G(x)$, så får man u. Med andre ord, den x-værdi, som løser (**), er $x = \sin u$. Løsningen til (*) er derfor funktionen $x = \sin(t + C)$. Funktionen $G(x)$ betegnes i øvrigt $\operatorname{Arcsin} x$, eller $\sin^{-1} x$.

Eksempel 7. Betragt et svingende pendul, med masse m og længde l:



Udsvingsvinklen fra den lodrette stilling er $x = x(t)$. Tyngdekraften, af størrelsen mg, har en komponent langs med stangen og en komponent vinkelret på stangen, af størrelsen $mg \sin x$. Det er alene den sidste komponent, der ændrer på x. Newton's anden lov (kraft=masse·acceleration), giver derfor differentialligningen $mg \sin x = -m \cdot l\ddot{x}$, altså

$$\ddot{x} + k \sin x = 0, \qquad \text{hvor } k = g/l. \tag{1}$$

Alternativ: Fra udsvinget med vinklen $x_0 = x(0)$ til udsvinget med vinklen $x = x(t)$ ændres højden fra $l(1 - \cos x_0)$ til $l(1 - \cos x)$. Ændringen i højde er altså $l(\cos x_0 - \cos x)$. Derfor ændres beliggenhedsenergien med $mg \cdot l(\cos x_0 - \cos x)$. Bevægelsesenergien er $\frac{1}{2}mv^2$, hvor $v = l\dot{x}$ er farten. Bevægelsesenergien ændres altså med $\frac{1}{2}ml^2(\dot{x}^2 - \dot{x}_0{}^2)$, hvor $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$. Da energien er konstant, følger det, at

$$\tfrac{1}{2}ml^2(\dot{x}^2 - \dot{x}_0{}^2) + mgl\big(\cos x_0 - \cos x\big) = 0.$$

Altså er

$$\dot{x}^2 - \dot{x}_0{}^2 = 2k\big(\cos x - \cos x_0\big). \tag{2}$$

Specielt, hvis pendulet igangsættes med udsving x_0 og hastigheden $\dot{x}_0 = 0$, så er

$$\dot{x}^2 = 2k\big(\cos x - \cos x_0\big). \tag{3}$$

Det er ikke så svært at se, at de to differentialligninger (1) og (2) er ensbetydende.

Eksempel 8. Når x er lille (dvs tæt ved 0), er $\sin x \approx x$, og differentialligningen for pendulet kan approksimeres med følgende:

$$\ddot{x} + k\,x = 0, \qquad \text{hvor } k = g/l.$$

Det er en lineær, homogen, andenordens ligning. Det karakteristiske polynomium er $z^2 + k$, med rødderne $z = \pm i\sqrt{k}$. Den generelle løsning er derfor $x = C\cos(\sqrt{k}t + D)$. Bemærk specielt, at alle løsninger har den samme periode, nemlig $2\pi/\sqrt{k}$. For denne tilnærmede model af pendulet er svingningstiden, uanset udsvingets størrelse, altså bestemt ved formlen,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

Det skal bemærkes, at for løsningerne til den egentlige pendulligning vil svingningstiden afhænge af udsvingets størrelse.

Eksempel 9. Differentialligningen for pendulet er en andenordensligning, $\ddot{x} + k \sin x = 0$ med $k > 0$. Den ændres til et system af førsteordensligninger ved at indføre en ny ubekendt funktion $y = \dot{x}$:

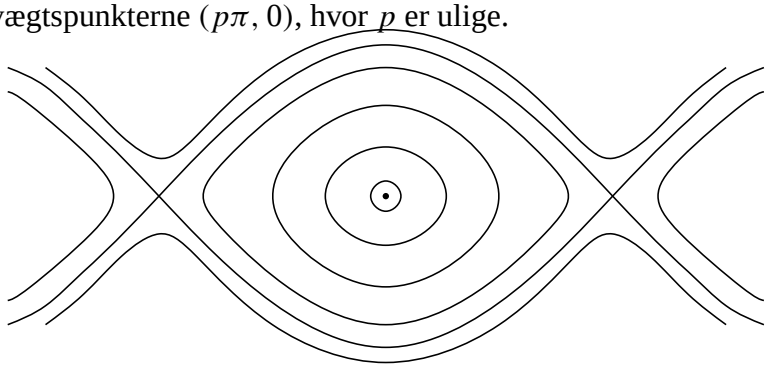
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -k \sin x. \end{aligned}$$

Ligevægtspunkter er punkterne $(0, p\pi)$, hvor $p \in \mathbb{Z}$. Jacobimatricen er $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k\cos x & 0 \end{pmatrix}$, med determinanten $k \cos x$. I ligevægtspunkter $(0, p\pi)$ med p ulige bliver determinanten $-k$, og dermed negativ. Sådanne punkter er altså saddelpunkter, og specielt ustabile. Hvis p er lige, bliver determinanten k, og dermed positiv, og da matricen har sporet 0, får vi ingen information om stabilitet i disse punkter. At disse punkter faktisk er lokalt stabile ses ved at bestemme banekurverne:

Eliminér t ved at dividere den nederste ligning med den øverste, separere, og integrere:

$$(*) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-k \sin x}{y}; \quad y\,dy = -k \sin x\,dx; \quad y^2 = 2k(\cos x - C).$$

Den sidste ligning, for forskellige værdier af C, er ligningen for banerne. På venstresiden er $y^2 \geq 0$. For $C > 1$ er højresiden altid negativ: ingen løsninger til ligningen. For $C = 1$ er højresiden negativ med mindre $\cos x = 1$, dvs $x = 2q\pi$: løsningerne er ligevægtspunkterne $(p\pi, 0)$, hvor p er lige. For $-1 < C < 1$ kan vi vælge x_0 med $\cos x_0 = C$ og $0 < x_0 < \pi$. Højresiden er så positiv, præcis når $-x_0 + 2q\pi < x < x_0 + 2q\pi$ (med passende $q \in \mathbb{Z}$), og for hver sådan x-værdi er der to løsninger y: løsningerne udgør en række lukkede baner. For $C < -1$ er højresiden altid positiv: der er to adskilte baner. Tilfældet $C = -1$ er et gænsetilfælde, hvor højresiden er positiv med mindre $\cos x = -1$: de to baner krydser hinanden i ligevægtspunkterne $(p\pi, 0)$, hvor p er ulige.



Eksempel 10. Ligningen $ax^2 + b\dot{x}^2 = c$, hvor $a, b, c \neq 0$, kan bringes på „standardform“:

$$(1) \quad x^2 + \dot{x}^2 = 1, \qquad (2) \quad x^2 - \dot{x}^2 = 1, \qquad (3) \quad -x^2 + \dot{x}^2 = 1;$$

eller til $-x^2 - \dot{x}^2 = 1$ som ikke har løsninger. Det kan nemlig, efter division med c, antages, at $c = 1$. Det er nok at prøve med funktioner af formen $x(t) = \alpha y(\beta t)$, og så er

x en løsning, præcis når $a\alpha^2 y(\beta t) + b\alpha^2\beta^2 y(\beta t) = 1$ for alle t, eller $a\alpha^2 y + b\alpha^2\beta^2\dot{y} = 1$, som med passende valg af α, β har „standardformen". Standardformen kan deles i to separable ligninger, og løses som i et tidligere eksempel. Det kræver, at man kan integrere ved substitution.

Man kan også substituere direkte i differentialligningen: kig fx på (1). For en løsning x er $|x| \leq 1$. De konstante funktioner $x = 1$ og $x = -1$ løser ligningen. Antag, at $-1 < x(t_0) < 1$. Nær t_0 kan vi skrive $x(t) = \sin z(t)$ med en passende funktion $z(t)$. For $x = \sin z$ er $\dot{x} = \dot{z}\cos z$, så x løser ligningen, hvis og kun hvis $\sin^2 z + \dot{z}^2\cos^2 z = 1$, dvs hvis og kun hvis $\dot{z}^2 = 1$ (eller $\cos z(t) = \pm 1$). Det giver $z = \pm t + C$, altså $x = \pm\sin(t + D)$.

(2) og (3) løses bekvemt ved hjælp af funktionerne $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$ og $\sinh t = (e^t - e^{-t})/2$, som opfylder $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, $\frac{d}{dt}\cosh t = \sinh t$, $\frac{d}{dt}\sinh t = \cosh t$. For (2) er $|x| \geq 1$, og konstanterne $x = \pm 1$ er løsninger. For $x(t_0) > 1$ prøves med $x = \cosh z$, som giver $\dot{z}^2 = 1$. Heraf: $z = \pm t + C$ eller $x = \cosh(t + C)$, dvs *kædelinier*. Tilsvarende, med $x < -1$, fås løsninger $x = -\cosh(t + C)$.

For (3) prøves med $x = \sinh z$, som giver $\dot{z}^2 = 1$. Heraf $z = \pm t + C$ eller $x = \pm\sinh(t + D)$.

Eksempel 11. Ligningerne (1), (2), og (3) kan løses ved differentiation: Differentieres (1) fås $2x\dot{x} + 2\dot{x}\ddot{x} = 0$, eller $2\dot{x}(\ddot{x} + x) = 0$. Her er enten $\dot{x} = 0$ i et interval, altså $x =$konst (hvor konst$= \pm 1$). Eller også er $x + \ddot{x} = 0$, en simpel andenordens differentialligning, Løsningerne hertil, $x = A\cos t + B\sin t$, vil opfylde, at $x^2 + \dot{x}^2$ er konstant ($= A^2 + B^2$), og man skal altså pille de løsninger ud, hvor konstanten er 1.

Tilsvarende med (2) og (3).

Eksempel 12. For det generelle lineære system i planen,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= cx + dy, \end{aligned} \quad \text{eller } \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \text{hvor } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

hvor det $A \neq 0$, kan man efter en passende koordinattransformation antage, at A har en af følgende former:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Matricerne modsvarer mulighederne for karakteristiske rødder: De karakteristiske polynomier er

$$\text{for } A_1\text{: } (z - \lambda)(z - \mu), \qquad \text{for } A_2 \text{ og } A_3\text{: } (z - \lambda)^2, \qquad \text{og for } A_4\text{: } (z - a)^2 + b^2,$$

med to forskellige, reelle rødder λ, μ, med én (dobbelt)rod λ, og med to imaginære rødder $a \pm bi$ ($b > 0$).

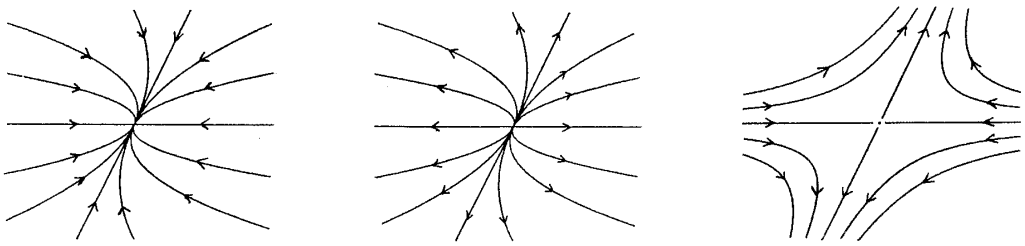
Eksempel 13. Ligningen $\dot{\mathbf{x}} = A_1\mathbf{x}$ er simpel:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x, \\ \dot{y} &= \mu y, \end{aligned} \quad \text{med løsningen} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ce^{\lambda t} \\ De^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

Det er let at eliminere t: Når $x \neq 0$ er

$$y = De^{\mu t} = D(e^{\lambda t})^{\mu/\lambda} = D(x/C)^{\mu/\lambda} = E|x|^{\mu/\lambda},$$

hvor E er en (ny) konstant. Banerne er altså graferne for potensfunktionerne $y = E|x|^{\nu}$ med $\nu := \mu/\lambda$, samt y-aksen. I det almindelige tilfælde, dvs uden koordinattransformationen, ser banerne sådan ud:

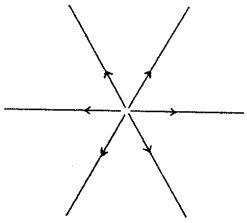


$\lambda < \mu < 0$	$0 < \mu < \lambda$	$\lambda < 0 < \mu$
knude	knude	saddelpunkt
asymptotisk stabil	ustabil	ustabil

Eksempel 14. Ligningen $\dot{\mathbf{x}} = A_2\mathbf{x}$, altså

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x, \\ \dot{y} &= \lambda y, \end{aligned} \quad \text{med løsningen} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ce^{\lambda t} \\ De^{\lambda t} \end{pmatrix},$$

er specialtilfældet, hvor $\lambda = \mu$. Bemærk, at hvis ligningen har dette udseende i ét koordinatsystem, så ser den sådan ud i alle koordinatsystemer. Det er klart, at banerne bliver halvlinierne $y = Ex$ samt y-aksen:



$\lambda > 0$
ustabil

Eksempel 15. Ligningen $\dot{\mathbf{x}} = A_3\mathbf{x}$, altså

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x + y, \\ \dot{y} &= \qquad \lambda y, \end{aligned}$$

løses ved først at løse den sidste ligning, $\dot{y} = \lambda y$. Det giver $y = De^{\lambda x}$, som indsættes i den første ligning:

$$\dot{x} = \lambda x + y = \lambda x + De^{t}.$$

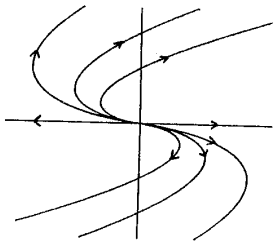
En partikulær løsning er $x = Dte^{\lambda t}$, og den fuldstædige løsning er $x = Ce^{\lambda t} + Dte^{\lambda t}$. Den generelle løsning til systemet er altså:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Dt + C)e^{\lambda t} \\ De^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Elimineres $t = \lambda^{-1} \ln(y/D)$ fås ligningerne for banerne:

$$x = Ey + \lambda^{-1} y \ln |y|,$$

hvor E er en konstant, samt $y = 0$. De ser sådan ud:



$\lambda > 0$
ustabil

Med $\lambda < 0$ fås tilsvarende baner, med pilene vendt, dvs en asymptotisk stabil ligevægt.

Eksempel 16. Den sidste ligning $\dot{\mathbf{x}} = A_4\mathbf{x}$, altså

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \ \ ax \ \ -by, \\ \dot{y} &= \ \ bx \ \ +ay, \end{aligned}$$

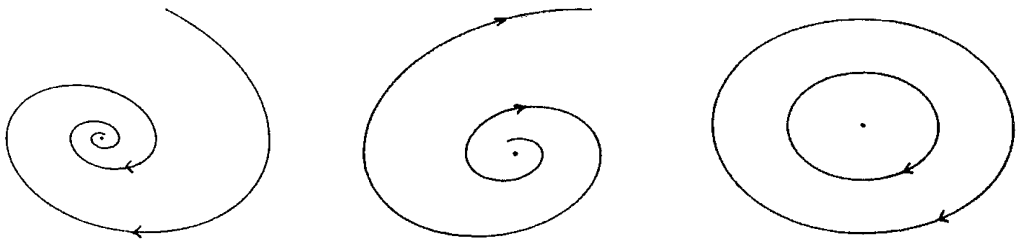
løses efter bogen: elimineres y fås en andenordens lineær ligning i x med imaginære karakteristiske rødder $a \pm bi$. Den har den generelle løsning $x = Ce^{at} \cos(bt + \omega)$. Herefter bestemmes y af den første ligning:

$$by = ax - \dot{x} = aCe^{at} \cos(bt + \omega) - aCe^{at} \cos(bt + \omega) + bCe^{at} \sin(bt + \omega),$$

altså $y = Ce^{at} \sin(bt + \omega)$. Den fuldstændige løsning til systemet bliver:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ce^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt + \omega) \\ \sin(bt + \omega) \end{pmatrix}.$$

For $a = 0$ bliver banerne cirkler, for $a \neq 0$ bliver det spiraler. I det almindelige tilfælde, dvs uden koordinattransformationen, ser banerne sådan ud:



$a < 0, b < 0$	$a > 0, b < 0$	$a = 0, b < 0$
spiraler	spiraler	ellipser
asymptotisk stabil	ustabil	stabil

Eksempel 17. Løs systemet:

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= -2x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} &= 3x - 2y + \cos t, \end{aligned} \qquad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Elimination af y, jfr [U3, s. 2], giver en andenordens ligning:

$$(\dagger) \qquad \ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = -2\cos t + 2\sin t,$$

med karakteristisk polynomium $z^2 + 4z + 13$ og rødder $-2 \pm 3i$. En basis for løsningerne til den homogene ligning svarende til (†) er derfor $e^{-2t}\cos 3t$, $e^{-2t}\sin 3t$. For den inhomogene ligning (†) prøves med $x = A\cos t + B\sin t$. Det giver

$$L(x) = (-A + 4B + 13A)\cos t + (-4A - B + 13B)\sin t,$$

og kravet er så, at $12A + 4B = -2$, $-4A + 12B = 2$, hvoraf $B = 1/10$, $A = -1/5$. Den generelle løsning til (†) er derfor

$$x = -\tfrac{1}{5}\cos t + \tfrac{1}{10}\sin t + C_1 e^{-2t}\cos 3t + C_2 e^{-2t}\sin 3t.$$

Nu kan $\dot{x}$ bestemmes, og så kan y bestemmes af den første af de to ligninger:

$$y = \tfrac{1}{3}(-\dot{x} - 2x + \sin t) = \tfrac{1}{10}\cos t + \tfrac{1}{5}\sin t - C_2 e^{-2t}\cos 3t + C_1 e^{-2t}\sin 3t.$$

Eksempel 18. Det autonome system:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + (1 - x^2 - y^2)(y + ax + by), \\ \dot{y} &= x + (1 - x^2 - y^2)(-x + cx + dy), \end{aligned}$$

ser jo mystisk ud! Men du behøver faktisk ikke at udregne produkterne på højresiderne for at indse følgende: (1) de er polynomier i x, y (og specielt „pæne“ funktioner), (2) de er uden konstantled (dvs origo $(0, 0)$ er et ligevægtspunkt), og (3) førstegradsleddene er $ax + by$ og $cx + dy$. Det sidste betyder, at Jacobimatricen i $(0, 0)$ er $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Passende valg af a, b, c, d vil altså illustrere forskellige typer stabilitet.

Og det er også klart, at uanset valget af a, b, c, d er $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ en løsning til systemet: det er nemt at indsætte, idet faktoren $1 - x^2 - y^2$ bliver konstant lig med 0. Enhedscirklen $x^2 + y^2 = 1$ er altså en lukket bane for systemet. Uanset valget af a, b, c, d vil en løsning, der begynder inden for enhedscirklen altså forblive der.

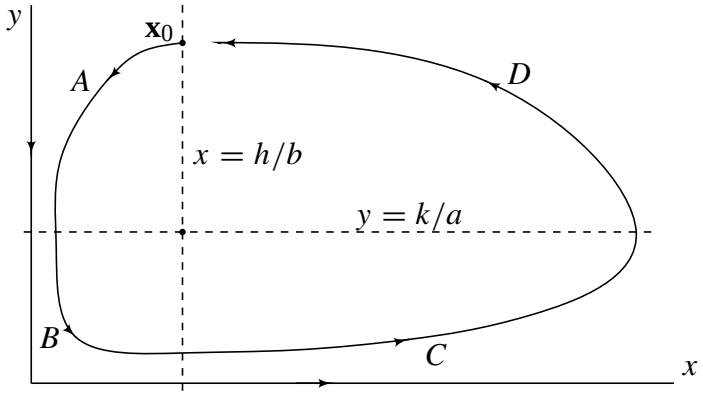
Eksempel 19. Lotka–Volterra's differentialligninger, i kvadranten $x \geq 0$, $y \geq 0$,

$$\dot{x} = kx - axy$$
$$\dot{y} = bxy - hy,$$

er en byttedyr/rovdyr-model ($x =$ antal byttedyr, $y =$ antal rovdyr). Når antallet af rovdyr er lille, kan man se bort fra leddet axy i den første ligning; den første ligning er så, med tilnærmelse, $\dot{x} = kx$, som beskriver eksponentiel vækst af byttedyrene. Den negative korrektion $-axy$ i byttedyrenes vækst (pr tidsenhed) angiver antallet af byttedyr, der ædes af rovdyrene: antallet er proportionalt med antallet af rovdyr *og* med antallet af byttedyr. Tilsvarende, når antallet x af byttedyr er lille, beskriver den anden ligning eksponentielt henfald, $\dot{y} = -hy$, af rovdyrene (de dør af sult). Den positive korrektion bxy til rodyrenes vækst angiver antallet af rovdyr, der fødes på grund af byttedyrene.

Til en faseplansanalyse bemærkes først, at $(0, 0)$ er et stationært punkt („ingen byttedyr, og ingen rovdyr"). Videre er der en bane på x-aksen (dvs med $y = 0$) hvor $x = Ce^{kt}$, dvs med en pil mod højre, og en bane på y-akssen (dvs med $x = 0$) hvor $y = e^{-ht}$, dvs med en pil nedad.

Videre er $(h/b, k/a)$ et stationært punkt. På linien $y = k/a$ har banerne lodret tangent, og på linien $x = h/b$ har banerne vandret tangent. Herefter er det nemt at få en første fornemmelse af en banekurve, der begynder i et punkt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ med $x_0 = h/b$ og $y_0 > k/a$:



Banen begynder i $\mathbf{x}_0$, hvor $\dot{y} = 0$ og $\dot{x} < 0$: kurven har vandret tangent ($\dot{y} = 0$), og bevæger sig med venstre ($\dot{x} < 0$), og kommer herved til område A, hvor også $\dot{y} < 0$. Så længe den befinder sig i A, må den altså bevæge sig nedad mod venstre. Den kan ikke krydse y-aksen (som jo i sig selv er en bane). Derfor må den forlade område A ved at ramme linien $y = k/a$ med lodret tangent, hvorefter den trænger ind i område B. Her er $\dot{y} < 0$ og $\dot{x} > 0$: i område B bevæger kurven sig altså nedad mod højre. Den kan ikke krydse x-aksen, og må altså forlade område B ved at ramme linien $x = h/b$ med vandret tangent. Herefter trænger den ind i område C, hvor $\dot{x} > 0$ og $\dot{y} > 0$: den bevæger sig opad mod højre. Denne observation („opad mod højre") er ikke i sig selv nok til at sikre at kurven rammer linien $y = k/a$; men ved at sammenholde kurvens hældningskoefficient $\dot{y}/\dot{x}$ med de givne differentialligninger er det let at udelukke, at $x(t) \to \infty$ samtidig med at y er begrænset.

Derfor overskrides linien $y = k/a$, hvorefter kurven bevæger sig ind i område D: opad mod venstre. Samme argument som for område C giver, at kurven til sidst vil ramme linien $x = h/b$.

Analysen fortæller ikke, om kurven vil ramme over eller i eller under begyndelsespunktet $\mathbf{x}_0$. Faktisk rammes begyndelsespunktet $\mathbf{x}_0$ eller, ækvivalent: *Alle baner er lukkede kurver.*

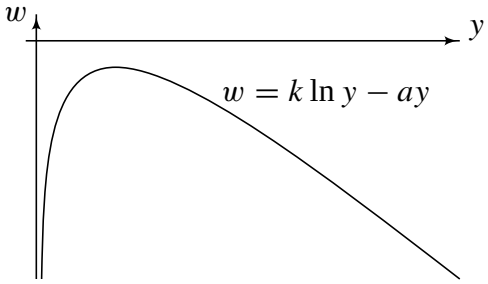
Eksempel 20. Banerne for Lotka–Volterra's ligninger, $\dot{x} = kx - axy$, $\dot{y} = bxy - hy$, kan bestemmes ved at eliminere t: Af ligningerne fås, idet $dy/dx = \dot{y}/\dot{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(bx-h)}{x(k-ay)}\,,$$

som er en separabel differentialligning med den ubekendte funktion $y = y(x)$. Løsning ved separation: $\int (k/y - a)dy = \int (b - h/x)dx$, altså

$$(*) \qquad k \ln y - ay = bx - h \ln x + \text{konstant}.$$

Hver bane ligger altså på en af kurverne bestemt ved (*) for en passende værdi af konstanten. For at se, at banerne er lukkede kurver, betragtes grafen for funktionen $w = k \ln y - ay$ på venstresiden:



Det fremgår, at ligningen (*), for en given værdi af x, har 0, 1, eller 2 løsninger y. Og mere præcist, at der findes tal x' og x'' således, at (*) har to løsninger y for $x' < x < x''$, én løsning y for $x = x'$ eller $x = x''$, og ingen løsninger ellers. Men det betyder netop, at kurven, der beskrives ved (*), er en „pæn" lukket kurve.

Eksempel 21. Variationsproblem med given begyndelses- og slutværdi:

$$(\min) \quad L(x) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \text{ for } x(t_1) = x_1,\ x(t_2) = x_2.$$

Integralet er længden af kurven fra (t_0, x_0) til (t_1, x_1) bestemt ved grafen for $x = x(t)$. Her er $F(t,x,u) = \sqrt{1+u^2}$, og dermed $F'_x = 0$ og $F'_u = u/\sqrt{1+u^2}$. Sættes $q := \sqrt{1+(\dot{x})^2}$ får man $F'_u = \dot{x}/q$ og $\dot{q} = (1/2q)2\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}\ddot{x}/q$. Derfor er

$$\frac{d}{dt}F'_u = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot{x}}{q}\Big) = \frac{\ddot{x}q - \dot{x}\dot{q}}{q^2} = \frac{(q - \dot{x}^2/q)\ddot{x}}{q^2} = \frac{(q^2 - \dot{x}^2)\ddot{x}}{q^3} = \frac{\ddot{x}}{q^3}\,.$$

Da $F'_x = 0$, er Euler's differentialligning denne: $\ddot{x} = 0$, som øjensynlig har den generelle løsning $x = at + b$. Værdierne x_1, x_2 i endepunkterne bestemmer a og b. Konklusion?

Eksempel 22. Et trick: Euler's differentialligning, samlet på den ene side af lighedstegnet,

$$\text{(EL)} \qquad F'_x - \tfrac{d}{dt} F'_u = 0,$$

kan simplificeres i det autonome tilfælde, dvs når $F = F(x, u)$ ikke afhænger af t. Funktionen $F(x, \dot{x})$, med $x = x(t)$ indsat, differentieres via kædereglen:

$$\tfrac{d}{dt} F = F'_x \cdot \dot{x} + F'_u \cdot \ddot{x}.$$

Trivielt (differentiation af et produkt) er

$$\tfrac{d}{dt}\big(F'_u \cdot \dot{x}\big) = \tfrac{d}{dt} F'_u \cdot \dot{x} + F'_u \cdot \ddot{x}.$$

Trækkes den sidst ligning fra den første fås:

$$\tfrac{d}{dt}\big(F - F'_u \cdot \dot{x}\big) = \big(F'_x - \tfrac{d}{dt} F'_u\big) \cdot \dot{x}.$$

Heraf aflæses: Hvis $x = x(t)$ opfylder (EL), så er $\frac{d}{dt}(F - F'_u \cdot \dot{x}) = 0$, altså

$$\text{(EL}_0\text{)} \qquad F - F'_u \cdot \dot{x} = \text{konstant}$$

Omvendt, hvis $x = x(t)$ opfylder (EL$_0$) og x ikke er konstant ($\dot{x} \neq 0$), så opfyldes (EL),

Eksempel 23. Minimer $L(x) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt$ for givne værdier $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$ [Samme opgave som i et tidligere eksempel!]. Trick'et giver ligningen:

$$\sqrt{1 + \dot{x}^2} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \cdot \dot{x} + \text{konstant},$$

som simplificeres til

$$1 = \sqrt{1 + \dot{x}^2} \cdot \text{konstant},$$

altså $\dot{x} = \text{konstant}$. Det følger, at $x = at + b$.

Eksempel 24. Variationsproblem med givne randværdier:

$$\text{(min)} \quad V(x) = \pi \int_{t_0}^{t_1} x^2 dt \quad \text{for } x(t_1) = x_1,\ x(t_2) = x_2.$$

Integralet er, bortset fra faktoren π, rumfanget af det legeme der fremkommer, når grafen af funktionen $x = x(t)$ drejes omkring t-aksen. Her er $F'_u = 0$, så trick'et giver ligningen $x^2 = \text{konstant}$, dvs x er konstant. Men faktisk giver (EL) direkte, at $2x = 0$, altså at x er konstant 0. Men det kan jo ikke kombineres med de givne bibetingelser. Overrasket?

Eksempel 25. Variationsproblem med givne randværdier:

$$\text{(min)} \quad O(x) = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} x\sqrt{1+\dot{x}^2}dt \quad \text{for } x(t_1) = x_1,\ x(t_2) = x_2.$$

Integralet er, bortset fra de 2π, overfladen (fraregnet „top“ og „bund“) af det legeme der fremkommer, når grafen af funktionen $x = x(t)$ drejes omkring t-aksen. Med $q := \sqrt{1+u^2}$ er $q'(u) = u/q$. Altså er $F = xq$, og $F'_u = xq'(u) = xu/q$. Trick'et giver så ligningen $xq - (x\dot{x}/q)\cdot\dot{x} =$ konstant, dvs

$$x\sqrt{1+\dot{x}^2} - \frac{x\,\dot{x}^2}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = C.$$

Multiplices med $\sqrt{1+\dot{x}^2}$, fås $x = C\sqrt{1+\dot{x}^2}$, altså

$$\dot{x} = \pm\sqrt{(x/C)^2 - 1}.$$

Løsningerne er „kædelinier“: $x = C\cosh(t/C - D)$, hvor $\cosh t := (e^t + e^{-t})/2$.

Eksempel 26. Variationsproblem med bibetingelse:

$$\text{(min)} \quad P(x) = \int_{t_0}^{t_1} x\sqrt{1+\dot{x}^2}dt, \quad \text{for } x(t_1) = x_1,\ x(t_2) = x_2 \text{ og } \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt = L.$$

Integralet $P(x)$ er den potentielle energi af en ophængt kæde, der følger kurven bestemt ved $x(t)$. Bibetingelsen er, at længden L af kæden er givet. Opgaven behandles *ikke* i [S]. Løsningen er (naturligvis) kædelinien.

Eksempel 27. Variationsproblem med forskellige randbetingelser: (min) $\int_0^1 (x^2+\dot{x}^2)\,dt$ for

$$\text{(i)}\begin{cases} x(0) = 1, \\ x(1) = e, \end{cases} \qquad \text{(ii)}\begin{cases} x(0) = 1, \\ x(1) \geq e, \end{cases} \qquad \text{(iii)}\begin{cases} x(0) = 1, \\ x(1) \text{ fri.} \end{cases}$$

$F(t,x,u) = x^2 + u^2$, $F'_x = 2x$, $F'_u = 2u$. Altså $F'_u(x,\dot{x}) = 2\dot{x}$, hvoraf $(d/dt)(F'_u) = (d/dt)(2\dot{x}) = 2\ddot{x}$. Eulerligning:

$$2x = 2\ddot{x}, \quad \text{eller } \ddot{x} - x = 0,$$

med den fuldstændige løsning $x = Ae^t + Be^{-t}$. For (i) fås (i*)=(i): $x(0) = 1$ og $x(1) = e$, hvoraf $A = 1$ og $B = 0$, altså

$$x = e^t.$$

For (iii) er $F'_u = 2\dot{x}$ og $F'_u|_{t=1} = 2\dot{x}(1)$, så her fås (iii*): $x(0) = 1$, $\dot{x}(1) = 0$, hvoraf $A = 1/(1+e^2)$ og $B = e^2/(1+e^2)$, altså

$$x = \tfrac{1}{1+e^2}\,e^t + \tfrac{e^2}{1+e^2}\,e^{-t}.$$

Endelig, for (ii), fås (ii*): $x(0) = 1$, $x(1) \geq e$, $\dot{x}(1) \geq 0$ med lighed mindst et sted. Lighed det andet sted giver funktionen fra (iii), men så er den første ulighed ikke opfyldt. Lighed det første sted giver funktionen fra (i), som opfylder den anden ulighed: altså den eneste mulighed.

De fundne funktioner løser problemet, fordi ... konveks ... .

Eksempel 28. Jeg kører i bil fra HHK kl 11.30 og skal være på KU kl 12.00, altså efter $\frac{1}{2}$ time. Afstanden er 3 km. Hvordan regulerer jeg farten, $u = u(t)$, således, at benzinforbruget minimaliseres? Idet jeg regner med, at benzinforbruget pr tidsenhed er proportionalt med kvadratet på farten, fås følgende kontrolproblem:

$$(\max) \int_0^{1/2} (-u^2)\, dt \quad \text{for } 0 \le u \le 50,\ \dot{x} = u,\ x(0) = 0,\ x(\tfrac{1}{2}) = 3.$$

Bemærk, at spring er tilladte for kontroller, fx er $u(t) = 50$ for $t \le 3/50$ og $u(t) = 0$ for $t > 3/50$ („kør 50 km/time i de første 3,6 minutter, og hold så stille resten af tiden") en tilladt kontrol.

Løsning via Sætning 9.1:

$$H = -u^2 + pu, \quad H'_x = 0, \text{ dvs } \dot{p} = 0.$$

Derfor på $p(t)$ være konstant. Og så må $u = u(t)$, som maksimerer H, være konstant, $u = C$. Ligningen $\dot{x} = C$ med $x(0) = 0$ giver $x = Ct$, og slutbetingelsen giver $C \cdot \frac{1}{2} = 3$, dvs $C = 6$. Altså er $u = 6$. Betingelsen i Sætning 9.1 er opfyldt: H er klart konkav som funktion af u, og dermed som funktion af (x, u). Svaret er altså: farten skal være konstant, 6 km/time. Herefter kan den adjungerede (konstante) funktion i øvrigt bestemmes: $u = 6$ er et indre punkt, så $H'_u = 0$, dvs $-2u + p = 0$ for $u = 6$, hvoraf $p = 12$.

Eksempel 29. Et kontrolproblem:

$$(\max) \quad \int_0^T (u - \lambda x)\, dt \quad \text{for } 0 \le u \le h,\ \dot{x} = rx - u,\ x(0) = x_0,\ x(T) = x_T.$$

Her er $x = x(t)$ bestanden af fisk, differentialligningen siger eksponentiel vækst, men den hæmmes af kontrollen, som er fangstkvoten $u(t)$. Profitraten er proportional med u, men herfra skal trækkes omkostningerne, λx, hvor $\lambda > 0$, hvis det er fisk fra et dambrug, og $\lambda = 0$, hvis det er fisk i Nordsøen. Integralet er altså nettoprofitten.

Vi prøver, om Sætning 9.1 kan anvendes: Hamiltonfunktionen (med $p_0 = 1$):

$$H = u - \lambda x + p(rx - u) = (1 - p)u + rpx - \lambda x. \tag{1}$$

Den er lineær i u, x, og specielt konkav. Differentialligningen $\dot{p} = -H'_x$ for den adjungerede funktion p:

$$\dot{p} = -rp + \lambda. \tag{2}$$

Af udtrykket for H fås umiddelbart, for den optimale kontrol $u = u(t)$:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{når } p(t) > 1, \\ h & \text{når } p(t) < 1. \end{cases} \tag{3}$$

Betragt løsningerne til $\dot{x} = rx - u$, med $x(0) = x_0$. Den største løsning fås med $u \equiv 0$; det giver $x = x_0 e^{rt}$ med en slutværdi $x_{\max} = x_0 e^{rT}$. Den mindste løsning fås med $u = h$; det giver $x = (x_0 - h/r)e^{rt} + h/r$ og en tilsvarende slutværdi $x_{\min}$. Slutværdien $x(T)$ af en løsning $x(t)$ må altså ligge mellem slutværdierne $x_{\min}$ og $x_{\max}$. Kontrolproblemet kan således kun have løsninger, hvis den givne slutværdi x_T opfylder ulighederne,

(4) $$x_{\min} \le x_T \le x_{\max}, \qquad \text{hvor } x_{\min} = (x_0 - h/r)e^{rT} + h/r, \quad x_{\max} = x_0 e^{rT}.$$

Hvis lighed gælder et af de to steder, er der kun én tilladt kontrol, og så er problemet jo trivelt. Antag altså, at der er skarp ulighed begge steder i (4). Det følger da, at for den optimale kontrol u må begge muligheder i (3) være tilstede: ligheden $p(t) = 1$ må være opfyldt for en værdi $t = \bar{t}$ med $0 < \bar{t} < T$. Det er let at løse differentialligningen (2):

(5) $$p(t) = Ce^{-rt} + \lambda/r.$$

Da vi skal have $p(\bar{t}) = 1$ for en værdi $\bar{t} > 0$, følger det, at i (5) må vi have $C > 0$ hvis $\lambda/r < 1$, og $C < 0$ hvis $\lambda/r > 1$ (tilfældet $\lambda/r = 1$ udsættes lidt). Antag først, at $\lambda/r < 1$. Da er $C > 0$ i (5), og det følger, at $p(t)$ er aftagende. Derfor er $p(t) > 1$ for $t < \bar{t}$ og $p(t) < 1$ for $t > \bar{t}$. Altså er, i følge (3),

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \le t < \bar{t}, \\ h & \text{for } \bar{t} < t \le T, \end{cases} \qquad \text{når } \lambda/r < 1.$$

Nu kan $x(t)$ bestemmes: I begyndelsen, for $t_0 \le t \le \bar{t}$, er $\dot{x} = rx$. Altså er $x = x_0 e^{rt}$, som giver værdien $\bar{x} = x(\bar{t}) = x_0 e^{r\bar{t}}$. I resten af tiden, dvs for $\bar{t} \le t \le T$, er $\dot{x} = rx - h$, og da $x(\bar{t}) = \bar{x}$ fås

$$x = (\bar{x} - h/r)e^{-r\bar{t}}e^{rt} + h/r = \big(x_0 - (h/r)e^{-r\bar{t}}\big)e^{rt} + h/r.$$

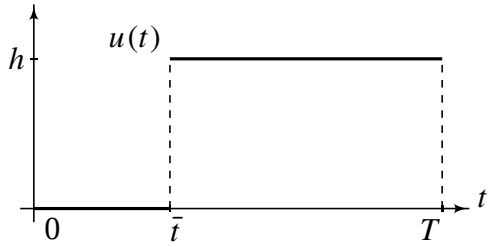
Slutbetingelsen er $x(T) = x_T$, altså

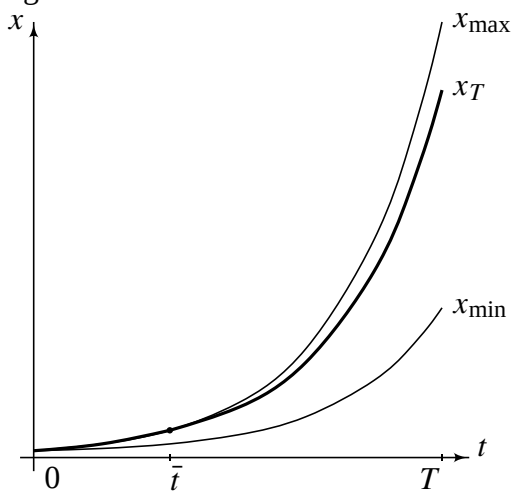
$$\big(x_0 - (h/r)e^{-r\bar{t}}\big)e^{rT} + h/r = x_T.$$

Heraf bestemmes fx først $e^{r(T-\bar{t})}$:

$$e^{r(T-\bar{t})} = \big(x_0 e^{rT} - x_T + h/r)\big)/(h/r),$$

og derefter $\bar{t}$ ved – bl.a. – at tage den naturlige logaritme.





Hvis $\lambda/r > 1$, fås den komplementære situation: $u(t) = h$ i begyndelsen, for $0 \le t \le \bar{t}$, og $u(t) = 0$ i slutningen, for $\bar{t} < t \le T$. Også her bestemmes $\bar{t}$ nu ud fra slutbetingelsen $x(T) = x_T$. Forudsætningerne i Sætning 9.1 er opfyldt: den således bestemte funktion er en optimal kontrol.

Hvis $\lambda/r = 1$, altså $\lambda = r$, er enhver tilladt kontrol en optimal kontrol. Integranden $u - \lambda x$ er jo lig med $-(rx - u)$, dvs lig med $-\dot{x}$. Altså er

$$\int_0^T (u - \lambda x)\, dt = -\int_0^T \dot{x}\, dt = x(0) - x(T) = x_0 - x_T.$$

Eksempel 30. Et kontrolproblem:

$$\text{(max)} \quad \int_0^T U(1-s)\, dt \quad \text{for } 0 \le s \le 1,\ \dot{x} = s,\ x(0) = x_0,\ x(T) \ge x_T.$$

Her er $U(c)$ en konkav nyttefunktion, dvs $U' > 0$ og $U'' < 0$. Tallene T, x_0 og x_T er givne: det antages, at

$$x_0 < x_T < x_0 + T \tag{1}$$

Hamiltonfunktionen,

$$H(t, x, s, p) = U(1-s) + ps, \tag{2}$$

er konkav. Betingelserne (I), (II), og (III) er derfor tilstrækkelige. Vi prøver om de kan opfyldes med (x, s, p).

Da $H'_x = 0$, giver (I), at $\dot{p} = 0$, altså at p er konstant, $p(t) = \bar{p}$. Tallet $\bar{s}$, der maksimerer Hamiltonfunktionen (2), er derfor også konstant, så $s(t) = \bar{s}$ for alle t. Ifølge (III) er $\bar{p} \ge 0$. Funktionen U er voksende, så $U(1-s)$ er aftagende; den maksimeres altså i $s = 0$. Hvis $\bar{p} = 0$, må vi altså have $\bar{s} = 0$. Og hvis $\bar{s} = 0$, får vi $\dot{x} = 0$, dvs $x(t) \equiv x_0$, i modstrid med (1), da vi kræver $x(T) \ge x_T$. Derfor er $\bar{s} > 0$, og $\bar{p} > 0$. Af $\bar{p} > 0$ og (III) følger, at vi må have $x(T) = x_T$. Hvis $\bar{s} = 1$, har vi $\dot{x} = 1$, altså $x = t + x_0$, men så er $x(T) = T + x_0$, i modstrid med (1). Altså har vi

$$0 < \bar{s} < 1, \quad \bar{p} > 0.$$

Herefter er $\dot{x} = \bar{s}$, altså $x = \bar{s}t + x_0$, og slutbetingelsen giver $x_T = \bar{s}T + x_0$, dvs $\bar{s} = (x_T - x_0)/T$. For at sikre, at denne værdi $\bar{s}$, i det indre af intervallet $[0, 1]$, maksimerer Hamiltonfunktionen, på $\bar{p}$ defineres således, at $H'_s = 0$ i $\bar{s}$. Vi skal altså have

$$\bar{s} = (x_T - x_0)/T, \qquad \bar{p} = U'(1 - \bar{s}).$$

Med disse valg er betingelserne opfyldt: $s(t) \equiv \bar{s}$ er den optimale kontrol, og $x = \bar{s}t + x_0$ den tilsvarende tilstand.

Eksempel 31. Kontrolproblem, fra eksamen, Juli 2001 (en ufuldstændig besvarelse):

$$\text{(max)} \quad \int_0^2 (-2tx - u^2)\,dt \quad \text{for } -1 \le u \le 1,\ \dot{x} = 2u,\ x(0) = 1,\ x(2) \text{ fri.}$$

Type (c), så $p(2) = 0$. Hamiltonfunktionen,

$$H = -2tx - u^2 + 2pu,$$

er konkav, fordi $-2tx + 2pu$ er lineær i x, u og $-u^2$ er konkav. Da $H'_x = -2t$, er

$$\dot{p} = 2t, \quad \text{altså } p = t^2 - 4 \quad (\text{idet jo } p(2) = 0).$$

Specielt er $p(t) \le 0$ for alle t. Videre er $H_u = -2u + 2p$. For den værdi af u, der maksimerer H, har vi derfor enten $-2u + 2p \le 0$ og $u = -1$ (opfyldt for $p \le -1$), eller $-2u + 2p = 0$ og $-1 < u < 1$ (opfyldt for $p = u$ og $-1 < p < 1$), eller $-2u + 2p \ge 0$ og $u = 1$ (opfyldt for $p \ge 1$). Funktionen p er kendt. Det følger, at $u = -1$ når $p < -1$, dvs når $0 \le t < \sqrt{3}$, og $u = p = t^2 - 4$ for $\sqrt{3} < t \le 4$.

Da $\dot{x} = 2u$, fås $x = -2t + 1$ for $0 \le t \le \sqrt{3}$, og $x = 2t^3/3 - 8t + C$ for $\sqrt{3} < t \le 2$. De to udtryk skal stemme overens for $t = \sqrt{3}$; det giver $C = 4\sqrt{3} + 1$.

Eksempel 32. Samme problem, men med skrotværdi:

$$\text{(max)} \quad -e^{-x(2)-3} + \int_0^2 (-2tx - u^2)\,dt \quad \text{for } -1 \le u \le 1,\ \dot{x} = 2u,\ x(0) = 1.$$

Skrotværdifunktionen $S(x) = -e^{-x-3}$ er konkav, og $dS/dx = e^{-x-3}$. Betingelsen (III) giver altså

$$p(2) = e^{-x(2)-3}. \tag{1}$$

Af $\dot{x} = 2u \ge -2$ og $x(0) = 1$ følger, at $x(t) \ge 1 - 2t$. Specielt er $x(2) \ge -3$. Derfor er $-x(2) - 3 \le 0$. Eksponenten på højresiden i (1) er altså negativ. Af (1) følger derfor, at $0 < p(2) < 1$. Da $\dot{p} = 2t$, følger det, at p antager værdien -1 for et punkt $\bar{t}$:

$$p = t^2 - \bar{t}^2 - 1, \quad \text{med } 0 < \bar{t} < 2 \tag{2}$$

(endda med $2 < \bar{t}^2 < 3$ svarende til at $0 < p(2) < 1$).

På intervallet $[0,\bar{t}]$ fås $u \equiv -1$, og $x = -2t + 1$, med $x(\bar{t}) = -2\bar{t} + 1$. Denne værdi tages som begyndelsesværdi på det næste interval $[\bar{t},2]$. Her er $u = p$, og $\dot{x} = 2u$, dvs

$$\dot{x} = 2t^2 - 2\bar{t}^2 - 2,$$

hvoraf, for $t \ge \bar{t}$:

$$x = \tfrac{2}{3}t^3 - 2\bar{t}^2\,t - 2t + \tfrac{4}{3}\bar{t}^3 + 1. \tag{3}$$

Endelig, fra (2) og (3) kan man opnå slutværdierne $p(2)$ og $x(2)$, og nu giver (1) en ligning til bestemmelse af $\bar{t}$. Den ligning er nu ikke sådan at løse eksplicit.

Eksempel 33. Kontrolproblem, fra eksamen, Juni 2001 (en ufuldstændig besvarelse):

$$\text{(max)} \quad \int_0^2 (6u - x^4)\,dt \quad \text{for } 0 \le u \le 1,\ \dot{x} = u,\ x(0) = 1, x(2) \text{ fri.}$$

Type (c), så $p(2) = 0$. Hamiltonfunktionen,

$$H = 6u - x^4 + pu,$$

er konkav i x, u, så kandidaterne er løsninger. Fra (I) og (III) fås:

$$\dot{p} = 4x^3, \quad p(2) = 0, \tag{1}$$

og af (II) fås:

$$u = \begin{cases} 1, & \text{hvis } p > -6, \\ 0, & \text{hvis } p < -6. \end{cases} \tag{2}$$

Af $\dot{x} = u$ med $u(t) \ge 0$ følger, at $x(t)$ er voksende; specielt er $x(t) \ge x(0)$, dvs $x(t) \ge 1$. Nu følger af (1), at $\dot{p} \ge 4$, og videre, at $p(t) \le 4(t-2)$. Altså er $p(0) \le -8$. Da $p(0) \le -8$, $p(2) = 0$ og $p(t)$ er strengt voksende, findes ét punkt t^* med $0 < t^* < 2$ således, at

$$p(t^*) = -6. \tag{3}$$

Nu fremgår det af (2), idet $p(t)$ er voksende, at

$$u = \begin{cases} 0, & \text{hvis } 0 \le t < t^*, \\ 1, & \text{hvis } t^* < t < 2. \end{cases} \tag{4}$$

Herefter bestemmes først x (af $\dot{x} = u$, $x(0) = 1$), og dernæst p (af $\dot{p} = 4x^3$, $p(t^*) = -6$):

$$x = \begin{cases} 1, \\ t - t^* + 1, \end{cases} \quad \dot{p} = \begin{cases} 4, \\ 4(t - t^* + 1)^3, \end{cases} \quad p = \begin{cases} 4(t - t^*) - 6, & \text{hvis } 0 \le t < t^*, \\ (t - t^* + 1)^4 - 7, & \text{hvis } t^* < t \le 2. \end{cases}$$

Endelig kan t^* bestemmes af betingelsen $p(2) = 0$: det giver $(3 - t^*)^4 = 7$, altså $t^* = 3 - \sqrt[4]{7}$. Med denne værdi af t^* er den optimale kontrol u bestemt ved (4).

Eksempel 34. Næsten samme problem, med skrotværdi:

$$\text{(max)} \quad -6x(2) + \int_0^2 (6u - x^4)\,dt \quad \text{for } 0 \le u \le 1,\ \dot{x} = u,\ x(0) = 1.$$

Skrotværdifunktionen er $-6x$, som er lineær, og derfor konkav. Betingelsen (III), $p(2) = (dS/dx)(x(2))$, giver

$$p(2) = -6.$$

Da p er voksende, og $p(2) = -6$, er $p(t) < -6$ for $t < 2$. Altså er $u \equiv 0$ den optimale kontrol. Den giver $\dot{x} = 0$. Altså er x en konstant, $x \equiv x(0) = 1$.

Eksempel 35. Kontrolproblem med skrotværdi, jfr [S, Eksempel 2, s. 358],

$$\text{(max)} \quad -\tfrac{1}{2}x(T)^2 + \int_0^T x\,dt, \quad \dot{x} = x + u,\ x(0) = 0,\ -1 \le u \le 1.$$

Hamiltonfunktionen,

$$H(t, x, u, p) = x + p(x + u),$$

er lineær i x, u, og specielt konkav, og skrotværdifunktionen $S(x) = -\frac{1}{2}x^2$ er konkav. Altså er kandidaterne løsninger til problemet.

Betingelsen (I), $\dot{p} = -H'_x$, giver $\dot{p} = -1 - p$, med den generelle løsning,

$$p = -1 + Ce^{-t}. \tag{1}$$

Bemærk, at $p(t) \to -1$ for $t \to \infty$; hvis $C > 0$, har $p(t)$ et nulpunkt t^*, bestemt ved $C = e^{t^*}$, og $p(t) > 0$ for $t < t^*$ og $p(t) < 0$ for $t > t^*$. Nulpunktet opfylder $0 \le t^* \le T$, når $1 \le C \le e^T$.

Betingelsen (II) giver, at

$$u = 1, \text{ når } p > 0, \text{ og } u = -1, \text{ når } p < 0. \tag{2}$$

Da $S(x) = -\frac{1}{2}x^2$, er $dS/dx = -x$. Betingelsen (III), $p(T) = dS/dx(x(T))$, giver altså

$$p(T) = -1 + Ce^{-T} = -x(T). \tag{3}$$

Der er tre muligheder: $C \ge e^T$, $C \le 1$, eller $1 < C < e^T$. Det er let at udelukke de to første: Antag, at $C \ge e^T$. Da er $p(t) > 0$ for alle $0 \le t < T$. Derfor er $u \equiv 1$. Af $\dot{x} = x + 1$ og $x(0) = 0$ følger, at $x = -1 + e^t$. Men så er $x(t) > 0$ og $p(t) \ge 0$ for $t > 0$, i modstrid med (3). Antag dernæst, at $C \le 1$. Da er $p(t) < 0$ for $t > 0$. Derfor er $u \equiv -1$. Af $\dot{x} = x - 1$ og $x(0) = 0$ følger $x = 1 - e^t$. Men så er $p(t) < 0$ og $x(t) < 0$ for $t > 0$, i modstrid med (3).

Tilbage er den sidste mulighed: $1 < C < e^T$. Med $C = e^{t^*}$, altså $t^* = \ln C$, er $0 < t^* < T$, og

$$u = \begin{cases} 1, & \text{når } 0 \le t < t^* \\ -1, & \text{når } t^* < t \le T. \end{cases} \tag{4}$$

Betragt først intervallet $[0,t^*]$. Her er $u \equiv 1$, og altså $\dot{x} = x + 1$. Af $x(0) = 0$ følger så, at $x = -1 + e^t$. I det højre endepunkt t^* er værdien lig med $x(t^*) = -1 + e^{t^*}$. Denne værdi tages som begyndelsesværdi på det andet interval $[t^*, T]$. Her er $u \equiv -1$, og altså $\dot{x} = x - 1$. Af $x(t^*) = -1 + e^{t^*}$ følger så, at

$$x(t) = 1 + \left(-2 + e^{t^*}\right)e^{t-t^*}, \quad \text{for } t \ge t^*.$$

Af (3) følger nu, at $-1 + Ce^{-T} = -1 - \left(-2 + e^{t^*}\right)e^{T-t^*}$. Da $C = e^{t^*}$, er altså

$$-1 + Ce^{-T} = -1 - \left(-2 + C\right)e^T/C.$$

Multipliceres med Ce^T fås, efter omordning, en andengradsligning:

$$C^2 + e^{2T}C - 2e^{2T} = 0;$$

dens positive løsning er

$$C = \frac{\sqrt{e^{2T}+8} - e^T}{2}\, e^T.$$

Det er let at se, at brøken (faktoren foran e^T) altid ligger mellem e^{-T} og 1. Tallet C ligger altså mellem 1 og e^T. Altså ligger $t^* = \ln C$ mellem 0 og T, og med denne værdi af t^* er den optimale kontrol u bestemt ved (4).

Eksempel 36. Kontrolproblem med skrotværdi, jfr [S, Eksempel 1, s. 357]:

$$\text{(max)} \quad -x(T)^2 + \int_0^T (1 - tx - u^2)\,dt, \quad \dot{x} = u,\ x(0) = x_0.$$

Der er ingen restriktioner på u. Hamiltonfunktionen,

$$H = 1 - tx - u^2 + pu,$$

er konkav i (x, u), og skrotværdifunktionen $S(x)$ er konkav i x. Betingelserne er altså tilstrækkelige. Af (I) fås $\dot{p} = t$, altså

$$p(t) = \tfrac{1}{2}t^2 + C. \tag{1}$$

Da der ikke er indskrænkninger på u, bestemmes maksimumpunktet $u = u(t)$ ved at løse ligningen $H'_u = 0$. Det giver

$$u = \tfrac{1}{2}p. \tag{2}$$

Endelig er $dS/dx = -2x$, så (III) giver

$$p(T) = -2x(T). \tag{3}$$

Af (1) og (2) fås $u = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}C$, og af $\dot{x} = u$ og $x(0) = x_0$ fås, at

$$x = \tfrac{1}{12}t^3 + \tfrac{1}{2}Ct + x_0. \tag{4}$$

Nu kan C bestemmes af (1), (2), og (3):

$$\tfrac{1}{2}T^2 + C = -\tfrac{1}{6}T^3 - CT - 2x_0,$$

hvoraf

$$C = -\frac{\frac{1}{6}T^3 + \frac{1}{2}T^2 + 2x_0}{1+T}.$$

Med denne værdi af C er den optimale kontrol u givet ved (2) og (1).

Eksempel 37. Se [S, Eksempel 4, p. 352]. Min *løn* er $w = w_t$ og min *kapital* $k = k_t$ forrentes i banken med *rentefoden* r. Min *indkomst* $y = y_t$ er altså $y = w + rk$. Den fordeles $y = c + \dot{k}$ til *konsum* c *og opsparing* $\dot{k}$. Jeg vil maksimere *nytteværdien* af mit konsum fra nu ($t = 0$) til jeg bliver pensioneret ($t = T$). Det er maksimeringsopgaven,

$$(\dagger) \qquad (\max) \qquad \int_0^T U(c)e^{\rho t}\,dt,$$

hvor $U = U(c)$ er en given nyttefunktion (jeg vælger $U'(c) = c^{-\varepsilon}$), og ρ er *diskonteringsfaktoren*. Min kapital nu er $k(0) = k_0$, og ved periodens udgang ønsker jeg $k(T) \geq k_1$.

Idet $c = w + rk - \dot{k}$ er det en variationsopgave af type Max_{ii}, dvs $k(0) = k_0$ og $k(T) \geq k_1$, med $F(t, k, \dot{k}) = U(w_t + rk - \dot{k})e^{-\rho t}$. Eulerligning:

$$F'_k = e^{-\rho t}U' \cdot r, \qquad F'_{\dot{k}} = e^{-\rho t}U' \cdot (-1), \qquad \tfrac{d}{dt}F'_{\dot{k}} = \rho e^{-\rho t}U' - e^{-\rho t}U'' \cdot (\dot{w} + r\dot{k} - \ddot{k}),$$

da $\frac{d}{dt}U' = U''\dot{c} = U'' \cdot (\dot{w} + r\dot{k} - \ddot{k})$.

Bemærk, at $F'_{\dot{k}}$ overalt er negativ. I uligheden $F'_{\dot{k}}|_{t=T} \leq 0$ gælder altså altid „<“. I den anden ulighed $k(T) \geq k_0$ gælder altså „=“ for en optimal løsning. [Ikke overraskende?]

Eulerligningen, $F'_k = \frac{d}{dt}F'_{\dot{k}}$, divideres med $e^{-\rho t}U''$. Det giver:

$$r\frac{U'}{U''} = \rho\frac{U'}{U''} - (\dot{w} + r\dot{k} - \ddot{k}), \quad \text{eller} \quad \ddot{k} - r\dot{k} - \dot{w} + \frac{U'}{U''}(\rho - r) = 0.$$

Med $U' = c^{-\varepsilon}$ er $U'' = -\varepsilon c^{-\varepsilon-1}$ og $U'/U'' = -c/\varepsilon = -(w + rk - \dot{k})/\varepsilon$. Til afkortning sættes $\delta := (r - \rho)/\varepsilon$. Så er $(U'/U'')(\rho - r) = (w + rk - \dot{k})\delta$, og ligningen omformes til

$$(\ddagger) \qquad \ddot{k} - (r + \delta)\dot{k} + r\delta k = \dot{w} - \delta w,$$

en lineær andenordens (inhomogen) differentialligning med konstante koefficienter. Det karakteristiske polynomium har rødderne r og δ, ikke sandt?

Eksempel 38. I integralet (†) kan c opfattes som *kontrollen*, k som *tilstanden*, og sammenhængen mellem c, k (og den givne løn $w = w_t$) er *tilstandsligningen* $\dot{k} = w + rk - c$. Det er altså et problem om optimal kontrol, med $f(t, k, c) = U(c)e^{\rho t}$, $g(t, k, c) = w + rk - c$. Kontrolintervallet er fx $c > 0$.

Løsning: Hamiltonfunktion, klart konkav i k, c:

$$H = U(c)e^{-\rho t} + p(w + rk - c).$$

Antag (k, c) optimal. (1) Kontrolintervallet er åbent, så i et maksimumpunkt c er $H'_c = 0$, dvs $U'(c)e^{-\rho t} - p = 0$. De $U' = c^{-\varepsilon}$ er altså $p = c^{-\varepsilon}e^{-\rho t}$.

(2) Den adjungerede ligning er $\dot{p} = -H'_k$, dvs $\dot{p} = -rp$, med den generelle løsning $p = De^{-rt}$.

Sammenligning af (1) og (2) giver $c^{-\varepsilon}e^{-\rho t} = De^{-rt}$ (altså må vi have $D > 0$), eller $c^{-\varepsilon} = De^{(\rho - r)t}$, eller $c = Ee^{\delta t}$, hvor $\delta = (r - \rho)/\varepsilon$ (og $E = D^{-1/\varepsilon}$). Nu bliver tilstandsligningen en simpel førsteordens lineær ligning:

$$\dot{k} - rk = w_t - Ee^{\delta t}.$$

Den generelle løsning kan opskrives med en formel. Er ligningen ensbetydende med (‡)?

Eksempel 39. 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... er Fibonacci's talfølge. Den er bestemt (rekursivt) ved differensligningen $x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$ og begyndelsesbetingelserne $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$.

Eksempel 40. Antag, at udbud S og efterspørgsel D efter en vare afhænger lineært af prisen p sådan: $S = ap - b$ og $D = -cp + d$ („udbuddet stiger med prisen, efterspørgslen falder med prisen"). I den „kontinuerte" model styres udviklingen af en differentialligning [S, s. 15]:

$$\dot{p} = \lambda \cdot (D - S) = -\lambda(a + c)p + \lambda(b + d).$$

Ligevægtsløsningen (den konstante løsning) er $p = (b+d)/(a+c)$; den er asymptotisk stabil. Den kontinuerte model forudsætter, at udbuddet kan varieres „umiddelbart" med prisen nu.

Den diskrete model tager hensyn til, at det er udbuddet i næste periode, der styres af prisen nu; det antages altså at

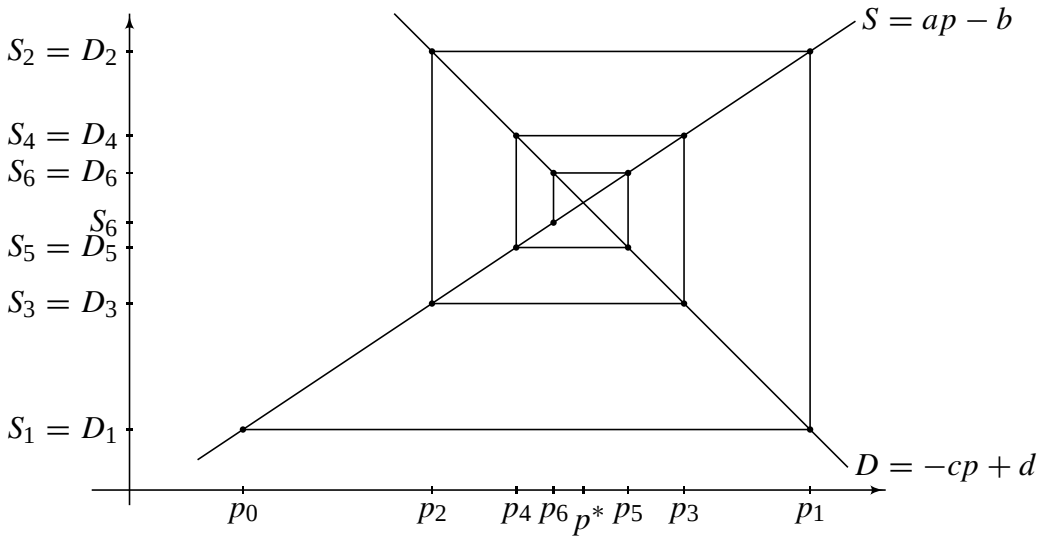
$$(1) \quad D_t = -cp_t + d, \qquad (2) \quad S_{t+1} = ap_t - b, \qquad (3) \quad D_t = S_t.$$

Det er den sidste ligning („i hver periode sælges hele produktionen"), der styrer udviklingen. Af ligningerne fås: $-cp_{t+1} + d = D_{t+1} = S_{t+1} = ap_t - b$. Efter division med $-c$ og omformning fås:

$$(4) \qquad p_{t+1} = -\tfrac{a}{c}p_t + \tfrac{b+d}{c};$$

ligevægten, den konstante løsning, er $p^* = (b + d)/(a + c)$. Den er asymptotisk stabil, hvis $|-a/c| < 1$, dvs hvis $c > a$. Dette resultat er:

Spindelvævssætningen. *Hvis efterspørgslen er mere prisfølsom end udbuddet, så konvergerer prisen p_t mod ligevægtsprisen p^*.* Den kan illustreres sådan:



Eksempel 41. Udtrykket for udbuddet kan skrives $S_{t+1} = a\hat{p}_{t+1} - b$ med $\hat{p}_{t+1} = p_t$. Ligningen $\hat{p}_{t+1} = p_t$ afspejler, at producenten forventer, at prisen i næste periode er den samme som nu. Indrages en viden om den foregående prisudvikling, fås fx en model med

$$S_{t+1} = a\hat{p}_{t+1} - b, \quad \text{hvor } \hat{p}_{t+1} = p_t + \rho(p_t - p_{t-1}),$$

og stadig $D_t = -cp_t + d$ og $D_t = S_t$. Tallet ρ er en forventningsfaktor: at ρ er positiv udtrykker en forventning om, at udviklingen fra p_{t-1} til p_t vil fortsætte; at ρ er negativ udtrykker, at udviklingen nok vil vende. Forudsætningerne fører til en andenordens ligning:

$$-cp_{t+2} + d = D_{t+2} = S_{t+2} = a\big(p_{t+1} + \rho(p_{t+1} - p_t)\big) - b = a(1+\rho)p_{t+1} - a\rho p_t - b,$$

som omformes til

$$p_{t+2} + \tfrac{a(1+\rho)}{c}p_{t+1} - \tfrac{a\rho}{c}p_t = \tfrac{b+d}{c}. \tag{4}$$

Ligevægten er som før: $p^* = (b+d)/(a+c)$, og den er asymptotisk stabil, når

$$\left|\frac{a(1+\rho)}{c}\right| < 1 - \frac{a\rho}{c} < 2.$$

Multiplikation med c/a giver de ækvivalente uligheder:

$$c/a > |1+\rho| + \rho, \qquad c/a > -\rho.$$

Det er ikke så svært at bestemme det største af tallene $|1+\rho| + \rho$ og $-\rho$: Ligevægten er asymptotisk stabil, når

$$c/a > 1 + 2\rho,\ \rho \geq -\tfrac{1}{3}, \quad \text{eller} \quad c/a > -\rho,\ \rho \leq -\tfrac{1}{3}.$$

Eksempel 42. Betragt nationalindkomst Y, investering I, og forbrug C. Det antages, at

$$(1)\quad Y_t = I_t + C_t, \qquad (2)\quad C_{t+1} = aY_t + b.$$

Hvad bliver ligevægten med konstant investering?

$$(*)\quad I_t = I_0.$$

Vi har $Y_{t+1} = I_0 + C_{t+1} = aY_t + (I_0 + b)$, en førsteordens lineær differensligning. Ligevægten er $Y^* = (I_0 + b)/(1-a)$. Den er stabil, hvis $a < 1$.

Hvordan ændres ligevægtstilstanden sig, hvis man ændrer I_0 til $\widetilde{I}_0$?

$$\widetilde{Y}^* - Y^* = \frac{(\widetilde{I}_0 + b) - (I_0 + b)}{1-a} = \frac{1}{1-a}(\widetilde{I}_0 - I_0).$$

I Samuelson's accelerator-model [S, s. 280] antages i stedet for (*), at investeringen er proportional med forøgelsen af forbruget:

$$(3) \quad I_{t+1} = c(C_{t+1} - C_t).$$

Af (2) fås $C_{t+1} - C_t = a(Y_t - Y_{t-1})$, så (3) kan erstattes af følgende:

$$(3') \quad I_{t+1} = ca(Y_t - Y_{t-1}).$$

Heraf fås videre, at

$$Y_{t+2} = I_{t+2} + C_{t+2} = ca(Y_{t+1} - Y_t) + aY_{t+1} + b,$$

og – ved omordning – en lineær differensligning med konstante koefficienter:

$$(4) \qquad Y_{t+2} - a(c+1)Y_{t+1} + acY_t = b.$$

Ligevægtsløsningen er $Y^* = b/(1-a)$. Den er asymptotisk stabil, når

$$|a(c+1)| < 1 + ac < 2, \quad \text{dvs når } a < 1,\ ac < 1.$$

Eksempel 43. I *blandet landhandel* betragtes følgende model for en sammenhæng mellem *nationalindkomst* Y, *konsum/forbrug* C, *investering* I, (værdi af) *import* M og (værdi af) *eksport* X for et enkelt land:

$$C_{t+1} = Y_0 + cY_t, \quad I_{t+1} = I_0 + hI_t, \quad M_{t+1} = M_0 + mY_t,$$
$$X_t = \widetilde{M}_t, \qquad Y_t + M_t = C_t + I_t + X_t,$$

hvor $\widetilde{M}$ betegner summen af det, der importeres af de øvrige lande. Heraf fås ligningen

$$(*) \qquad Y_{t+1} = C_{t+1} + I_{t+1} - M_{t+1} + \tilde{M}_{t+1};$$

Af modellen følger, at $C_{t+1} + I_{t+1} - M_{t+1}$ vokser lineært med Y_t. Sættes $k := c + h - m$, giver de første tre led på højresiden af (*) resultatet $kY_t + K_0$, hvor K_0 er konstant, $K_0 = C_0 + I_0 - M_0$. Det sidste led i (*) er en sum af led svarende til de øvrige lande. Det *antages altid*, at $m < c + h$, altså at $k > 0$.

Antag, at der kun er to lande, og brug en ˜ til at betegne størrelserne knyttet til det andet land. Så er $\tilde{M}_{t+1}$ lig med importen i det andet land, altså bestemt ved $\tilde{M}_{t+1} = \tilde{m}\tilde{Y}_t + \tilde{M}_0$, så med en ændret værdi af K_0 er $Y_{t+1} = kY_t + \tilde{m}\tilde{Y}_t + K_0$. Ved „ombytning" fås en tilsvarende ligning for det andet land, altså ialt

$$\begin{pmatrix} Y_{t+1} \\ \tilde{Y}_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & \tilde{m} \\ m & \tilde{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_t \\ \tilde{Y}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_0 \\ \tilde{K}_0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} k &= c + h - m, \\ \tilde{k} &= \tilde{c} + \tilde{h} - \tilde{m}. \end{aligned}$$

Som nævnt er det en standardantagelse, at $k > 0$ og $\tilde{k} > 0$, så matricens spor er positivt. For at undersøge stabiliteten, er det bekvemt at sætte $p := 1-k$, $\tilde{p} := 1-\tilde{k}$, hvor altså $p < 1$ og $\tilde{p} < 1$. Matricen har så $1-p$ og $1-\tilde{p}$ i diagonalen, så den har spor $2-p-\tilde{p}$ og determinant $(1-p)(1-\tilde{p}) - m\tilde{m}$. Systemet er altså asymptotisk stabilt, hvis og kun hvis

$$2 - p - \tilde{p} < 1 + (1-p)(1-\tilde{p}) - m\tilde{m} < 2,$$

som kan simplificeres:

$$0 < p\tilde{p} - m\tilde{m} < p + \tilde{p}.$$

Den først ulighed medfører, at p og $\tilde{p}$ har samme fortegn, og uligheden $0 < p + \tilde{p}$ sikrer så, at de begge må være positive. Da p og $\tilde{p}$ begge er < 1, er den anden ulighed så automatisk opfyldt. Nu var $p = 1-k$, så ialt ses, idet standardantagelserne medtages, at systemet er asymptotisk stabilt, hvis og kun hvis

$$0 < k < 1, \quad 0 < \tilde{k} < 1, \quad m\tilde{m} < (1-k)(1-\tilde{k}).$$

Eksempel 44. Løs differensligningen

$$x_{t+2} - 4x_{t+1} + 3x_t = h_t, \text{ med } h_t = 0, \quad h_t = 5^t, \quad h_t = 3^t, \quad h_t = t-1.$$

Karakteristisk polynomium: $z^2 - 4z + 3$; $D = 4^2 - 3 \cdot 4 = 4$. Rødder $z = 1$ og $z = 3$.

Med $h_t = 0$ (den homogene ligning): $x_t = C1^t + D3^t$. Med $h_t = 5^t$: prøv med x_t af samme slags, fx $x_t = 5^t$: Idet venstresiden betegnes $L(x)$ fås:

$$L(5^t) = 5^{t+2} - 4 \cdot 5^{t+1} + 3 \cdot 2^t = (5^2 - 4 \cdot 5^1 + 3)2^t = 4 \cdot 5^t,$$

altså $L(5^t) = 4 \cdot 5^t$. Derfor er $L(\frac{1}{4}5^t) = 5^t$, så $x_t = \frac{1}{4}\,5^t$ er en partikulær løsning.

Med $h_t = 3^t$ ved vi allerede, at $L(3^t) = 0$, idet 3^t var en løsning til den homogene ligning. Vi prøver med $t3^t$:

$$L(t3^t) = (t+2)3^{t+2} - 4(t+1)3^{t+1} + 3t3^t = ((t+2)3^2 - 4(t+1)3 + 3t)3^t = (0 \cdot t + 6)3^t,$$

altså $L(t3^t) = 6 \cdot 3^t$. Altså er $x_t = \frac{1}{6}\,t3^t$ en partikulær løsning.

Igen, med $h_t = 1$: indsættelse af $1 = 1^t$ giver $L(1) = 0$, idet 1 var karakteristisk rod. Derfor indsættes t og t^2:

$$L_t = (t+2) - 4(t+1) + 3t = -2; \quad L(t^2) = (t+2)^2 - 4(t+1)^2 + 3t^2 = -4t;$$

derfor er $x_t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t^2$ en partikulær løsning.

Eksempel 45. Kaniner forplanter sig således: Hver kanin får 1 unge i løbet af første år, og 1 unge i løbet af det andet år, og så ikke flere unger. (Eller måske snarere: To kaniner får 2 unger ... (Eller snarere: To kaniner får 6 unger, hvoraf 4 dør)). Hvis der er x_t nyfødte og y_t et-årige, hvordan vokser så kaninbestanden $w_t = x_t + y_t$, når jeg starter med 2 kaninunger.

Om et år er de nyfødte blevet et-årige, altså $y_{t+1} = x_t$. Antallet af kaniner nu er w_t, så antallet af kaniner der fødes i det kommende år er $w_t = x_t + y_t$, dvs $x_{t+1} = x_t + y_t$. Heraf:

$$x_{t+1} = x_t + y_t = x_t + x_{t-1}, \qquad \text{altså } x_{t+2} = x_{t+1} + x_t.$$

Da $y_{t+1} = x_t$ vil y_t, – og dermed også $w_t = x_t + y_t$ – tilfredsstille den samme homogene 2. ordens differensligning. Øjensynlig er $x_0 = 2$, $y_0 = 0$ og altså $x_1 = 2$, $y_1 = 2$; og videre $x_2 = 4$, $y_2 = 2$, og $x_3 = 6$, $y_3 = 4$. Vi har $x_t = y_{t+1}$, og følgen (y_t) er essentielt Fibonacchi:

$$0, 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, \ldots .$$

Karakteristisk polynomium: $z^2 - z - 1$; rødder $\xi = (1+\sqrt{5})/2$ og $\bar{\xi} = (1-\sqrt{5})/2$; generelle løsning $y_t = C\xi^t + D\bar{\xi}^t$; med $y_0 = 0$ og $y_1 = 2$ fås $C + D = 0$ og $C\xi + D\bar{\xi} = 2$, hvoraf $D = -C$ og $C(\xi - \bar{\xi}) = 2$, altså $C\sqrt{5} = 2$ og $y_t = 2(\xi^t - \bar{\xi}^t)/\sqrt{5}$. Bemærk, at $-1 < \bar{\xi} < 0$, så $\bar{\xi}^t \to 0$, og det følger, at $y_t \approx 2\xi^t/\sqrt{5}$ (eksponentiel vækst).

Eksempel 46. Et præparat har en halveringstid på 5 døgn. En patient får 1 dosis (= 1 tablet) morgen og aften over så langt et tidsrum, at kroppens indhold stabiliseres. Hvor meget præparat indeholder patienten? Med en periode på 12 timer er 5 døgn lig med 10 perioder, så $x_{t+1} = ax_t + 1$, hvor $a^{10} = \frac{1}{2}$. Ligevægten er $x^* = 1/(1-a)$ og med $a = \sqrt[10]{0,5} = 0,933$, fås $x^* = 1/0,067 = 10/\frac{2}{3} = 15$. Altså ligevægt lig med 15 gange indholdet i 1 tablet.

Med kontinuert indtag (drop) fås differentialligningen $\dot{x} = ax + 1$, hvor $e^{10a} = \frac{1}{2}$, dvs $a = -(\ln 2)/10$. Ligevægt: $x^* = -1/a = 10/\ln 2 \approx 14,43$.

Eksempel 47. Differensligningen $x_{t+n} - x_t = 0$ har som løsninger de følger, der er periodiske med periode n. Karakteristisk polynomium $z^n - 1$. Komplekse rødder $z = \cos 2\pi k/n + i \sin 2\pi k/n$ for $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (n stk). Det skal skelnes lidt mellem tilfældene hvor n er lige og ulige, men essentielt er en basis for løsningerne følgerne $\cos \frac{2\pi k}{n} t$ for $0 \le k \le \frac{1}{2}n$ og $\sin \frac{2\pi k}{n} t$ for $0 < k < \frac{1}{2}n$

Alternativ: Differensligninen $x_{t+n} = x_t$ siger, at følgen x_t skal være periodisk med periode n. Oplagt basis er følgerne $u^1, \ldots, u^{n-1}$, hvor

$$u^k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots),$$

med 0 på alle plads på nær et 1 for $t = k, k+n, k+2n, k+3n, \ldots$.

Eksempel 48. Nul som karakteristisk rod for en differensligning $x_{t+n} + a_1 x_{t+n-1} + \cdots + a_{n-1}x_{t+1} + a_n = 0$ er noget speciel:

At $z = 0$ er rod, ses på det karakteristiske polynomium $z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ ved at konstantleddet er $a_n = 0$. Det er klart, at så er enhver følge $(c, 0, 0, 0, \ldots)$ løsning til differensligningen. Hvis δ_0 betegner følgen $\delta_0 = (1, 0, 0, \ldots)$, er alle følger $C\delta_0$ altså løsninger. Det er ikke specielt: Med den oplagte definition $0^0 := 1$ (rimelig her, hvor der kun betragtes potenser r^t med eksponent $t = 0, 1, 2, \ldots$), gælder jo $\delta_0 = (0^t)$. Men antages, at $z = 0$ er rod med muliplicitet $m > 1$, dvs at de sidste m koefficienter opfylder $a_{n-m+1} = \cdots = a_{n-1} = a_n = 0$, er følgerne $t^i 0^t$ (for $i > 0$) er jo alle identisk 0, så de giver ikke de m lineært uafhængige løsninger.

Ligningen løses sådan: Med $k := n - m$ har ligningen formen

$$(*) \qquad x_{t+n} + a_1 x_{t+n-1} + \cdots + a_k x_{t+k} = 0.$$

Enhver følge x_t kan entydigt skrives som en sum $x_t = u_t + v_t$, hvor $u_t = 0$ for $t < k$ og $v_t = 0$ for $t \geq k$. Lad δ_i betegne følgen

$$\delta_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

med 0 på alle pladser på nær et 1 for $t = i$. Så er følgerne $\delta_0, \ldots, \delta_{m-1}$ øjensynlig en basis for følgerne af formen u_t ovenfor, og de er løsninger til (*). Følgen x_t er så en løsning, hvis og kun hvis følgen v_t er en løsning. Endelig gælder, at en følge v_t med $v_t = 0$ for $t \leq k$ løser (*), hvis og kun hvis v_t for $t \geq k$ har formen $v_t = y_{t-k}$ med en løsning y_t til ligningen

$$y_{t+k} + a_1 y_{t+k-1} + \cdots + a_k y_t = 0.$$

Eksempel: $x_{t+1} = 0$; løsning $x = C\delta_0$.

Eksempel: $x_{t+n} = 0$ (karakteristisk polynomium z^n med 0 som n-dobbelt rod); generelle løsning

$$x_t = C_0 \delta_0 + \cdots + C_{n-1} \delta_{n-1}.$$

Eksempel: $x_{t+4} - 4x_{t+2} = 0$; $y_{t+2} - 4y_t = 0$ har løsningerne $y_t = 2^t$ og $y_t = (-2)^t$. Generelle løsning en linearkombination af $\delta_0, \delta_1, \alpha, \beta$ med

$$\delta_0 = (1, 0, 0, 0, 0, \ldots), \quad \delta_1 = (0, 1, 0, 0, 0, \ldots). \quad \alpha = (0, 0, 1, 2, 4, 8, 16, \ldots),$$
$$\beta = (0, 0, 1, -2, 4, -8, 16, \ldots).$$