Ugeseddel 14.

Den ugeseddel er den sidste!

Kuglerne.

• *I planen.* Tilføjelse til kugle på U5 side 2, jfr også [S, s. 266]): For et differentialligningssystem $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, og et ligevægtspunkt (a, b) betragtes Jacobimatricen *i punktet,*

$$J = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}, \tag{*}$$

hvor altså de partielle afledede er taget i punktet (a, b). Hvis

$$\operatorname{Tr} J = f'_x + g'_y < 0 \quad \text{og} \quad \det J = f'_x g'_y - f'_y g'_x x > 0,$$

så er punktet (a, b) lokalt asymptotisk stabilt. Hvis en af ulighederne i (*) „vender den anden vej“, er punktet ustabilt. Hvis en af ulighederne er en lighed, kan man intet sige.

• *Et rigtig godt spørgsmål om optimal kontrolteori.* „Hvordan kan det være, at Sydsætter kan forudsætte, at funktionen $f(t, x, u)$ er differentiabel mht til u (og derfor specielt kontinuert i u), når han samtidig tillader, at u blot er stykkevis kontinuert?“.

Svaret er: Det er i en vis forstand et „Goddag Mand — Økseskaft“-spørgsmål: det u, der forekommer i den første del af spørgsmålet, har (næsten) intet har at gøre med det u, der forekommer i den sidste del. Derfor er der ingen modsætning.

I kontrolteori har bogstavet u (og også x, p) to forskellige roller: det er dels en variabel, dels en (ubekendt) funktion af t. Når vi taler om „funktionen $f(t, x, u)$“ (eller „Hamiltonfunktionen $H(t, x, u, p)$“) og fx siger, at „$\partial f/\partial u$ eksisterer“, så er u (og t, x, p) en *variabel,* dvs et symbol, der betegner (eller kan erstattes med) et tal. Skrivemåden $f(t, x, u)$ for funktionen indikerer, at f er en funktion af 3 variable, dvs en funktion defineret på en delmængde af $\mathbb{R}^3$. Vi kan indsætte 3-sæt (t, x, u) i funktionen f, og u er et typisk navn på tredie-koordinaten i 3-sættet. Indsættes $(1, 4, 7)$ i f fås funktionsværdien $f(1, 4, 7)$; her er altså (midlertidigt) $u = 7$ (og $(t, x) = (1, 4)$). Den „partielle afledede $\partial f/\partial u$“ betyder den afledede af f mht til den tredie variabel. Bemærk, at den partielle afledede igen er en funktion af tre variable. Den skrives ofte mere udførligt

$$\frac{\partial f}{\partial u}(t, x, u).$$

Selv i denne kendte notation ligger en vidunderlig sammenblanding af betydninger: I argumentet (t, x, u) kan vi give u (og t, x) bestemte talværdier, men i ∂u er det aldeles meningsløst at give u en værdi.

I den anden rolle betegner u og x og p typisk *funktioner* af én variabel, $u = u(t)$, $x = x(t)$ og $p = p(t)$. Vi kan have forudsætninger om disse funktioner, fx at u er stykkevis kontinuert, og at x og p er kontinuerte og stykkevis C^1.

Problemet kommer, når vi blander de to roller sammen, og det er denne sammenblanding, der er årsag til spørgsmålet. Men bemærk, at sammenblandingen er helt bevidst, og ikke bare forårsaget af, at matematikere ikke har fantasi nok til at finde på nye bogstaver. Valget af u som navn på den ukendte kontrolfunktion, $u = u(t)$, er truffet netop for at indikere, at kontrolfunktionen $u = u(t)$ skal indsættes for den variable u i funktionen $f(t, x, u)$. Og det svære er, at man ofte, for at forenkle, blot skriver u, når det af sammenhængen fremgår, at der tænkes på værdien $u(t)$. Det fx en sådan forenkling, der optræder, når man i optimal kontrolteori tillader sig at skrive $\int_0^T f(t, x, u)\, dt$: det er underforstået, at x og u er funktioner af t og at man skal indsætte $x = x(t)$ og $u = u(t)$ inden man integrerer.

Tak for denne gang!

Anders Thorup