

## DOK-Eksempler

**Eksempel 1.** Differentialligningen  $x^2 + \dot{x}^2 = 1$  er ikke på „normalform“. Den splitter i to:  $\dot{x} = \sqrt{1-x^2}$  og  $\dot{x} = -\sqrt{1-x^2}$ . Vi løser den første: Ligningen er separabel. Klart, at de konstante funktioner  $x = \pm 1$  er løsninger. For en løsning med  $-1 < x < 1$  omformes:

$$(*) \quad G(x) := \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int dt + C = t + C.$$

Stamfunktionen  $G(x)$  på venstresiden bestemmes ved substitutionen  $x = \sin u$ ,  $dx = \cos u \, du$ , som giver  $1 - x^2 = 1 - \sin^2 u = \cos^2 u$ , og altså  $\sqrt{1-x^2} = \cos u$ , og dermed

$$(**) \quad G(x) = \int \frac{\cos u \, du}{\cos u} = \int du = u.$$

Bemærk, at '=' i (\*\*) betyder, at når man indsætter  $x = \sin u$  i  $G(x)$ , så får man  $u$ . Med andre ord, den  $x$ -værdi, som løser (\*\*), er  $x = \sin u$ . Løsningen til (\*) er derfor funktionen  $x = \sin(t + C)$ . Funktionen  $G(x)$  hedder i øvrigt Arcsin  $x$ , eller  $\sin^{-1} x$ .

**Eksempel 2.**  $\dot{x} = tx + 1$  er en lineær differentialligning med  $a(t) = -t$ . En stamfunktion er  $A(t) = -t^2/2$ , og en partikulær løsning bestemmes ved

$$e^{-A(t)} \int e^{A(t)} f(t) \, dt = e^{t^2/2} \int e^{-t^2/2} \, dt.$$

Stamfunktionen kan ikke udtrykkes ved elementære funktioner.

**Eksempel 3.** Differentialligningen  $\dot{x} = rx$  bestemmer *eksponentiel vækst*, hvis  $r > 0$ , og *henfald*, hvis  $r < 0$ . Størrelsen  $r$  er den *specifikke vækstrate*. Konstanten  $x = 0$  er en ligevægt, stabil hvis  $r < 0$ , og ustabil, hvis  $r > 0$ .

**Eksempel 4.** *Logistisk vækst* bestemmes af differentialligningen,

$$\dot{x} = \frac{r}{b}x(b-x) = rx - \frac{r}{b}x^2,$$

hvor  $r, b > 0$ . Det kan fx beskrive bestanden af torsk i Nordsøen. Størrelsen  $r$  er den *specifikke vækstrate*, og  $b$  er *bærekapaciteten*. Når  $x > 0$  er lille, bliver  $x^2$  helt forsvindende, og ligningen er med tilnærmelse  $\dot{x} = rx$ , dvs eksponentiel vækst. Men når  $x$  vokser, og nærmer sig  $b$ , får faktoren  $b - x$  betydning: den tvinger  $\dot{x}$  til at nærme sig 0, dvs den får væksten  $x$  til at flade ud. Ligningen giver kun (biologisk) mening, når  $x \geq 0$ , herunder, når  $x > b$ . Det er ikke svært at løse ligningen eksplicit.

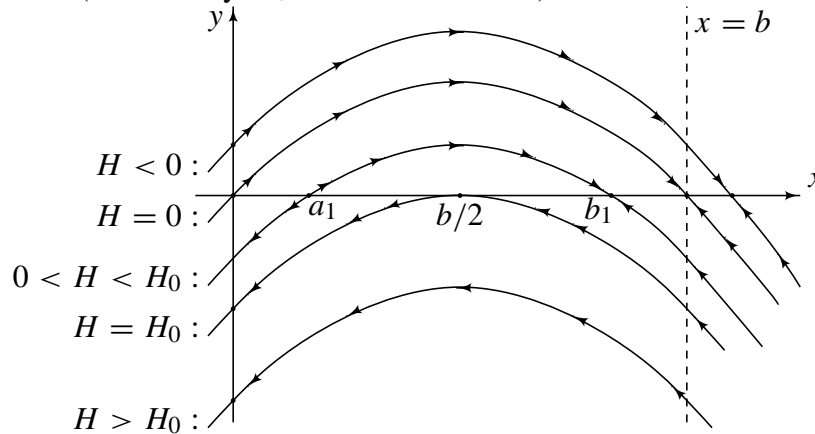
Ligevægt:  $x = 0$  og  $x = b$ , den første ustabil, den sidste stabil.

**Eksempel 5.** Logistisk vækst med *konstant fangst* (høst):

$$\dot{x} = \frac{r}{b}x(b-x) - H = rx - \frac{r}{b}x^2 - H.$$

Fangsten pr tidsenhed er konstant, uafhængig af bestandens størrelse. Det opnås med den konstante *fangstkvote*  $H$ : så mange tons må der fiskes pr år.

Herunder nogle fase-diagrammer (grafer for  $y = \frac{r}{b}x(b-x) - H$ ) for forskellige værdier af fangsten  $H$  ( $H < 0$  betyder, at der udsættes fisk).



Ligevægtpunkterne er skæringspunkterne med  $x$ -aksen. Værdien  $H_0$  svarer til, at grafen netop rører  $x$ -aksen, altså

$$H_0 = rb/4.$$

For  $H < H_0$  er der to ligevægtpunkter: én ustabil mindre end  $b/2$ , og en stabil større end  $b/2$ . For  $H = H_0$  er der én ligevægt  $x = b/2$ , men den er ustabil. Endelig, for  $H < H_0$ , er der igen ligevægt: bestanden uddør. Værdien  $H_0 = \frac{1}{4}rb$  er altså den største værdi af fangstkvoten, for hvilken der er en ligevægt; den er det *maksimalt opretholdelige udbytte* (*maximal sustainable yield*). Men vi tager det lige én gang til: Den tilsvarende ligevægt er ustabil: hvis bestanden kommer bare en fisk under ligevægten  $b/2$ , vil den uddø!

**Eksempel 6.** Logistisk vækst med *konstant fangstkapacitet*  $c$ ,

$$\dot{x} = \frac{r}{b}x(b-x) - cx = (r-c)x - \frac{r}{b}x^2.$$

Fangsten pr tidsenhed er proportional med bestandens størrelse. Det opnås med et konstant antal fiskerbåde (eller bedre: konstant tonnage). Der er to ligevægtpunkter,  $x = 0$  og  $x = b(r-c)/r$ . Antages  $c < r$ , er ligevægten  $x = b(r-c)/r$  stabil. Fangsten (pr tidsenhed), opnået fra ligevægten, er

$$h = c \cdot \frac{b(r-c)}{r}.$$

Den største værdi af  $h$  fås, når  $c(r-c)$  er størst mulig, dvs når  $c = r/2$ . Med denne værdi af  $c$  er ligevægten  $b/2$  og værdien af  $h$  er

$$\frac{1}{4}r^2b/r = rb/4,$$

altså præcis som ved det maksimale udbytte  $H_0$  ved konstant fangstkvote. Men med konstant kapacitet er ligevægten stabil!

**Eksempel 7.** For det generelle lineære system i planen,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= cx + dy, \end{aligned} \quad \text{eller } \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \text{hvor } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

hvor  $\det A \neq 0$ , kan man efter en passende koordinattransformation antage, at  $A$  har en af følgende former:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Matricerne modsvarer mulighederne for karakteristiske rødder: De karakteristiske polynomier er

$$\text{for } A_1: (z - \lambda)(z - \mu), \quad \text{for } A_2 \text{ og } A_3: (z - \lambda)^2, \quad \text{og for } A_4: (z - a)^2 + b^2,$$

med to forskellige, reelle rødder  $\lambda, \mu$ , med én (dobbel)rod  $\lambda$ , og med to imaginære rødder  $a \pm bi$  ( $b > 0$ ).

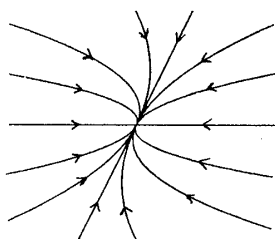
**Eksempel 8.** Ligningen  $\dot{\mathbf{x}} = A_1\mathbf{x}$  er simpel:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x, \\ \dot{y} &= \mu y, \end{aligned} \quad \text{med løsningen } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ce^{\lambda t} \\ De^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

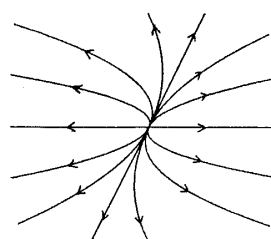
Det er let at eliminere  $t$ : Når  $x \neq 0$  er

$$y = De^{\mu t} = D(e^{\lambda t})^{\mu/\lambda} = D(x/C)^{\mu/\lambda} = E|x|^{\mu/\lambda},$$

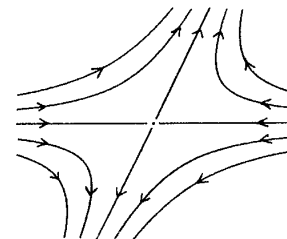
hvor  $E$  er en (ny) konstant. Banerne er altså graferne for potensfunktionerne  $y = E|x|^v$  med  $v := \mu/\lambda$ , samt  $y$ -aksen. I det almindelige tilfælde, dvs uden koordinattransformationen, ser banerne sådan ud:



$\lambda < \mu < 0$   
knode  
asymptotisk stabil



$0 < \mu < \lambda$   
knode  
ustabil



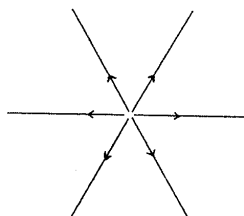
$\lambda < 0 < \mu$   
saddelpunkt  
ustabil

**Eksempel 9.** Ligningen  $\dot{\mathbf{x}} = A_2\mathbf{x}$ , altså

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x, \\ \dot{y} &= \lambda y, \end{aligned} \quad \text{med løsningen } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ce^{\lambda t} \\ De^{\lambda t} \end{pmatrix},$$

10. juni 2002

er specialtilfældet, hvor  $\lambda = \mu$ . Bemærk, at hvis ligningen har dette udseende i ét koordinatsystem, så ser den sådan ud i alle koordinatsystemer. Det er klart, at banerne bliver halvlinierne  $y = Ex$  samt  $y$ -aksen:



$\lambda > 0$   
ustabil

**Eksempel 10.** Ligningen  $\dot{\mathbf{x}} = A_3 \mathbf{x}$ , altså

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x + y, \\ \dot{y} &= \lambda y,\end{aligned}$$

løses ved først at løse den sidste ligning,  $\dot{y} = \lambda y$ . Det giver  $y = De^{\lambda x}$ , som indsættes i den første ligning:

$$\dot{x} = \lambda x + y = \lambda x + De^{\lambda t}.$$

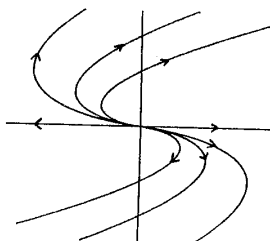
En partikulær løsning er  $x = Dte^{\lambda t}$ , og den fuldstændige løsning er  $x = Ce^{\lambda t} + Dte^{\lambda t}$ . Den generelle løsning til systemet er altså:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Dt + C)e^{\lambda t} \\ De^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Elimineres  $t = \lambda^{-1} \ln(y/D)$  fås ligningerne for banerne:

$$x = Ey + \lambda^{-1} y \ln |y|,$$

hvor  $E$  er en konstant, samt  $y = 0$ . De ser sådan ud:



$\lambda > 0$   
ustabil

Med  $\lambda < 0$  fås tilsvarende baner, med pilene vendt, dvs en asymptotisk stabil ligevægt.

**Eksempel 11.** Den sidste ligning  $\dot{\mathbf{x}} = A_4 \mathbf{x}$ , altså

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - by, \\ \dot{y} &= bx + ay,\end{aligned}$$

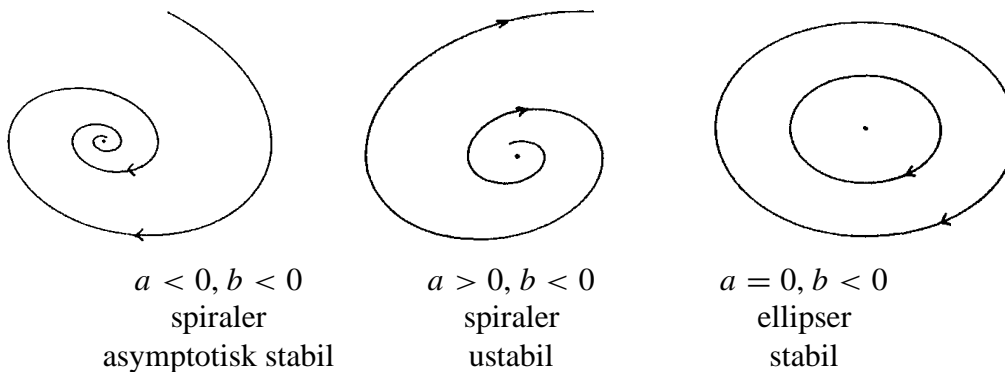
løses efter bogen: elimineres  $y$  fås en andenordens lineær ligning i  $x$  med imaginære karakteristiske rødder  $a \pm bi$ . Den har den generelle løsning  $x = Ce^{at} \cos(bt + \omega)$ . Herefter bestemmes  $y$  af den første ligning:

$$by = ax - \dot{x} = aCe^{at} \cos(bt + \omega) - aCe^{at} \cos(bt + \omega) + bCe^{at} \sin(bt + \omega),$$

altså  $y = Ce^{at} \sin(bt + \omega)$ . Den fuldstændige løsning til systemet bliver:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ce^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt + \omega) \\ \sin(bt + \omega) \end{pmatrix}.$$

For  $a = 0$  bliver banerne cirkler, for  $a \neq 0$  bliver det spiraler. I det almindelige tilfælde, dvs uden koordinattransformationen, ser banerne sådan ud:



**Eksempel 12.** Det autonome system:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + (1 - x^2 - y^2)(y + ax + by), \\ \dot{y} &= x + (1 - x^2 - y^2)(-x + cx + dy),\end{aligned}$$

ser jo mystisk ud! Men du behøver faktisk ikke at regne produkterne på højresidener ud for at indset, at (1) de er polynomier i  $x, y$  (og specielt „pæne“ funktioner), (2) de er uden konstantled (dvs origo  $(0, 0)$  er et ligevægtspunkt), og (3) førstegradsleddene er  $ax + by$  og  $cx + dy$ . Det sidste betyder, at Jacobimatricen i  $(0, 0)$  er  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Passende valg af  $a, b, c, d$  vil altså illustrere forskellige typer stabilitet.

Og det er også klart, at uanset valget er  $(x, y) = (\cos t, \sin t)$  en løsning til systemet: faktoren  $1 - x^2 - y^2$  er konstant lig med 0, og uden denne faktor står der blot den lineære differentilligning, hvis løsningsbaner er cirklerne  $(x, y) = (C \cos t, C \sin t)$ . Bemærk, at enhedscirklen er en lukket bane for systemet.

10. juni 2002

**Eksempel 13.** Lotka–Volterra’s differentialligninger, i kvadranten  $x \geq 0, y \geq 0$ ,

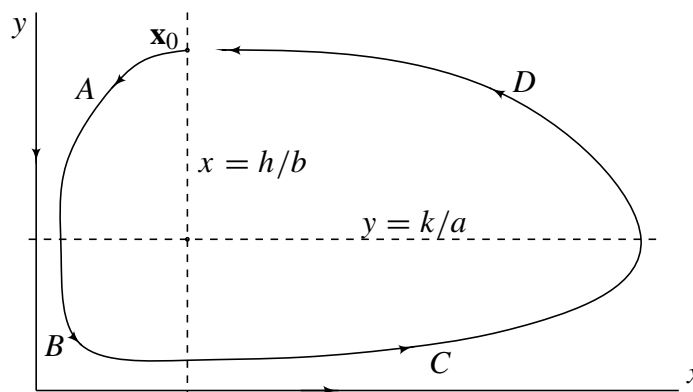
$$\dot{x} = kx - axy$$

$$\dot{y} = bxy - hy,$$

er en byttedyr/rovdyr-model ( $x =$  antal byttedyr,  $y =$  antal rovdyr). Når antallet af rovdyr er lille, kan man se bort fra leddet  $axy$  i den første ligning; den første ligning er så, med tilnærmelse,  $\dot{x} = kx$ , som beskriver eksponentiel vækst af byttedyrene. Den negative korrektion  $-axy$  i byttedyrenes vækst (pr tidsenhed) angiver antallet af byttedyr, der ædes af rovdyrene: antallet er proportionalt med antallet af rovdyr og med antallet af byttedyr. Tilsvarende, når antallet  $x$  af byttedyr er lille, beskriver den anden ligning eksponentielt henfald,  $\dot{y} = -hy$ , af rovdyrene (de dør af sult). Den positive korrektion  $bxy$  til rodyrenes vækst angiver antallet af rovdyr, der fødes på grund af byttedyrene.

Til en faseplansanalyse bemærkes først, at  $(0, 0)$  er et stationært punkt („ingen byttedyr, og ingen rovdyr“). Videre er der en bane med  $y = 0$ : på  $x$ -aksen med  $x = e^{kt}$ , dvs med en pil mod højre, og en bane med  $x = 0$ : på  $y$ -aksen med  $y = e^{-ht}$ , dvs med en pil nedad.

Videre er  $(h/b, k/a)$  et stationært punkt. På linien  $y = k/a$  har banerne lodret tangent, og på linien  $x = h/b$  har banerne vandret tangent. Herefter er det nemt at få en første fornemmelse af en banekurve, der begynder i et punkt  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$  med  $x_0 = h/b$  og  $y_0 > k/a$ :



Banen begynder i  $\mathbf{x}_0$ , hvor  $\dot{y} = 0$  og  $\dot{x} < 0$ : kurven har vandret tangent ( $\dot{y} = 0$ ), og bevæger sig med venstre ( $\dot{x} < 0$ ), og kommer herved til område A, hvor også  $\dot{y} < 0$ . Så længe den befinder sig i A, må den altså bevæge sig nedad mod venstre. Den kan ikke krydse  $y$ -aksen (som jo i sig selv er en bane). Derfor må den forlade område A ved at ramme linien  $y = k/a$  med lodret tangent, hvorefter den trænger ind i område B. Her er  $\dot{y} < 0$  og  $\dot{x} > 0$ : i område B bevæger kurven sig altså nedad mod højre. Den kan ikke krydse  $x$ -aksen, og må altså forlade område B ved at ramme linien  $x = h/b$  med vandret tangent. Herefter trænger den ind i område C, hvor  $\dot{x} > 0$  og  $\dot{y} > 0$ : den bevæger sig opad mod højre. Denne observation („opad mod højre“) er ikke i sig selv nok til at sikre at kurven rammer linien  $y = k/a$ ; men ved at sammenholde kurvens hældningskoefficient  $\dot{y}/\dot{x}$  med de givne differentialligninger er det let at udelukke, at  $x(t) \rightarrow \infty$  samtidig med at  $y$  er begrænset. Derfor overskrides linien  $y = k/a$ , hvorefter kurven bevæger sig ind i område D: opad

10. juni 2002

mod venstre. Samme argument som for område  $C$  giver, at kurven til sidst vil ramme linien  $x = h/b$ .

Analysen fortæller ikke, om kurven vil ramme over eller i eller under begyndelsespunktet  $x_0$ . Faktisk rammes begyndelsespunktet  $x_0$  eller, ækvivalent: *Alle baner er lukkede kurver.*

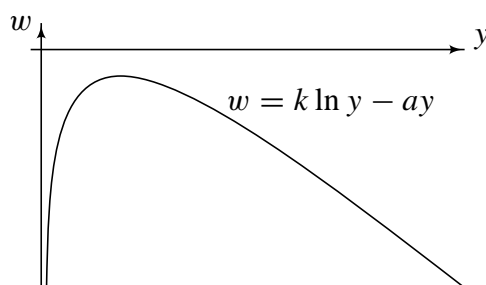
**Eksempel 14.** Banerne for Lotka–Volterra's ligninger,  $\dot{x} = kx - axy$ ,  $\dot{y} = bxy - hy$ , kan bestemmes ved at eliminere  $t$ : Af ligningerne fås, idet  $dy/dx = \dot{y}/\dot{x}$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(bx - h)}{x(k - ay)},$$

som er en separabel differentiaalligning med den ubekendte funktion  $y = y(x)$ . Løsning ved separation:  $\int (k/y - a)dy = \int (b - h/x)dx$ , altså

$$(*) \quad k \ln y - ay = bx - h \ln x + \text{konstant.}$$

Hver bane ligger altså på en af kurverne bestemt ved (\*) for en passende værdi af konstanten. For at se, at banerne er lukkede kurver, betragtes grafen for funktionen  $w = k \ln y - ay$  på højresiden:



Det fremgår, at ligningen (\*), for en given værdi af  $x$ , har 0, 1, eller 2 løsninger  $y$ . Og mere præcist, at der findes tal  $x'$  og  $x''$  således, at (\*) har to løsninger  $y$  for  $x' < x < x''$ , én løsning  $y$  for  $x = x'$  eller  $x = x''$ , og ingen løsninger ellers. Men det betyder netop, at kurven, der beskrives ved (\*), er en „pæn“ lukket kurve.

**Eksempel 15.** Variationsproblemet med givne begyndelses- og slutværdier:

$$(\min) \quad L(x) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + (\dot{x})^2} dt \text{ for } x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2.$$

Integralet er længden af kurven fra  $(t_0, x_0)$  til  $(t_1, x_1)$  bestemt ved grafen for  $x = x(t)$ . Her er  $F(t, x, y) = \sqrt{1 + y^2}$ , og dermed  $\partial F/\partial x = 0$  og  $\partial F/\partial y = y/\sqrt{1 + y^2}$ . Sættes  $q := \sqrt{1 + (\dot{x})^2}$  får man  $\partial F/\partial y = \dot{x}/q$  og  $\dot{q} = (1/2q)2\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}\ddot{x}/q$ . Derfor er

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}}{q} \right) = \frac{\ddot{x}q - \dot{x}\dot{q}}{q^2} = \frac{(q - \dot{x}^2/q)\ddot{x}}{q^2} = \frac{(q^2 - \dot{x}^2)\ddot{x}}{q^3} = \frac{\ddot{x}}{q^3}.$$

Da  $\partial F/\partial x = 0$ , er Euler's differentiaalligning denne:  $\ddot{x} = 0$ , som øjensynlig har den generelle løsning  $x = at + b$ . Værdierne  $x_1, x_2$  i endepunkterne bestemmer  $a$  og  $b$ . Konklusion?

10. juni 2002

**Eksempel 16.** Et trick: Euler's differentiaalligning, samlet på den ene side af lighedstegnet,

$$(EL) \quad \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

kan simplificeres, hvis  $F(t, x, y)$  kun afhænger af  $(x, y)$ : Af

$$\frac{d}{dt} F = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \ddot{x} \quad \text{og} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \dot{x} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \ddot{x}$$

fås, ved trække den sidste ligning fra den første, at

$$\frac{d}{dt} \left( F - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \dot{x} \right) = \left( \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \dot{x}.$$

Heraf ses: De ikke-konstante løsninger til Eulerligningen er netop de ikke-konstante løsninger til følgende ligning:

$$F - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \dot{x} = \text{konstant}.$$

**Eksempel 17.** Minimer  $L(x) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + (\dot{x})^2} dt$  for givne værdier  $x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2$  [Samme opgave som i et tidligere eksempel!]. Trick'et giver ligningen:

$$\sqrt{1 + \dot{x}^2} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \cdot \dot{x} + \text{konstant},$$

som simplificeres til

$$1 = \sqrt{1 + \dot{x}^2} \cdot \text{konstant},$$

altså  $\dot{x} = \text{konstant}$ . Det følger, at  $x = at + b$ .

**Eksempel 18.** Variationsproblem med givne randværdier:

$$(\min) \quad V(x) = \pi \int_{t_0}^{t_1} x^2 dt \quad \text{for } x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2.$$

Integralet er, bortset fra faktoren  $\pi$ , rumfanget af det legeme der fremkommer, når grafen af funktionen  $x = x(t)$  drejes omkring  $t$ -aksen. Her er  $\partial F / \partial y = 0$ , så trick'et giver ligningen  $x^2 = 0$ , dvs  $x(t)$  er nul-funktionen. Men det kan jo ikke kombineres med de givne bibetingelser. Overrasket?

**Eksempel 19.** Variationsproblem med givne randværdier:

$$(\min) \quad O(x) = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} x \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt \quad \text{for } x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2.$$

Integralet er, bortset fra faktoren  $2\pi$ , overfladen (fraregnet „top“ og „bund“) af det legeme der fremkommer, når grafen af funktionen  $x = x(t)$  drejes omkring  $t$ -aksen. Her er  $\partial F / \partial \dot{x} = x \dot{x} / \sqrt{1 + \dot{x}^2}$ , så trick'et giver ligningen

$$x \sqrt{1 + \dot{x}^2} - \frac{x \dot{x}^2}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = C.$$

Multipliseres med  $\sqrt{1 + \dot{x}^2}$ , fås  $x = C \sqrt{1 + \dot{x}^2}$ , altså

$$\dot{x} = \pm \sqrt{(x/C)^2 - 1}.$$

Løsninger er „kædelinier“:  $x = C \cosh(t - D)/C$ , hvor  $\cosh t := (e^t - e^{-t})/2$ .

**Eksempel 20.** Jeg kører i bil fra HHK kl 11.30 og skal være på KU kl 12.00, altså efter  $\frac{1}{2}$  time. Afstanden er 3 km. Hvordan regulerer jeg farten,  $u = u(t)$ , således, at benzinforbruget minimaliseres? Idet jeg regner med, at benzinforbruget pr tidsenhed er proportionalt med kvadratet på farten, fås følgende kontrolproblem:

$$(\max) \quad \int_0^{1/2} (-u^2) dt \quad \text{for } 0 \leq u \leq 50, \dot{x} = u, x(0) = 0, x(\frac{1}{2}) = 3.$$

Bemærk, at spring er tilladte for kontroller, fx er  $u(t) = 50$  for  $t \leq 3/50$  og  $u(t) = 0$  for  $t > 3/50$  („kør 50 km/time i de første 3,6 minutter, og hold så stille resten af tiden“) en tilladt kontrol.

Løsning via Sætning 9.1:

$$H = -u^2 + pu, \quad \partial H / \partial x = 0, \quad \text{dvs } \dot{p} = 0.$$

Derfor på  $p(t)$  være konstant. Og så må  $u = u(t)$ , som maksimerer  $H$ , være konstant,  $u = C$ . Ligningen  $\dot{x} = C$  med  $x(0) = 0$  giver  $x = Ct$ , og slutbetingelsen giver  $C \cdot \frac{1}{2} = 3$ , dvs  $C = 6$ . Altså er  $u = 6$ . Betingelsen i Sætning 9.1 er opfyldt:  $H$  er klart konkav som funktion af  $u$ , og dermed som funktion af  $(x, u)$ . Svaret er altså: farten skal være konstant, 6 km/time. Herefter kan den adjungerede (konstante) funktion i øvrigt bestemmes:  $u = 6$  er et indre punkt, så  $\partial H / \partial u = 0$ , dvs  $-2u + p = 0$  for  $u = 6$ , hvoraf  $p = 12$ .

**Eksempel 21.** Et kontrolproblem:

$$(\max) \int_0^T (u - \lambda x) dt \quad \text{for } 0 \leq u \leq h, \dot{x} = rx - u, x(0) = x_0, x(T) = x_T.$$

Her er  $x = x(t)$  bestanden af fisk, differentialligningen siger eksponentiel vækst, men den hæmmes af kontrollen, som er fangstknoten  $u(t)$ . Profitraten er proportional med  $u$ , men herfra skal trækkes omkostningerne,  $\lambda x$ , hvor  $\lambda > 0$ , hvis det er fisk fra et dambrug, og  $\lambda = 0$ , hvis det er fisk i Nordsøen. Integralet er altså den nettoprofiten.

Vi prøver, om Sætning 9.1 kan anvendes: Hamiltonfunktionen (med  $p_0 = 1$ ):

$$(1) \quad H = u - \lambda x + p(rx - u) = (1 - p)u + rpx - \lambda x.$$

Den er lineær i  $u$ ,  $x$ , og specielt konkav. Differentialligningen  $\dot{p} = -\partial H/\partial x$  for den adjungerede funktion  $p$ :

$$(2) \quad \dot{p} = -rp + \lambda.$$

Af udtrykket for  $H$  fås umiddelbart, for den optimale kontrol  $u = u(t)$ :

$$(3) \quad u(t) = \begin{cases} 0 & \text{når } p(t) > 1, \\ h & \text{når } p(t) < 1. \end{cases}$$

Betragt løsningerne til  $\dot{x} = rx - u$ , med  $x(0) = x_0$ . Den største løsning fås med  $u \equiv 0$ ; det giver  $x = x_0 e^{rt}$  med en slutværdi  $x_{\max} = x_0 e^{rT}$ . Den mindste løsning fås med  $u = h$ ; det giver  $x = (x_0 - h/r)e^{rt} + h/r$  og en tilsvarende slutværdi  $x_{\min}$ . Slutværdien  $x(T)$  af en løsning  $x(t)$  må altså ligge mellem slutværdierne  $x_{\min}$  og  $x_{\max}$ . Kontrolproblemet kan således kun have løsninger, hvis den givne slutværdi  $x_T$  opfylder ulighederne,

$$(4) \quad x_{\min} \leq x_T \leq x_{\max}, \quad \text{hvor } x_{\min} = (x_0 - h/r)e^{rT} + h/r, \quad x_{\max} = x_0 e^{rT}.$$

Hvis lighed gælder et af de to steder, er der kun én tilladt kontrol, og så er problemet jo trivielt. Antag altså, at der er skarp ulighed begge steder i (4). Det følger da, at for den optimale kontrol  $u$  må begge muligheder i (3) være tilstede: ligheden  $p(t) = 1$  må være opfyldt for en værdi  $t = \bar{t}$  med  $0 < \bar{t} < T$ . Det er let at løse differentialligningen (2):

$$(5) \quad p(t) = Ce^{-rt} + \lambda/r.$$

Da vi skal have  $p(\bar{t}) = 1$  for en værdi  $\bar{t} > 0$ , følger det, at i (5) må vi have  $C > 0$  hvis  $\lambda/r < 1$ , og  $C < 0$  hvis  $\lambda/r > 1$  (tilfældet  $\lambda/r = 1$  udsættes lidt). Antag først, at  $\lambda/r < 1$ . Da er  $C > 0$  i (5), og det følger, at  $p(t)$  er aftagende. Derfor er  $p(t) > 1$  for  $t < \bar{t}$  og  $p(t) < 1$  for  $t > \bar{t}$ . Altså er, i følge (3),

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq t < \bar{t}, \\ h & \text{for } \bar{t} < t \leq T, \end{cases} \quad \text{når } \lambda/r < 1.$$

Nu kan  $x(t)$  bestemmes: I begyndelsen, for  $t_0 \leq t \leq \bar{t}$ , er  $\dot{x} = rx$ . Altså er  $x = x_0 e^{rt}$ , som giver værdien  $\bar{x} = x(\bar{t}) = x_0 e^{r\bar{t}}$ . I resten af tiden, dvs for  $\bar{t} \leq t \leq T$ , er  $\dot{x} = rx - h$ , og da  $x(\bar{t}) = \bar{x}$  fås

$$x = (\bar{x} - h/r)e^{-r(t-\bar{t})} + h/r = (x_0 - (h/r)e^{-r\bar{t}})e^{rt} + h/r.$$

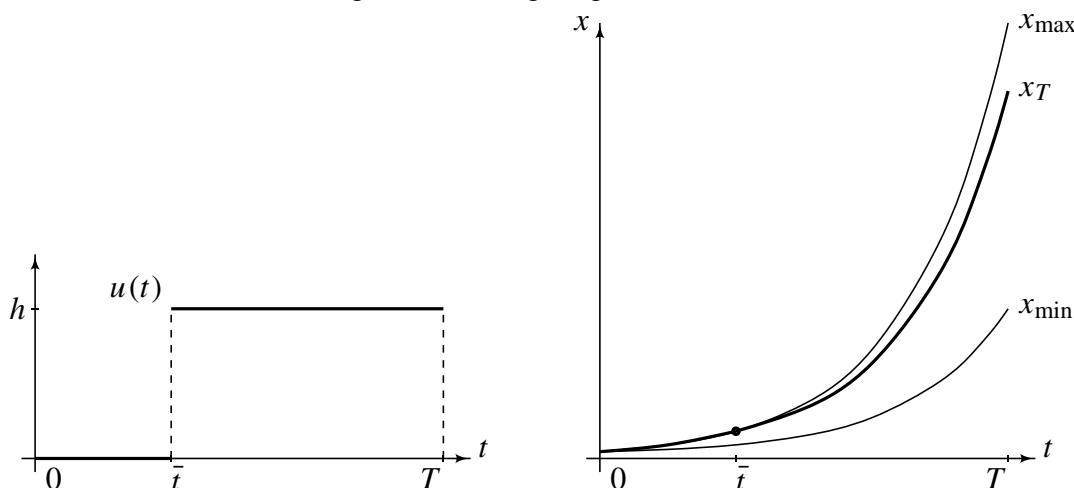
Slutbetingelsen er  $x(T) = x_T$ , altså

$$(x_0 - (h/r)e^{-r\bar{t}})e^{rT} + h/r = x_T.$$

Heraf bestemmes fx først  $e^{r(T-\bar{t})}$ :

$$e^{r(T-\bar{t})} = (x_0 e^{rT} - x_T + h/r)/(h/r),$$

og derefter  $\bar{t}$  ved – bl.a. – at tage den naturlige logaritme.



Hvis  $\lambda/r > 1$ , fås den komplementære situation:  $u(t) = h$  i begyndelsen, for  $0 \leq t \leq \bar{t}$ , og  $u(t) = 0$  i slutningen, for  $\bar{t} < t \leq T$ . Også her bestemmes  $\bar{t}$  nu ud fra slutbetingelsen  $x(T) = x_T$ . Forudsætningerne i Sætning 9.1 er opfyldt: den således bestemte funktion er en optimal kontrol.

Hvis  $\lambda/r = 1$ , altså  $\lambda = r$ , er enhver tilladt kontrol en optimal kontrol. Integranden  $u - \lambda x$  er jo lig med  $-(rx - u)$ , dvs lig med  $-\dot{x}$ . Altså er

$$\int_0^T (u - \lambda x) dt = - \int_0^T \dot{x} dt = x(0) - x(T) = x_0 - x_T.$$

**Eksempel 22.** Et kontrolproblem:

$$(\max) \int_0^T U(1-s) dt \quad \text{for } 0 \leq s \leq 1, \dot{x} = s, x(0) = x_0, x(T) \geq x_T.$$

10. juni 2002

Her er  $U(c)$  en konkav nyttefunktion, dvs  $U' > 0$  og  $U'' < 0$ . Tallene  $T$ ,  $x_0$  og  $x_T$  er givne: det antages, at

$$(1) \quad x_0 < x_T < x_0 + T$$

Hamiltonfunktionen,

$$(2) \quad H(t, x, s, p) = U(1 - s) + ps,$$

er konkav. Betingelserne (I), (II), og (III) er derfor tilstrækkelige. Vi prøver om de kan opfyldes med  $(x, s, p)$ .

Da  $\partial H/\partial x = 0$ , giver (I), at  $\dot{p} = 0$ , altså at  $p$  er konstant,  $p(t) = \bar{p}$ . Tallet  $\bar{s}$ , der maksimerer Hamiltonfunktionen (2), er derfor også konstant, så  $s(t) = \bar{s}$  for alle  $t$ . Ifølge (III) er  $\bar{p} \geq 0$ . Funktionen  $U$  er voksende, så  $U(1 - s)$  er aftagende; den maksimeres altså i  $s = 0$ . Hvis  $\bar{p} = 0$ , må vi altså have  $\bar{s} = 0$ . Og hvis  $\bar{s} = 0$ , får vi  $\dot{x} = 0$ , dvs  $x(t) \equiv x_0$ , i modstrid med (1), da vi kræver  $x(T) \geq x_T$ . Derfor er  $\bar{s} > 0$ , og  $\bar{p} > 0$ . Af  $\bar{p} > 0$  og (III) følger, at vi må have  $x(T) = x_T$ . Hvis  $\bar{s} = 1$ , har vi  $\dot{x} = 1$ , altså  $x = t + x_0$ , men så er  $x(T) = T + x_0$ , i modstrid med (1). Altså har vi

$$0 < \bar{s} < 1, \quad \bar{p} > 0.$$

Herefter er  $\dot{x} = \bar{s}$ , altså  $x = \bar{s}t + x_0$ , og slutbetingelsen giver  $x_T = \bar{s}T + x_0$ , dvs  $\bar{s} = (x_T - x_0)/T$ . For at sikre, at denne værdi  $\bar{s}$ , i det indre af intervallet  $[0, 1]$ , maksimerer Hamiltonfunktionen, på  $\bar{p}$  defineres således, at  $\partial H/\partial s = 0$  i  $\bar{s}$ . Vi skal altså have

$$\bar{s} = (x_T - x_0)/T, \quad \bar{p} = U'(1 - \bar{s}).$$

Med disse valg er betingelserne opfyldt:  $s(t) \equiv \bar{s}$  er den optimale kontrol, og  $x = \bar{s}t + x_0$  den tilsvarende tilstand.

**Eksempel 23.** Kontrolproblem, fra eksamen, Juli 2001 (en ufuldstændig besvarelse):

$$(\max) \quad \int_0^2 (-2tx - u^2) dt \quad \text{for } -1 \leq u \leq 1, \dot{x} = 2u, x(0) = 1, x(2) \text{ fri.}$$

Type (c), så  $p(2) = 0$ . Hamiltonfunktionen,

$$H = -2tx - u^2 + 2pu,$$

er konkav, fordi  $-2tx + 2pu$  er lineær i  $x, u$  og  $-u^2$  er konkav. Da  $\partial H/\partial x = -2t$ , er

$$\dot{p} = 2t, \quad \text{altså } p = t^2 - 4 \quad (\text{idet jo } p(2) = 0).$$

Specielt er  $p(t) \leq 0$  for alle  $t$ . Videre er  $\partial H/\partial u = -2u + 2p$ . For den værdi af  $u$ , der maksimerer  $H$ , har vi derfor enten  $-2u + 2p \leq 0$  og  $u = -1$  (opfyldt for  $p \leq -1$ ), eller  $-2u + 2p = 0$  og  $-1 < u < 1$  (opfyldt for  $p = u$  og  $-1 < p < 1$ ), eller  $-2u + 2p \geq 0$  og  $u = 1$  (opfyldt for  $p \geq 1$ ). Funktionen  $p$  er kendt. Det følger, at  $u = -1$  når  $p < -1$ , dvs når  $0 \leq t < \sqrt{3}$ , og  $u = p = t^2 - 4$  for  $\sqrt{3} < t \leq 4$ .

Da  $\dot{x} = 2u$ , fås  $x = -2t + 1$  for  $0 \leq t \leq \sqrt{3}$ , og  $x = 2t^3/3 - 8t + C$  for  $\sqrt{3} < t \leq 2$ . De to udtryk skal stemme overens for  $t = \sqrt{3}$ ; det giver  $C = 4\sqrt{3} + 1$ .

**Eksempel 24.** Samme problem, men med skrotværdi:

$$(\max) \quad -e^{-x(2)-3} + \int_0^2 (-2tx - u^2) dt \quad \text{for } -1 \leq u \leq 1, \dot{x} = 2u, x(0) = 1.$$

Skrotværdifunktionen  $S(x) = -e^{-x-3}$  er konkav, og  $dS/dx = e^{-x-3}$ . Betingelsen (III) giver altså

$$(1) \quad p(2) = e^{-x(2)-3}.$$

Af  $\dot{x} = 2u \geq -2$  og  $x(0) = 1$  følger, at  $x(t) \geq 1 - 2t$ . Specielt er  $x(2) \geq -3$ . Derfor er  $-x(2) - 3 \leq 0$ . Eksponenten på højresiden i (1) er altså negativ. Af (1) følger derfor, at  $0 < p(2) < 1$ . Da  $\dot{p} = 2t$ , følger det, at  $p$  antager værdien  $-1$  for et punkt  $\bar{t}$ :

$$(2) \quad p = t^2 - \bar{t}^2 - 1, \quad \text{med } 0 < \bar{t} < 2$$

(endda med  $2 < \bar{t}^2 < 3$  svarende til at  $0 < p(2) < 1$ ).

På intervallet  $[0, \bar{t}]$  fås  $u \equiv -1$ , og  $x = -2t + 1$ , med  $x(\bar{t}) = -2\bar{t} + 1$ . Denne værdi tages som begyndelsesværdi på det næste interval  $[\bar{t}, 2]$ . Her er  $u = p$ , og  $\dot{x} = 2u$ , dvs

$$\dot{x} = 2t^2 - 2\bar{t}^2 - 2,$$

hvoraf, for  $t \geq \bar{t}$ :

$$(3) \quad x = \frac{2}{3}t^3 - 2\bar{t}^2 t - 2t + \frac{4}{3}\bar{t}^3 + 1.$$

Endelig, fra (2) og (3) kan man opnå slutværdierne  $p(2)$  og  $x(2)$ , og nu giver (1) en ligning til bestemmelse af  $\bar{t}$ . Den ligning er nu ikke sådan at løse eksplicit.

**Eksempel 25.** Kontrolproblem, fra eksamen, Juni 2001 (en ufuldstændig besvarelse):

$$(\max) \quad \int_0^2 (6u - x^4) dt \quad \text{for } 0 \leq u \leq 1, \dot{x} = u, x(0) = 1, x(2) \text{ fri.}$$

Type (c), så  $p(2) = 0$ . Hamiltonfunktionen,

$$H = 6u - x^4 + pu,$$

er konkav i  $x, u$ , så kandidaterne er løsninger. Fra (I) og (III) fås:

$$(1) \quad \dot{p} = 4x^3, \quad p(2) = 0,$$

og af (II) fås:

$$(2) \quad u = \begin{cases} 1, & \text{hvis } p > -6, \\ 0, & \text{hvis } p < -6. \end{cases}$$

10. juni 2002

Af  $\dot{x} = u$  med  $u(t) \geq 0$  følger, at  $x(t)$  er voksende; specielt er  $x(t) \geq x(0)$ , dvs  $x(t) \geq 1$ . Nu følger af (1), at  $\dot{p} \geq 4$ , og videre, at  $p(t) \leq 4(t - 2)$ . Altså er  $p(0) \leq -8$ . Da  $p(0) \leq -8$ ,  $p(2) = 0$  og  $p(t)$  er strengt voksende, findes ét punkt  $t^*$  med  $0 < t^* < 2$  således, at

$$(3) \quad p(t^*) = -6.$$

Nu fremgår det af (2), idet  $p(t)$  er voksende, at

$$(4) \quad u = \begin{cases} 0, & \text{hvis } 0 \leq t < t^*, \\ 1, & \text{hvis } t^* < t < 2. \end{cases}$$

Herefter bestemmes først  $x$  (af  $\dot{x} = u$ ,  $x(0) = 1$ ), og dernæst  $p$  (af  $\dot{p} = 4x^3$ ,  $p(t^*) = -6$ ):

$$x = \begin{cases} 1, \\ t - t^* + 1, \end{cases} \quad \dot{p} = \begin{cases} 4, \\ 4(t - t^* + 1)^3, \end{cases} \quad p = \begin{cases} 4(t - t^*) - 6, & \text{hvis } 0 \leq t < t^*, \\ (t - t^* + 1)^4 - 7, & \text{hvis } t^* < t \leq 2. \end{cases}$$

Endelig kan  $t^*$  bestemmes af betingelsen  $p(2) = 0$ : det giver  $(3 - t^*)^4 = 7$ , altså  $t^* = 3 - \sqrt[4]{7}$ . Med denne værdi af  $t^*$  er den optimale kontrol  $u$  bestemt ved (4).

**Eksempel 26.** Næsten samme problem, med skrotværdi:

$$(\max) \quad -6x(2) + \int_0^2 (6u - x^4) dt \quad \text{for } 0 \leq u \leq 1, \dot{x} = u, x(0) = 1.$$

Skrotværdifunktionen er  $-6x$ , som er lineær, og derfor konkav. Betingelsen (III),  $p(2) = (dS/dx)(x(2))$ , giver

$$p(2) = -6.$$

Da  $p$  er voksende, og  $p(2) = -6$ , er  $p(t) < -6$  for  $t < 2$ . Altså er  $u \equiv 0$  den optimale kontrol. Den giver  $\dot{x} = 0$ . Altså er  $x$  en konstant,  $x \equiv x(0) = 1$ .

**Eksempel 27.** Kontrolproblem med skrotværdi, jfr [S, Eksempel 2, s. 358],

$$(\max) \quad -\frac{1}{2}x(T)^2 + \int_0^T x dt, \quad \dot{x} = x + u, x(0) = 0, -1 \leq u \leq 1.$$

Hamiltonfunktionen,

$$H(t, x, u, p) = x + p(x + u),$$

er lineær i  $x, u$ , og specielt konkav, og skrotværdifunktionen  $S(x) = -\frac{1}{2}x^2$  er konkav. Altså er kandidaterne løsninger til problemet.

Betingelsen (I),  $\dot{p} = -\partial H/\partial x$ , giver  $\dot{p} = -1 - p$ , med den generelle løsning,

$$(1) \quad p = -1 + Ce^{-t}.$$

10. juni 2002

Bemærk, at  $p(t) \rightarrow -1$  for  $t \rightarrow \infty$ ; hvis  $C > 0$ , har  $p(t)$  et nulpunkt  $t^*$ , bestemt ved  $C = e^{t^*}$ , og  $p(t) > 0$  for  $t < t^*$  og  $p(t) < 0$  for  $t > t^*$ . Nulpunktet opfylder  $0 \leq t^* \leq T$ , når  $1 \leq C \leq e^T$ .

Betingelsen (II) giver, at

$$(2) \quad u = 1, \text{ når } p > 0, \text{ og } u = -1, \text{ når } p < 0.$$

Da  $S(x) = -\frac{1}{2}x^2$ , er  $dS/dx = -x$ . Betingelsen (III),  $p(T) = dS/dx(x(T))$ , giver altså

$$(3) \quad p(T) = -1 + Ce^{-T} = -x(T).$$

Der er tre muligheder:  $C \geq e^T$ ,  $C \leq 1$ , eller  $1 < C < e^T$ . Det er let at udelukke de to første: Antag, at  $C \geq e^T$ . Da er  $p(t) > 0$  for alle  $0 \leq t < T$ . Derfor er  $u \equiv 1$ . Af  $\dot{x} = x + 1$  og  $x(0) = 0$  følger, at  $x = -1 + e^t$ . Men så er  $x(t) > 0$  og  $p(t) \geq 0$  for  $t > 0$ , i modstrid med (3). Antag dernæst, at  $C \leq 1$ . Da er  $p(t) < 0$  for  $t > 0$ . Derfor er  $u \equiv -1$ . Af  $\dot{x} = x - 1$  og  $x(0) = 0$  følger  $x = 1 - e^t$ . Men så er  $p(t) < 0$  og  $x(t) < 0$  for  $t > 0$ , i modstrid med (3).

Tilbage er den sidste mulighed:  $1 < C < e^T$ . Med  $C = e^{t^*}$ , altså  $t^* = \ln C$ , er  $0 < t^* < T$ , og

$$(4) \quad u = \begin{cases} 1, & \text{når } 0 \leq t < t^* \\ -1, & \text{når } t^* < t \leq T. \end{cases}$$

Betragt først intervallet  $[0, t^*]$ . Her er  $u \equiv 1$ , og altså  $\dot{x} = x + 1$ . Af  $x(0) = 0$  følger så, at  $x = -1 + e^t$ . I det højre endepunkt  $t^*$  er værdien lig med  $x(t^*) = -1 + e^{t^*}$ . Denne værdi tages som begyndelsesværdi på det andet interval  $[t^*, T]$ . Her er  $u \equiv -1$ , og altså  $\dot{x} = x - 1$ . Af  $x(t^*) = -1 + e^{t^*}$  følger så, at

$$x(t) = 1 + (-2 + e^{t^*})e^{t-t^*}, \quad \text{for } t \geq t^*.$$

Af (3) følger nu, at  $-1 + Ce^{-T} = -1 - (-2 + e^{t^*})e^{T-t^*}$ . Da  $C = e^{t^*}$ , er altså

$$-1 + Ce^{-T} = -1 - (-2 + C)e^T/C.$$

Multipliseres med  $Ce^T$  fås, efter omordning, en andengradslikning:

$$C^2 + e^{2T}C - 2e^{2T} = 0;$$

dens positive løsning er

$$C = \frac{\sqrt{e^{2T} + 8} - e^T}{2} e^T.$$

Det er let at se, at brøken (faktoren foran  $e^T$ ) altid ligger mellem  $e^{-T}$  og 1. Tallet  $C$  ligger altså mellem 1 og  $e^T$ . Altså ligger  $t^* = \ln C$  mellem 0 og  $T$ , og med denne værdi af  $t^*$  er den optimale kontrol  $u$  bestemt ved (4).

**Eksempel 28.** Kontrolproblem med skrotværdi, jfr [S, Eksempel 1, s. 357]:

$$(\max) \quad -x(T)^2 + \int_0^T (1 - tx - u^2) dt, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = x_0.$$

Der er ingen restriktioner på  $u$ . Hamiltonfunktionen er

$$H = 1 - tx - u^2 + pu.$$

Betingelsen (I) giver  $\dot{p} = t$ , altså

$$(1) \quad p(t) = \frac{1}{2}t^2 + C.$$

Da der ikke er indskrænkninger på  $u$ , bestemmes maksimumpunktet  $u = u(t)$  ved at løse ligningen  $\partial H/\partial u = 0$ . Det giver

$$(2) \quad u = \frac{1}{2}p.$$

Endelig er skrotværdifunktionen  $S(x) = -x^2$  konveks, og  $dS/dx = -2x$ . Betingelsen (III) giver derfor

$$(3) \quad p(T) = -2x(T).$$

Af (1) og (2) fås  $u = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}C$ , og af  $\dot{x} = u$  og  $x(0) = x_0$  fås, at

$$(4) \quad x = \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{2}Ct + x_0.$$

Nu kan  $C$  bestemmes af (1), (2), og (3):

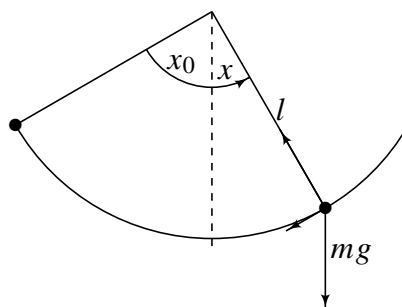
$$\frac{1}{2}T^2 + C = -\frac{1}{6}T^3 - CT - 2x_0,$$

hvoraf

$$C = -\frac{\frac{1}{6}T^3 + \frac{1}{2}T^2 + 2x_0}{1 + T}.$$

Med denne værdi af  $C$  er den optimale kontrol  $u$  givet ved (2) og (1).

**Eksempel 29.** Betragt et svingende pendul, med masse  $m$  og længde  $l$ :



Udsvingsvinklen fra den lodrette stilling er  $x = x(t)$ . Tyngdekraften, af størrelsen  $mg$ , har en komponent langs med stangen og en komponent vinkelret på stangen, af størrelsen  $mg \sin x$ . Det er alene den sidste komponent, der ændrer på  $x$ . Newton's anden lov (kraft=masse·acceleration), giver derfor differentiaalligningen  $mg \sin x = -m \cdot l\ddot{x}$ , altså

$$(1) \quad \ddot{x} + k \sin x = 0, \quad \text{hvor } k = g/l.$$

Alternativ: Fra udsvinget med vinklen  $x_0 = x(0)$  til udsvinget med vinklen  $x = x(t)$  ændres højden fra  $l(1 - \cos x_0)$  til  $l(1 - \cos x)$ . Ændringen i højde er altså  $l(\cos x_0 - \cos x)$ . Derfor ændres beliggenhedsenergien med  $mg \cdot l(\cos x_0 - \cos x)$ . Bevægelsesenergien er  $\frac{1}{2}mv^2$ , hvor  $v = l\dot{x}$  er farten. Bevægelsesenergien ændres altså med  $\frac{1}{2}ml^2(\dot{x}^2 - \dot{x}_0^2)$ , hvor  $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$ . Da energien er konstant, følger det, at

$$\frac{1}{2}ml^2(\dot{x}^2 - \dot{x}_0^2) + mgl(\cos x_0 - \cos x) = 0.$$

Altså er

$$(2) \quad \dot{x}^2 - \dot{x}_0^2 = 2k(\cos x - \cos x_0).$$

Specielt, hvis pendulet igangsættes med udsving  $x_0$  og hastigheden  $\dot{x}_0 = 0$ , så er

$$(3) \quad \dot{x}^2 = 2k(\cos x - \cos x_0).$$

Det er ikke så svært at se, at de to differentiaalligninger (1) og (2) er ensbetydende.

**Eksempel 30.** Når  $x$  er lille (dvs tæt ved 0), er  $\sin x \approx x$ , og differentiaalligningen for pendulet kan approksimeres med følgende:

$$\ddot{x} + kx = 0, \quad \text{hvor } k = g/l.$$

Det er en lineær, homogen, andenordens ligning. Det karakteristiske polynomium er  $z^2 + k$ , med rødderne  $z = \pm i\sqrt{k}$ . Den generelle løsning er derfor  $x = C \cos(\sqrt{k}t + D)$ . Bemærk specielt, at alle løsninger har den samme periode, nemlig  $2\pi/\sqrt{k}$ . For denne tilnærmede model af pendulet er svingningstiden, uanset udsvingets størrelse, altså bestemt ved formlen,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Det skal bemærkes, at for løsningerne til den egentlige pendulligning, vil svingningstiden afhænge af udsvingets størrelse.

10. juni 2002

**Eksempel 31.** Differentialligningen for pendulet er en andenordensligning,  $\ddot{x} + k \sin x = 0$  med  $k > 0$ . Den ændres til et system af førsteordensligninger ved at indføre en ny ubekendt funktion  $y = \dot{x}$ :

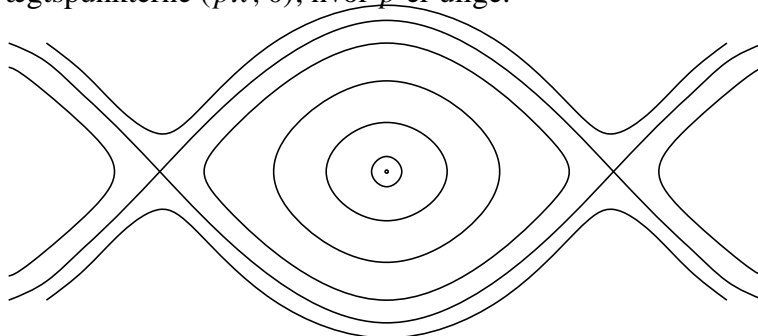
$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -k \sin x.\end{aligned}$$

Ligevægtpunkter er punkterne  $(0, p\pi)$ , hvor  $p \in \mathbb{Z}$ . Jacobimatricen er  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k \cos x & 0 \end{pmatrix}$ , med determinanten  $k \cos x$ . I ligevægtpunkter  $(0, p\pi)$  med  $p$  ulige bliver determinanten  $-k$ , og dermed negativ. Sådanne punkter er altså saddepunkter, og specielt ustabile. Hvis  $p$  er lige, bliver determinanten  $k$ , og dermed positiv, og da matricen har sporet 0, får vi ingen information om stabilitet i disse punkter. At disse punkter faktisk er lokalt stabile ses ved at bestemme banekurverne:

Eliminér  $t$  ved at dividere den nederste ligning med den øverste, separere, og integrere:

$$(*) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-k \sin x}{y}; \quad y dy = -k \sin x dx; \quad y^2 = 2k(\cos x - C).$$

Den sidste ligning, for forskellige værdier af  $C$ , er ligningen for banerne. På venstresiden er  $y^2 \geq 0$ . For  $C > 1$  er højresiden altid negativ: ingen løsninger til ligningen. For  $C = 1$  er højresiden negativ med mindre  $\cos x = 1$ , dvs  $x = 2q\pi$ : løsningerne er ligevægtpunkterne  $(p\pi, 0)$ , hvor  $p$  er lige. For  $-1 < C < 1$  kan vi vælge  $x_0$  med  $\cos x_0 = C$  og  $0 < x_0 < \pi$ . Højresiden er så positiv, præcis når  $-x_0 + 2q\pi < x < x_0 + 2q\pi$  (med passende  $q \in \mathbb{Z}$ ), og for hver sådan  $x$ -værdi er der to løsninger  $y$ : løsningerne udgør en række lukkede baner. For  $C < -1$  er højresiden altid positiv: der er to adskilte baner. Tilfældet  $C = -1$  er et gænsetilfælde, hvor højresiden er positiv med mindre  $\cos x = -1$ : de to baner krydser hinanden i ligevægtpunkterne  $(p\pi, 0)$ , hvor  $p$  er ulige.



**Eksempel 32.**  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$  er Fibonacci's talfølge. Den er bestemt (rekursivt) ved differensligningen  $x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$  og begyndelsesbetingelserne  $x_0 = 0$  og  $x_1 = 1$ .

**Eksempel 33.** Antag, at udbud  $S$  og efterspørgsel  $D$  efter en vare afhænger lineært af prisen  $p$  sådan:  $S = ap - b$  og  $D = -cp + d$  („udbuddet stiger med prisen, efterspørgslen falder med prisen“). I den „kontinuerte“ model styres udviklingen af en differentialligning [S, s. 15]:

$$\dot{p} = \lambda \cdot (D - S) = -\lambda(a + c)p + \lambda(b + d).$$

10. juni 2002

Ligevægtsløsningen (den konstante løsning) er  $p = (b+d)/(a+c)$ ; den er asymptotisk stabil. Den kontinuerte model forudsætter, at udbuddet kan varieres „umiddelbart“ med prisen nu.

Den diskrete model tager hensyn til, at det er udbuddet i næste periode, der styres af prisen nu; det antages altså at

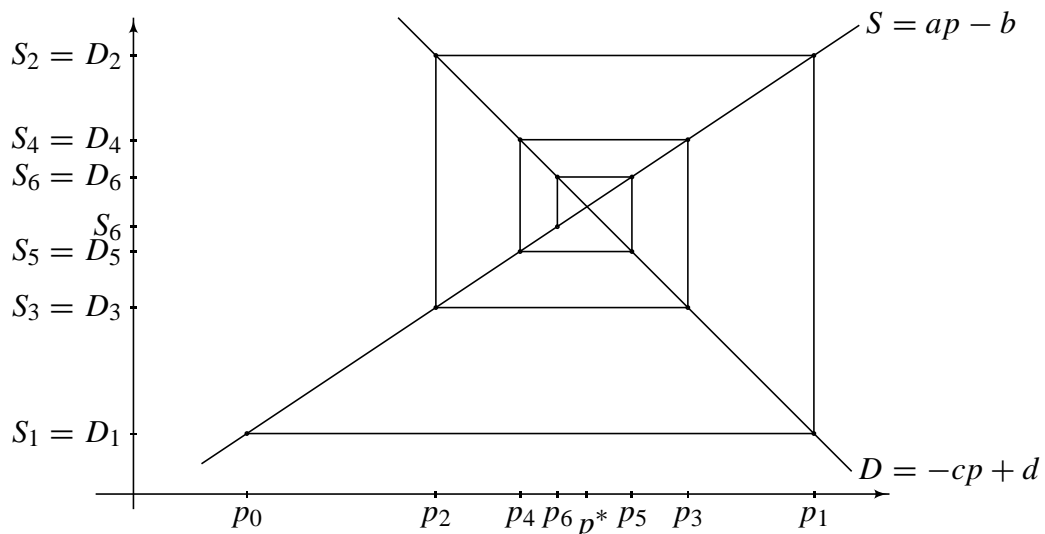
$$(1) \quad D_t = -cp_t + d, \quad (2) \quad S_{t+1} = ap_t - b, \quad (3) \quad D_t = S_t.$$

Det er den sidste ligning („i hver periode sælges hele produktionen“), der styrer udviklingen. Af ligningerne fås:  $-cp_{t+1} + d = D_{t+1} = S_{t+1} = ap_t - b$ . Efter division med  $-c$  og omformning fås:

$$(4) \quad p_{t+1} = -\frac{a}{c}p_t + \frac{b+d}{c};$$

ligevægten, den konstante løsning, er  $p^* = (b+d)/(a+c)$ . Den er asymptotisk stabil, hvis  $|-a/c| < 1$ , dvs hvis  $c > a$ . Dette resultat er:

**Spindelvævssætningen.** Hvis efterspørgslen er mere prisfølsom end udbuddet, så konvergerer prisen  $p_t$  mod ligevægtsprisen  $p^*$ . Den kan illustreres sådan:



**Eksempel 34.** Udtrykket for udbuddet kan skrives  $S_{t+1} = a\hat{p}_{t+1} - b$  med  $\hat{p}_{t+1} = p_t$ . Ligningen  $\hat{p}_{t+1} = p_t$  afspejler, at producenten forventer, at prisen i næste periode er den samme som nu. Indrages en viden om den foregående prisudvikling, fås fx en model med

$$S_{t+1} = a\hat{p}_{t+1} - b, \quad \text{hvor } \hat{p}_{t+1} = p_t + \rho(p_t - p_{t-1}),$$

og stadig  $D_t = -cp_t + d$  og  $D_t = S_t$ . Tallet  $\rho$  er en forventningsfaktor: at  $\rho$  er positiv udtrykker en forventning om, at udviklingen fra  $p_{t-1}$  til  $p_t$  vil fortsætte; at  $\rho$  er negativ udtrykker, at udviklingen nok vil vende. Forudsætningerne fører til en andenordens ligning:

$$-cp_{t+2} + d = D_{t+2} = S_{t+2} = a(p_{t+1} + \rho(p_{t+1} - p_t)) - b = a(1+\rho)p_{t+1} - a\rho p_t - b,$$

som omformes til

$$(4) \quad p_{t+1} + \frac{a(1+\rho)}{c} p_{t+1} - \frac{a\rho}{c} p_t = \frac{b+d}{c}.$$

Ligevægten er som før:  $p^* = (b+d)/(a+c)$ , og den er asymptotisk stabil, når

$$\left| \frac{a(1+\rho)}{c} \right| < 1 - \frac{a\rho}{c} < 2.$$

Multiplikation med  $c/a$  giver de ækvivalente uligheder:

$$c/a > |1 + \rho| + \rho, \quad c/a > -\rho.$$

Det er ikke så svært at bestemme det største af tallene  $|1 + \rho| + \rho$  og  $-\rho$ : Ligevægten er asymptotisk stabil, når

$$c/a > 1 + 2\rho, \quad \rho \geq -\frac{1}{3}, \quad \text{eller} \quad c/a > -\rho, \quad \rho \leq -\frac{1}{3}.$$

**Eksempel 35.** Betragt nationalindkomst  $Y$ , investering  $I$ , og forbrug  $C$ . Det antages, at

$$(1) \quad Y_t = I_t + C_t, \quad (2) \quad C_{t+1} = aY_t + b.$$

Hvad bliver ligevægten med konstant investering?

$$(*) \quad I_t = I_0.$$

Vi har  $Y_{t+1} = I_0 + C_{t+1} = aY_t + (I_0 + b)$ , en førsteordens lineær differensligning. Ligevægten er  $Y^* = (I_0 + b)/(1 - a)$ . Den er stabil, hvis  $a < 1$ .

Hvordan ændres ligevægtstilstanden sig, hvis man ændrer  $I_0$  til  $\tilde{I}_0$ ?

$$\tilde{Y}^* - Y^* = \frac{(\tilde{I}_0 + b) - (I_0 + b)}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}(\tilde{I}_0 - I_0).$$

I Samuelson's accelerator-model [S, s. 280] antages i stedet for (\*), at investeringen er proportional med forøgelsen af forbruget:

$$(3) \quad I_{t+1} = c(C_{t+1} - C_t).$$

Af (2) fås  $C_{t+1} - C_t = a(Y_t - Y_{t-1})$ , så (3) kan erstattes af følgende:

$$(3') \quad I_{t+1} = ca(Y_t - Y_{t-1}).$$

Heraf fås videre, at

$$Y_{t+2} = I_{t+2} + C_{t+2} = ca(Y_{t+1} - Y_t) + aY_{t+1} + b,$$

og – ved omordning – en lineær differensligning med konstante koefficienter:

$$(4) \quad Y_{t+2} - a(c+1)Y_{t+1} + acY_t = b.$$

Ligevægtsløsningen er  $Y^* = b/(1 - a)$ . Den er asymptotisk stabil, når

$$|a(c+1)| < 1 + ac < 2, \quad \text{dvs når } a < 1, \quad ac < 1.$$

10. juni 2002

**Eksempel 36.** I blandet landhandel betragtes følgende model for en sammenhæng mellem nationalindkomst  $Y$ , konsum/forbrug  $C$ , investering  $I$ , import  $M$  og eksport  $X$  for et land:

$$\begin{aligned} C(t+1) &= aY(t) + b, & I(t+1) &= I_0 + hY(t), & M(t+1) &= M_0 + mY(t), \\ X(t) &= \tilde{M}(t), & Y(t) + M(t) &= C(t) + I(t) + X(t), \end{aligned}$$

hvor  $\tilde{M}$  lig med summen af det, der importeres af de øvrige lande.

Med kun to lande, 1 og 2, er der følger  $Y_i(t)$ ,  $C_i(t)$ , ... for  $i = 1, 2$  og  $\tilde{M}_1 = M_2$  og  $\tilde{M}_2 = M_1$ . Altså er  $X_1(t+1) = M_2(t+1) = m_2Y_2(t) + M_{02}$ , og så fås:

$$\begin{aligned} Y_1(t+1) &= C_1(t+1) + I_1(t+1) + X_1(t+1) - M_1(t+1) \\ &= a_1Y_1(t) + h_1Y_1(t) + m_2Y_2(t) - m_1Y_1(t) + (b_1 + I_{01} + M_{02} - M_{01}), \end{aligned}$$

og en tilsvarende ligning med ombytning af 1 og 2. Med andre ord, et system af differensligninger:

$$\begin{aligned} Y_1(t+1) &= (a_1 + h_1 - m_1)Y_1(t) && + m_2Y_2(t) + \text{konstant}_1, \\ Y_2(t+1) &= && m_1Y_1(t) + (a_2 + h_2 - m_2)Y_2(t) + \text{konstant}_2. \end{aligned}$$

Bemærk, at  $C$  og  $I$  kun indgår i ligningerne via summen  $C + I$ , så det kan være rimeligt at sætte  $k_i := a_i + h_i$  for  $i = 1, 2$ . Så er koefficientmatricen følgende:

$$\begin{pmatrix} k_1 - m_1 & m_2 \\ m_1 & k_2 - m_2 \end{pmatrix}.$$

Det antages rimeligt, at  $a_i + h_i > m_i$ , altså  $k_i - m_i > 0$ , for  $i = 1, 2$ . Tallene i koefficientmatricen er altså positive. Det er herefter ikke så svært at se, at systemet er stabilt, hvis og kun hvis

$$1 - k_1 + m_1 > 0, \quad 1 - k_2 + m_2 > 0, \quad (1 - k_1 + m_1)(1 - k_2 + m_2) - m_1m_2 > 0.$$

(Og her følger endda fx den anden ulighed af de to øvrige.)