E. Opgaveløsninger.

(1.17)(3) Til afkortning sættes $K(n) := n/\log n$. Det er nok at vise, for $n \to \infty$, at (a) $K(n)/\operatorname{Li}(n) \to 1$, at (b) $\Pi(n)/\pi(n) \to 1$ og at (c) $R(n)/K(n) \to 1$.

(a) Her bruges l'Hospital: $K'(n) = 1/\log n - 1/(\log n)^2$ og $\operatorname{Li}'(n) = 1/\log n$, så $K'(n)/L'(n) = 1 - 1/\log n$; det fremgår, at $K'(n)/\operatorname{Li}'(n) \to 1$.

(b) Da $\Pi(n) = \pi(n) + \text{rest}(n)$, hvor resten er summen over $k \geqslant 2$ af $\pi(\sqrt[k]{n})/k$, skal det vises, at $\text{rest}(n)/\pi(n) \to 0$. Det k'te led er 0, når $\sqrt[k]{n} < 2$, dvs når $k > \log n/\log 2$. Summen er altså endelig, med højst $\log n/\log 2$ led. For det k'te led, med $k \geqslant 2$, har vi ifølge Chebyshev $\pi(\sqrt[k]{n})/k \leqslant \pi(\sqrt{n})/2 \leqslant CK(\sqrt{n})$. Chebyshev (den anden vej) giver $\pi(n) \geqslant cK(n)$. Altså er

$$\frac{\text{rest}(n)}{\pi(n)} \leqslant \frac{\log n}{\log 2} \times \frac{CK(\sqrt{n})}{cK(n)} = \text{Konst} \times \frac{\log n}{\sqrt{n}}\,.$$

Det fremgår, at $\text{rest}(n)/\pi(n) \to 0$.

(c) er tilsvarende: $R(n) = \operatorname{Li}(n) + \text{rest}(n)$, og $\operatorname{Li}(n)/K(n) \to 1$. Det skal vises, at $\text{rest}(n)/K(n) \to 0$. Vi må antage, at der er højst $\log n/\log 2$ led. Det k'te led er numerisk højst $\operatorname{Li}(\sqrt[k]{n})/k \leqslant \operatorname{Li}(\sqrt{n})/2$, og ifølge (a) findes en vurdering $\operatorname{Li}(x) \leqslant CK(x)$ for alle x, og specielt for $x = \sqrt{n}$. Påstanden følger nu af vurderingen,

$$|\text{rest}(n)/K(n)| \leqslant \text{Konst} \times (\log n)K(\sqrt{n})/K(n) = \text{Konst} \times (\log n)/\sqrt{n}.$$

(1.17)(4) I det højre endepunkt $N = 10^{130}$ er $300\pi(N) = N$. Jeg tegner grafen som *den rette linie* fra $(0,0)$ til (N,N) (på millimeterpapiret $(10cm, 10cm)$). For at forsvare det, må jeg godtgøre, at afstanden fra $(x, 300\pi(x))$, for alle x i intervallet, til den rette linie på millimeterpapiret højst er $0{,}5\,mm$. En millimeter er 10^{-2} gange længden af intervallet på papiret. Jeg viser, for $x \leqslant N$:

$$|300\pi(x) - x|/N \leqslant \varepsilon, \qquad \text{hvor } \varepsilon = \tfrac{1}{2}10^{-2} = 0{,}005.$$

Først: $x \leqslant N/10^4$. Her er $\pi(x) \leqslant x$, så OK med $\varepsilon = 300/10^4 = 0{,}003$.

Herefter antages $x \geqslant N/10^4$, og dermed at $300\pi(x) = (\log N)x/\log x$. Uligheden er så følgende:

$$\frac{x}{N}\left(\frac{\log N}{\log x} - 1\right) \leqslant \varepsilon. \tag{*}$$

Dernæst: $N/10^4 \leqslant x \leqslant N/10$. Den første faktor er højst 10^{-1}. I den anden faktor er $\log N/\log x \leqslant \log 10^{130}/\log 10^{126} = 130/126 \leqslant 1{,}04$. Altså OK med $\varepsilon = 0{,}004$.

Endelig: $N/10 \leqslant x \leqslant N$. Skriv $x = kN/10$, hvor $1 \leqslant k \leqslant 10$. De to faktorer er så:

$$\frac{k}{10} \quad \text{og} \quad \frac{\log N}{\log N - \log(10/k)} - 1 = \frac{\log(10/k)}{\log N - \log(10/k)}\,.$$

Den anden faktor kan vurderes opad ved værdien for $k = 1$, dvs ved $1/(130-1) = 1/129 \leqslant 0{,}01$. For $k \leqslant 4$ er den første faktor højst $4/10$, og produktet altså højst $0{,}004$. Endelig, for $4 \leqslant k \leqslant 10$, er $k > \sqrt{10}$ og dermed $10/k \leqslant \sqrt{10}$. Altså kan den anden faktor (og dermed produktet) vurderes opad ved $\frac{1}{2}/(130 - \frac{1}{2}) \leqslant 0{,}004$. Altså, i begge tilfælde OK med $\varepsilon = 0{,}004$. [Max af venstresiden i (*) (bestemt ved differentiation) er faktisk $\varepsilon = 0{,}00124$.]

Ordinaten $300\nu(x) \leqslant 300\sqrt{N}$ svarer til højst $3 \cdot 10^{-62}\,cm$, som må afsættes som 0.