Matematikken bag spin

Thomas Hjortgaard Danielsen

Indhold

1 Kort om repræsentationsteori

Definition 1.1. *Lad G være en Lie-gruppe og V et vektorrum. Ved en* repræsentation *af G forstår vi en kontinuert gruppehomomorfi $\pi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$.*

Hvis V er endeligtdimensionalt, er $\mathrm{Aut}(V)$ selv en Lie-gruppe, og dermed er π en C^∞-afbildning. Hvis V er et indre produkt-rum, og der for hvert $g \in G$ gælder

$$\langle \pi(g)v, \pi(g)w \rangle = \langle v, w \rangle$$

siges repræsentationen π at være *unitær*.

Et underrum $W \subseteq V$ kaldes *π-invariant* (eller blot *invariant*, når repræsentationen er underforstået), hvis $\pi(g)W \subseteq W$ for ethvert $g \in G$. De to trivielle underrum $\{0\}$ og V selv er tydeligvis invariante underrum. Repræsentationen kaldes *irreducibel*, hvis de eneste invariante underrum er de trivielle. Hvis W er et π-invariant underrum af V, kan vi restringere π til en repræsentation $\pi|_W$ af G på W, simpelthen fordi $\pi(g)W \subseteq W$ for alle $g \in G$, så $\pi|_W(g) \in \mathrm{Aut}(W)$.

Definition 1.2. *To repræsentationer (π_1, V_1) og (π_2, V_2) af en gruppe G kaldes* ækvivalente*, hvis der findes en isomorfi $T : V_2 \xrightarrow{\sim} V_2$, så nedenstående diagram kommuterer:*

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\sim", "T"'] \arrow[d, "\pi_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\pi_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "\sim", "T"'] & V_2 \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

altså så $T \circ \pi_1(g) = \pi_2(g) \circ T$ for alle $g \in G$.

To unitære repræsentationer (π_1, V_1) og (π_2, V_2) af gruppen G kaldes unitærækvivalente*, hvis der findes en unitær afbildning $T : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$, så ovenstående diagram kommuterer.*

Hvis π_1 og π_2 er repræsentationer af G på vektorrummene V_1 og V_2, kan vi danne en ny repræsentation af G på $V_1 \oplus V_2$, *direkte sum* $\pi_1 \oplus \pi_2$ ved:

$$\pi_1 \oplus \pi_2(g)(v,w) = (\pi_1(g)v, \pi_2(g)w)$$

for $(v,w) \in V_1 \oplus V_2$.

2 Lie-grupperne SO(3) og SU(2)

Spin og angulært moment i (ikke-relativistisk) kvantemekanik er intimt relateret til rotationer i rummet og symmetrier hørende til sådanne. Vi begynder derfor med en kort omtale af de vigtigste egenskaber ved *rotationsgruppen* eller *den specielle ortogonale gruppe* af grad 3: $\mathrm{SO}(3)$ samt dennes nært beslægtede: $\mathrm{SU}(2)$.

$\mathrm{SO}(3)$ er Lie-undergruppen af $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ bestående af ortogonale matricer med determinant 1. De vigtigste egenskaber for $\mathrm{SO}(3)$ er samlet i nedenstående proposition:

Proposition 2.1. $\mathrm{SO}(3)$ *er en kompakt, sammenhængende Lie-gruppe med fundamentalgruppen* $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}/2$.

Lie-algebraen $\mathfrak{so}(3)$ *for* $\mathrm{SO}(3)$ *er algebraen af reelle skævsymmetriske* 3×3*-matricer:*

$$\mathfrak{so}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\},$$

og Lie-parentesen er den sædvanlige kommutator.

Bevis. En vilkårlig rotation kan karakteriseres ved en vektor i $\mathbb{R}^3$, hvor vektorens retning, er rotationsaksen, og normen er vinklen der roteres (i positiv omløbsretning) målt i enheder af π. Betragt $B = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \|\xi\| \le 1\}$. Et element i B bestemmer naturligt en rotation. Dog gælder der, at, hvis ξ har norm π, så vil ξ og $-\xi$ bestemme den samme rotation. Derfor vil $\mathrm{SO}(3)$ være homeomorf med $B/\!\sim$, hvor $\sim$ er ækvivalensrelationen, der identificerer antipodale punkter på *randen* af B, udstyret med kvotienttopologien fra den kanoniske afbildning $\kappa' : B \longrightarrow B/\!\sim$. B er både kompakt og sammenhængende, så da $B/\!\sim$ er billedet af den kontinuerte afbildning κ', er $B/\!\sim$ og dermed $\mathrm{SO}(3)$ både kompakt og sammenhængende.

$\mathrm{SO}(3)$ er som delrum af $\mathbb{R}^9$ et Hausdorff-rum, og det er $B/\!\sim$ dermed også. Vi viser, at $B/\!\sim$ er homeomorf med det reelle projektive rum $\mathbb{RP}^3$, som pr. definition er $\mathbb{S}^3/\!\sim$, ($\mathbb{S}^3$ er enhedskuglen i $\mathbb{R}^4$) hvor $\sim$ denne gang er ækvivalensrelationen, der identificerer antipodale punkter på $\mathbb{S}^3$ (der burde ikke være mulighed for at forveksle de to ækvivalensrelationer). $\mathbb{S}^3/\!\sim$ er udstyret med kvotienttopologien givet ved den kanoniske afbildning $\kappa : \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3/\!\sim$. Da $\mathbb{S}^3$ er kompakt, og κ er kontinuert, vil også $\mathbb{S}^3/\!\sim\, = \kappa(\mathbb{S}^3)$ være kompakt.

Homeomorfien $\Phi : \mathbb{S}^3/\!\sim\, \longrightarrow B/\!\sim$ konstruerer vi ved følgende: Ækvivalensklassen $\{(x_1,x_2,x_3,x_4), -(x_1,x_2,x_3,x_4)\}$ afbildes over i $[(x_1,x_2,x_3)]$, hvis $x_4 \ge 0$ og over i $[-(x_1,x_2,x_3)]$, hvis $x_4 \le 0$. Hvis $x_4 = 0$, så vil (x_1,x_2,x_3) ligge på overfladen af B, og dermed være identisk med $-(x_1,x_2,x_3)$ (hvorfor det er ligegyldigt hvilken af ækvivalensklasserne, vi bruger som billede). Denne afbildning ses klart at være kontinuert og surjektiv. Vi viser injektivitet: Antag, at $[(x_1,x_2,x_3,x_4)] \ne [(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)]$, dvs. at der findes et i, så $|x_i| \ne |x'_i|$. Antag nu, at $|x'_i| = |x_i|$ for $i = 1,2,3$, så må x_4 og x'_4 nødvendigvis være ens på nær et fortegn, og dermed ville ækvivalensklasserne være ens. Ergo må vi altså have, $|x_i| \ne |x'_i|$ for et i mellem 1 og 3. Men så følger, at også billederne af de to ækvivalensklasser under Φ er forskellige. Altså er Φ injektiv. Generel topologi giver, at en kontinuert bijektion fra et kompakt rum til et Hausdorff-rum automatisk er en homeomorfi, så Φ er en homeomorfi.

Vi har nu opnået at SO(3) er homeomorf med $\mathbb{S}^3/\sim$, specielt vil de have isomorfe fundamentalgrupper. Vi bestemmer $\mathbb{S}^3/\sim$'s fundamentalgruppe, ved at godtgøre, at $\kappa : \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3/\sim$ er en universel overlejring. Lad nemlig $\xi \in \mathbb{S}^3$ være vilkårlig, og sæt $N(\xi) = \{\eta \in \mathbb{S}^3 \mid \eta \cdot \xi > 0\}$. Det er en åben mængde i $\mathbb{S}^3$, hvorfor også $\kappa(N(\xi))$ vil være åben i $\mathbb{S}^3/\sim$ (κ er jo en kvotient-afbildning). Det er klart at ethvert punkt i $\mathbb{S}^3/\sim$ vil være indeholdt i en sådan åben mængde. Da nu $\kappa^{-1}(\kappa(N(\xi))) = N(\xi) \cup N(-\xi)$, og da $N(\xi)$ og $N(\xi)$ er disjunkte og homeomorfe, er $(\mathbb{S}^3, \kappa)$ en 2-foldig overlejring af $\mathbb{S}^3/\sim$. Da $\mathbb{S}^3$ er enkeltsammenhængende, er det en universel overlejring, så fundamentalgruppen for $\mathbb{S}^3/\sim$ har orden 2, og den er dermed isomorf med $\mathbb{Z}/2$.

Til sidst viser vi, at Lie-algebraen for SO(3) består af de skæv-symmetriske reelle matricer. Lad derfor X ligge i Lie-algebraen for SO(3). Så vil også $\exp(tX)$ ligge i SO(3) for alle $t \in \mathbb{R}$, og dermed

$$\exp(tX)\exp(tX)^T = \exp(tX)\exp(tX^T) = I_3 \,.$$

Ved nu at differentiere mht. t i 0 på begge sider af ovenstående, får vi $X + X^T = 0$, dvs. X er skæv-symmetrisk. □

Matricerne

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

udgør en naturlig basis for $\mathfrak{so}(3)$. En hurtig udregning viser, at vi har kommutatorrelationerne

$$[A_1, A_2] = A_3 \quad , \quad [A_2, A_3] = A_1 \quad , \quad [A_3, A_1] = A_2 \,, \tag{2.1}$$

eller kort $[A_i, A_j] = \varepsilon_{ijk}$, hvor $\varepsilon_{ijk} = 1$, hvis ijk er en lige permutation af 1, 2 og 3, $\varepsilon_{ijk} = -1$, hvis ijk er en ulige permutation, og 0, hvis to af indicisne er ens.

Basiselementerne A_1, A_2 og A_3 er samtidig *generatorer* for rotationer langs hhv. x-, y- og z-aksen i følgende forstand:

$$\exp(tA_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad , \quad \exp(tA_2) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} \,,$$

$$\exp(tA_3) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,,$$

hvor $\exp : \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$ er eksponentialafbildningen. $\exp(tA_1)$, $\exp(tA_2)$ og $\exp(tA_3)$ ses altså at være drejninger med vinklen t om hhv. x-, y- og z-aksen. [1]

Som antydet, så er SO(3) tæt forbundet med gruppen SU(2), *den specielle unitære gruppe* af grad 2. SU(2) er Lie-undergruppen af $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ bestående af unitære matricer med determinant 1. De vigtigste egenskaber for SU(2) er nævnt i nedenstående:

Proposition 2.2. SU(2) *er en enkeltsammenhængende, kompakt Lie-gruppe. Lie-algebraen for* SU(2) *er algebraen af skæv-adjungerede komplekse* 2×2*-matricer med spor 0:*

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ix & -\xi \\ \bar{\xi} & -ix \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \,,\ \xi \in \mathbb{C} \right\} \,,$$

og Lie-parentesen er den sædvanlige kommutator.

[1] Læser man i en fysikbog, vil man ofte, hvis t er meget lille, rækkeudvikle exp, og få $\exp(tA_i) = I + tA_i$. På den baggrund siges $I + tA_i$ at være en *infinitesimal rotation* om den givne akse, og A_i kaldes for den *infinitesimale generator* for rotationer omkring aksen.

Bevis. Det er nemt at overbevise sig om, at enhver matrix i SU(2) nødvendigvis må have formen

$$\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 - ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

for $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ og $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. Topologisk set, er SU(2) derfor identisk med $\mathbb{S}^3$, og denne vides at være både enkeltsammenhængende og kompakt.

Herefter viser vi, at Lie-algebraen for SU(2) består af skæv-adjungerede komplekse matricer med spor 0, så lad X ligge i Lie-algebraen for SU(2). Så vil også $\exp(tX)$ ligge i SU(2) for alle $t \in \mathbb{R}$, og dermed

$$\exp(tX)\exp(tX)^* = \exp(tX)\exp(tX^*) = I_2 .$$

Ved nu at differentiere mht. t i 0 på begge sider af ovenstående, får vi $X + X^* = 0$, dvs. X er skæv-adjungeret. Desuden gælder $1 = \det\exp(tX) = \exp(t \operatorname{Tr} X)$ for alle t, så $\operatorname{Tr} X = 0$. Altså enhver matrix i Lie-algebraen for SU(2) er skævadjungeret med spor 0. På den anden side er det nemt at se, at rummet af disse matricer som reelt vektorrum har dimension 3 samme dimension som SU(2). Det må derfor være Lie-algebraen for SU(2). □

Som reel Lie-algebra betragtet er $\mathfrak{su}(2)$ 3-dimensional, og en oplagt basis består af *Paulis spin-matricer* [2]:

$$\sigma_1 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} .$$

Ligesom A_i'erne opfylder σ_i'erne følgende kommutatorrelationer:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_3 \quad , \quad [\sigma_2, \sigma_3] = \sigma_1 \quad , \quad [\sigma_3, \sigma_1] = \sigma_2 , \tag{2.2}$$

og ligesom før viser en hurtig udregning følgende:

$$\exp(t\sigma_1) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}it} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}it} \end{pmatrix} \quad , \quad \exp(t\sigma_2) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}t) & \sin(\frac{1}{2}t) \\ -\sin(\frac{1}{2}t) & \cos(\frac{1}{2}t) \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\exp(t\sigma_3) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}t) & i\sin(\frac{1}{2}t) \\ i\sin(\frac{1}{2}t) & \cos(\frac{1}{2}t) \end{pmatrix} .$$

Bemærk faktoren $\frac{1}{2}$. Den har en fysisk betydning, som vi vender tilbage til.

Vi har nu kort beskrevet de vigtigste egenskaber ved de to Lie-grupper SO(3) og SU(2). Resten af afsnittet vil gå med at beskrive sammenhængen mellem de to.

Som det ses af (2.1) og (2.2), så besidder A_i'erne og σ_i'erne de samme kommutatorrelationer. Ergo vil afbildningen $\mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{so}(3)$ defineret ved $\sigma_i \longmapsto A_i$ være en Lie-algebra-isomorfi. Da SU(2) jvf. Proposition 2.2 er enkeltsammenhængende, findes der en unik Lie-gruppe-homomorfi, som inducerer denne isomorfi. Denne viser sig at være den *adjungerede repræsentation* af SU(2):

Proposition 2.3. *Den adjungerede repræsentation* $\operatorname{Ad} : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ *opfylder følgende:*

1. $\operatorname{im}\operatorname{Ad} \subseteq \mathrm{SO}(3)$.
2. $\operatorname{Ad} : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$ *er en overlejring af* SO(3), *specielt surjektiv.*
3. $\ker \operatorname{Ad} = \{\pm I\}$, *hvor* $I \in \mathrm{SU}(2)$ *er enhedsmatricen.*

[2] Bemærk, at der er et i til forskel mellem disse og fysikernes spin-matricer. Dette skyldes forskellige konventioner, idet fysikere ofte betrager $\exp(it\sigma_j)$ i stedet for $\exp(t\sigma_j)$.

4. *Den inducerede Lie-algebra-homomorfi* $\mathrm{ad} = \mathrm{Ad}_* : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{so}(3)$ *er isomorfien* $\sigma_i \longmapsto A_i$*,* $i = 1, 2, 3$*.*

Bevis. Lad os begynde med at vise, at $\mathrm{Ad}(\mathrm{SU}(2)) \subseteq \mathrm{SO}(3)$. Til det betragter vi Lie-algebraerne, og vil vise, at den inducerede ad faktisk afbilder σ_i i A_i.

ad er afbildningen $\mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{su}(2))$ givet ved $\mathrm{ad}(\sigma)(X) = [\sigma, X]$ for $\sigma, X \in \mathfrak{su}(2)$ (dette skriver vi også blot $\mathrm{ad}_\sigma(X)$. Ved hjælp af basen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, kan vi identificere $\mathfrak{su}(2)$ med $\mathbb{R}^3$, og identificere matricen

$$X = \begin{pmatrix} ix_1 & -x_2 - ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2)$$

med vektoren $\widetilde{X} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Dermed $\mathrm{End}(\mathfrak{su}(2)) \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \supseteq \mathrm{SO}(3)$. Vi vil nu vise, at $\mathrm{ad}_{\sigma_1}(X) = A_1\widetilde{X}$ for vilkårligt X, og dermed $A_1 = \mathrm{ad}_{\sigma_1}$. På den ene side:

$$\mathrm{ad}_{\sigma_1}(X) = [\sigma_1, X] = \begin{pmatrix} 0 & x_3 - ix_2 \\ -x_3 - ix_2 & 0 \end{pmatrix} ,$$

og på den anden side:

$$A_1\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} ,$$

og vi ser, at $\mathrm{ad}_{\sigma_1}(X)$ og $A_1\widetilde{X}$ er identiske. Helt tilsvarende vises det, at $\mathrm{ad}_{\sigma_2} = A_2$ og $\mathrm{ad}_{\sigma_3} = A_3$. Ergo er $\mathrm{ad} : \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}(3)$ en Lie-algebra-isomorfi.

Da SU(2) er enkeltsammenhængende, giver ad anledning til en entydig Lie-gruppe-homomorfi $\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$, men det er præcis Ad, der dermed afbilder ind i SO(3). At det er en overlejring, følger simpelthen af, at den inducerede afbildning ad er en isomorfi. $(\mathrm{SU}(2), \mathrm{Ad})$ er altså SO(3)'s universelle overlejringsgruppe, så

$$\ker \mathrm{Ad} \cong \pi_1(\mathrm{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}/2 .$$

Ad er således en dobbelt overlejring. Dermed er sætningens påstande bevist. □

At SU(2) er SO(3)'s dobbelte overlejring, er ingen overraskelse, thi i beviset for Proposition 2.1 viste vi, at $\mathbb{S}^3$, der var homeomorf med SU(2), var dobbelt overlejring for SO(3). Men Proposition 2.3 giver os et konkret udtryk for denne overlejring, og dennes sammenhæng med Lie-algebra-isomorfien.

Med denne introduktion af aktørerne SO(3) og SU(2) kaster vi os nu over det, det hele drejer sig om, nemlig repræsentationsteorien for de to grupper (der i store træk viser sig at være ens). Teorien og dens fysiske konsekvenser er indholdet i resten af denne note.

En repræsentation $\mathfrak{D}$ er en Lie-gruppe-homomorfi, og inducerer som sådan en repræsentation $\mathfrak{D}_* : \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ af $\mathfrak{so}(3)$, så nedenstående diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SO}(3) \arrow[r, "\mathfrak{D}"] & \mathrm{Aut}(V) \\ \mathfrak{so}(3) \arrow[u, "\exp_{\mathrm{SO}(3)}"] \arrow[r, "\mathfrak{D}_*"'] & \mathrm{End}(V) \arrow[u, "\exp_{\mathrm{Aut}(V)}"'] \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Vi vender os nu mod spørgsmålet: givet en repræsentation $\mathfrak{D}_*$ af $\mathfrak{so}(3)$, i hvor høj grad bestemmer det en repræsentation $\mathfrak{D}$ af SO(3)? Betragt nedenstående kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SU}(2) \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] \arrow[rr, bend left, "\widetilde{\mathfrak{D}}"] & \mathrm{SO}(3) \arrow[r, "\mathfrak{D}"] & \mathrm{Aut}(V) \\
\mathfrak{su}(2) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\sim", "\mathrm{ad}"'] \arrow[rr, bend right, "\widetilde{\mathfrak{D}}_*"'] & \mathfrak{so}(3) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathfrak{D}_*"'] & \mathrm{End}(V) \arrow[u, "\exp"]
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Givet $\mathfrak{D}_*$, får vi direkte en repræsentation $\widetilde{\mathfrak{D}}_*$ af $\mathfrak{su}(2)$ ved $\widetilde{\mathfrak{D}}_* = \mathfrak{D}_* \circ \mathrm{ad}$, der, da SU(2) er enkeltsammenhængende, giver en repræsentation $\widetilde{\mathfrak{D}}$ af SU(2). Der er således en 1-1-korrespondance mellem repræsentationerne af $\mathfrak{so}(3)$ og repræsentationerne af SU(2). Hvornår faktoriserer denne repræsentation via Ad til en repræsentation af SO(3)? Følgende proposition giver svaret.

Proposition 2.4. *En endeligdimensional repræsentation* $\widetilde{\mathfrak{D}} : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ *faktoriserer via* Ad *til en repræsentation* $\mathfrak{D} : \mathrm{SO}(3) \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ *(dvs.* $\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} \circ \mathrm{Ad}$*), hvis og kun hvis* $\{\pm I\} \subseteq \ker \widetilde{\mathfrak{D}}$.

Bevis. Antag først, at der findes en repræsentation $\mathfrak{D}$ af SO(3), så $\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} \circ \mathrm{Ad}$. Fra Proposition 2.3 har vi, at $\ker \mathrm{Ad} = \{\pm I\}$. Ergo $\{\pm I\} \subseteq \ker \widetilde{\mathfrak{D}}$.

Det var den nemme vej. Den anden vej: antag, at $\{\pm I\} \subseteq \ker \widetilde{\mathfrak{D}}$. Vi definerer en afbildning $\mathfrak{D} : \mathrm{SO}(3) \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ ved følgende. Ethvert $O \in \mathrm{SO}(3)$ er jvf. Proposition 2.3 præcis billedet af $\pm U$ under Ad. Vi kan derfor sætte $\mathfrak{D}(O) = \widetilde{\mathfrak{D}}(U) = \widetilde{\mathfrak{D}}(-U)$, hvor sidste lighedstegn følger af, at $\{\pm I\} \subseteq \ker \widetilde{\mathfrak{D}}$. Denne opfylder klart $\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} \circ \mathrm{Ad}$. Vi ser, at

$$\mathfrak{D}(O_1 O_2) = \widetilde{\mathfrak{D}}(U_1 U_2) = \widetilde{\mathfrak{D}}(U_1)(U_2) = \mathfrak{D}(O_1)\mathfrak{D}(O_2)\,,$$

så $\mathfrak{D}$ er en homomorfi. Da endelig Ad er en surjektiv submersion (thi som overlejring er den specielt en lokal diffeomorfi, hvorfor dens push-forward er bijektiv), er $\mathfrak{D}$ en C^∞-afbildning, hvis og kun hvis $\widetilde{\mathfrak{D}}$ er det. Men $\widetilde{\mathfrak{D}}$ var en Lie-gruppe-homomorfi, altså specielt C^∞. Ergo: $\mathfrak{D}$ er C^∞, og er således en repræsentation af SO(3). □

Altså givet en repræsentation $\mathfrak{D}_*$ af $\mathfrak{so}(3)$. Denne inducerer en repræsentation $\mathfrak{D}$ af SO(3), hvis og kun hvis $\widetilde{\mathfrak{D}}$ indeholder $\{\pm I\}$ i sin kerne. En anden interessant følge af Proposition 2.4: hvis vi kender alle repræsentationer af SU(2), så kender vi også alle repræsentationer af SO(3). Vi ser det nære slægtskab mellem de to grupper.

3 Irreducible repræsentationer af SU(2)

I dette afsnit vil vi udvikle den repræsentationsteori, der er nødvendig for forståelsen af spin og impulsmoment.

Som bekendt siges en repræsentation af en Lie-gruppe at være irreducibel, hvis de eneste invariante underrum er de trivielle. Helt tilsvarende kaldes en repræsentation af en Lie-algebra for irreducibel, hvis de eneste invariante underrum er de trivielle.

Lemma 3.1. *Antag, at* G *er en sammenhængende Lie-gruppe, og lad* $\Pi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ *være en endeligtdimensional repræsentation af* G *med tilhørende repræsentation* $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ *af Lie-algebraen.* Π *er da irreducibel, hvis og kun hvis* π *er det.*

Hvis Π_1 *og* Π_2 *er endeligtdimensionale repræsentationer af* G *med tilhørende repræsentationer* π_1 *og* π_2 *af* $\mathfrak{g}$*, gælder, at* Π_1 *og* Π_2 *er ækvivalente, hvis og kun hvis* π_1 *og* π_2 *er ækvivalente.*

Bevis. Antag, at Π er irreducibel. Vi skal vise, at π er irreducibel, så lad $W \subseteq V$ være et π-invariant underrum. Da vil W også være invariant under $e^{\pi(X)} = I + \pi(X) + \frac{1}{2}\pi(X)^2 + \cdots$. Da G er sammenhængende, kan ethvert element i G skrives

$$g = e^{X_1} \cdots e^{X_k}$$

for $X_i \in \mathfrak{g}$, så

$$\Pi(g)W = \Pi(e^{X_1}) \circ \cdots \circ \Pi(e^{X_k})W = e^{\pi(X_1)} \circ \cdots \circ e^{\pi(X_k)}W \subseteq W \, .$$

Ergo er W også invariant under Π, dvs. W er triviel. Dermed er π irreducibel.

Antag nu, at π er irreducibel, og lad $W \subseteq V$ være invariant underrum for Π. Da gælder $\Pi(e^{tX})W \subseteq W$ og dermed også

$$\pi(X)W = \Big(\frac{d}{dt}\Pi(e^{tX})\Big|_{t=0} \Big) W \subseteq W \, .$$

Altså er W et π-invariant underrum, så W er triviel, og Π er irreducibel.

Påstanden om ækvivalens vises på analog måde. □

Definition 3.2. *Lad V være et reelt vektorrum. Ved* kompleksifikationen $V_{\mathbb{C}}$ af vektorrummet V *vil vi forstå rummet*

$$V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV = \{v_1 + iv_2 \mid v_1, v_2 \in V\} \, ,$$

der med skalarmultiplikationen

$$(a+ib)(v_1 + iv_2) = (av_1 - bv_2) + i(av_2 + bv_1) \qquad , \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

bliver til et vektorrum over $\mathbb{C}$.

Hvis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ er en basis for V, så vil den også være en basis for kompleksifikationen, specielt har V og $V_{\mathbb{C}}$ samme dimension. Hvis nu $\mathfrak{g}$ er en reel Lie-algebra, kan vi danne kompleksifikationen $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, der udstyret med følgende

$$[u_1 + iu_2, v_1 + iv_2] = ([u_1, v_1] - [u_2, v_2]) + i([u_1, v_2] + [u_2, v_1]) \, , \qquad (3.1)$$

bliver til en kompleks Lie-algebra, det er blot at tjekke, at Lie-parentesen i (3.1) er bilineær, antisymmetrisk og opfylder Jacobi-identiteten.

Lad nu $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ være en homomorfi mellem to reelle Lie-algebraer. ψ kan udvides entydigt til en homomorfi mellem de tilsvarende kompleksificerede algebraer, $\psi_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ sæt simpelthen:

$$\psi_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) = \psi(v_1) + i\psi(v_2) \, .$$

En hurtig udregning viser, at

$$\psi_{\mathbb{C}}([u_1 + iu_2, v_1 + iv_2]) = [\psi_{\mathbb{C}}(u_1 + iu_2), \psi_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2)]$$

hvilket viser, at $\psi_{\mathbb{C}}$ vitterligt er en Lie-algebra-homomorfi.

Specielt, hvis $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ er en kompleks repræsentation af $\mathfrak{g}$, kan denne entydigt udvides til en repræsentation af $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $\pi_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ er sin egen kompleksificerede, da det i forvejen er en kompleks Lie-algebra.

Der gælder følgende:

Lemma 3.3. *En kompleks repræsentation $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ er irreducibel, hvis og kun hvis den tilhørende kompleksificerede repræsentation $\pi_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ er irreducibel.*

Bevis. Antag først, at $\pi_{\mathbb{C}}$ er irreducibel. Lad W være et $\mathfrak{g}$-invariant underrum af V, altså $\pi(X)W \subseteq W$ for alle $X \in \mathfrak{g}$. Da hvert element i $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ på entydig måde kan skrives som $X + iY$ med $X, Y \in \mathfrak{g}$, og

$$\pi_{\mathbb{C}}(X + iY) = \pi(X) + i\pi(Y) ,$$

vil

$$\pi_{\mathbb{C}}(X + iY)W = \pi(X)W + i\pi(Y)W \subseteq W ,$$

idet V er et komplekst vektorrum, hvorfor $iW \subseteq W$. Dermed er W invariant under $\pi_{\mathbb{C}}$, og da $\pi_{\mathbb{C}}$ er irreducibel, vil W være trivielt.

Antag omvendt, at π er irreducibel. Lad $W \subseteq V$ være et underrum, der er $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-invariant under $\pi_{\mathbb{C}}$. Men da $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, er W klart invariant under $\mathfrak{g}$, og da π var irreducibel, vil W være trivielt. Det viser, at $\pi_{\mathbb{C}}$ er irreducibel. $\square$

Vi er specielt interesserede i kompleksifikationen af $\mathfrak{su}(2)$, og vi vil vise, at $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Lad $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, dvs. X er en 2×2-matrix med $\operatorname{Tr} X = 0$. Vi ser:

$$X = \frac{X - X^*}{2} + i\frac{X + X^*}{2i} ,$$

hvor både $\frac{1}{2}(X - X^*)$ og $\frac{1}{2i}(X + X^*)$ er skævadjungerede og har spor 0. Altså $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) \oplus i\mathfrak{su}(2)$, og da kompleksifikationen er unik op til Lie-algebra-isomorfi, har vi vist, $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Vi har en oplagt basis for $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ i følgende:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

der besidder kommutatorrelationerne

$$[X, Y] = H \quad , \quad [H, X] = 2X \quad , \quad [H, Y] = -2Y , \tag{3.2}$$

Vores mål i det følgende er at klassificere samtlig irreducible repræsentationer af SU(2). Strategien er følgende: først vil vi bestemme nogle irreducible repræsentationer af SU(2), og derefter vil vi vise, at enhver irreducibel repræsentation er ækvivalent med én af disse.

Lad $l \in \mathbb{N}_0$. Vi vil finde en irreducibel repræsentation af dimension $l + 1$. Så betragt rummet V_l af homogene polynomier af grad l, dvs. polynomier i 2 variable af formen $a_0 z_1^l + a_1 z_1^{l-1} z_2 + \cdots + a_{l-1} z_1 z_2^{l-1} + a_l z_2^l$. Vi bestemmer en repræsentation Π_l ved følgende:

$$(\Pi_l(U)f)z = f(U^{-1}z) \qquad , \qquad U \in \mathrm{SU}(2) \quad , \quad f \in V_l .$$

Det er nemt at se, at dette faktisk er en repræsentation af SU(2). For at vise, at den faktisk er irreducibel, viser det sig at være nemmest at betragte Lie-algebra-versionen af Π_l, der jo giver anledning til en repræsentation π_l af $\mathfrak{su}(2)$. Denne er jvf. Lemma 3.1 irreducibel, hvis og kun hvis Π_l er irreducibel. Repræsentationen bestemmes på vanlig måde

$$\pi_l(X) = \frac{d}{dt}\Pi_l(e^{-tX}z)\bigg|_{t=0} \quad , \quad X \in \mathfrak{su}(2) ,$$

og dermed fås at

$$(\pi_l(X)f)(z_1, z_2) = -(X_{11}z_1 + X_{12}z_2)\frac{\partial f}{\partial z_1} - (X_{21}z_1 + X_{22}z_2)\frac{\partial f}{\partial z_2} . \tag{3.3}$$

Denne repræsentation π_l kan endvidere udvides til en repræsentation på kompleksifikationen $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Den viser sig at være givet ved samme udtryk. Vi ser, at

$$\pi_l(H)z_1^k z_2^{l-m} = (l - 2m)z_1^m z_2^{l-m} \quad , \quad \pi_l(X)z_1^m z_2^{l-m} = -mz_1^{m-1}z_2^{l-m+1} \quad , \tag{3.4a}$$

$$\pi(Y)z_1^m z_2^{l-m} = (m - l)z_1^{m+1}z_2^{l-m-1} . \tag{3.4b}$$

Lemma 3.4. *Repræsentationen π_l af $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ er irreducibel.*

BEVIS. Vi vil vise, at hvis $W \neq \{0\}$ er et invariant underrum af V_l, så er $W = V_l$. Da $W \neq \{0\}$ findes altså et element

$$w = a_0 z_1^l + a_1 z_1^{l-1} z_2 + \cdots + a_{l-1} z_1 z_2^{l-1} + a_l z_2^l$$

så mindst én af a_m'erne er forskellig fra 0. Lad nu m_0 være det mindste af disse m'er, altså

$$w = a_{m_0} z_1^{l-m_0} + a_{m_0+1} z_1^{l-m_0-1} z_2^{m_0+1} + \cdots + a_m z_2^m$$

Vi virker nu med $\pi(X)^{m_0}$ på w, og da alle led med z_1-potens skarpt mindre end m_0 vil blive 0, vil kun leddet $a_{m_0} z_1^{l-m_0} z_2^{m_0}$ overleve. Da vi har

$$\pi(X)^{m_0}(a_{m_0} z_1^{l-m_0} z_2^{m_0}) = a_{m_0}(-1)^{l-m_0}(l-m_0)! z_2^l ,$$

og da $a_{m_0}(-1)^{l-m_0}(l-m_0)! \neq 0$, ser vi, at $z_2^l \in W$, idet W var invariant. Vi ser videre, at for $0 \leq m \leq l$ vil $\pi(Y)^m z_2^l$ være en konstant, forskellig fra 0, gange $z_1^m z_2^{l-m}$, der dermed ligger i W. Men da er $W = V_l$ som ønsket. □

Lemma 3.3 giver nu, at π_l som repræsentation af $\mathfrak{su}(2)$ er irreducibel, og dermed er Π_l det også. Vi er nu klar til at vise afsnittets hovedsætning:

Sætning 3.5. *For hvert tal $l \in \mathbb{N}_0$ findes en irreducibel repræsentation af $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ af dimension $l+1$. Hvis π er en irreducibel repræsentation af $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ af dimension $l+1$, vil π være ækvivalent med π_l. Specielt vil to irreducible repræsentationer af $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ med samme dimension være ækvivalente.*

Eksistensdelen blev vist ovenfor. Inden vi kaster os ud i entydighedsdelen, først et lemma, der udnytter de specielle kommutatorrelationer, som $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ besidder:

Lemma 3.6. *Hvis π er en endeligdimensional repræsentation af $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, og v er en egenvektor for $\pi(H)$ med egenværdi α* [3]*, da gælder*

$$\pi(H)\pi(X)v = (\alpha+2)\pi(X)v \qquad , \qquad \pi(H)\pi(Y)v = (\alpha-2)\pi(Y)v ,$$

dvs. $\pi(X)v$ hhv. $\pi(Y)v$ er enten 0 eller egenvektor for $\pi(H)$ med egenværdi $\alpha+2$ hhv. $\alpha-2$. [4]*.*

BEVIS. Vælg basen $\{H, X, Y\}$ for $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Jvf. (3.2) besidder denne basis kommutatorrelationerne $[H,X] = 2X$ og $[H,Y] = -2Y$. Derfor vil $\pi([H,X]) = 2\pi(X)$, hvilket giver:

$$\pi(H)\pi(X)v = \pi(X)\pi(H)v + 2\pi(X)v = (\alpha+2)\pi(X)v .$$

Fuldstændigt tilsvarende vises det med $\pi(Y)$ i stedet for. □

BEVIS FOR SÆTNING 3.5. Antag, at π er en irreducibel repræsentation af $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, virkende på vektorrummet V. Strategien er at diagonalisere $\pi(H)$. Lemma 3.6 giver os, at

$$\pi(H)\pi(X)^n v = (\alpha+2n)\pi(X)^n v ,$$

dvs. $\pi(X)^n v = 0$ eller $\pi(X)^n v$ er en egenvektor for $\pi(H)$ med egenværdi $\alpha - 2n$. Da $\pi(H)$ virker på et endeligtdimensionalt vektorrum, kan den kun have endeligt mange forskellige egenværdier. Der må derfor findes et $l' \in \mathbb{N}_0$, så $\pi(H)\pi(X)^{l'} v \neq 0$ og $\pi(H)\pi(X)^{l'+1} v = 0$. Sæt

$$v_0 = \pi(X)^{l'} v \qquad \text{og} \qquad \lambda = \alpha + 2l' \tag{3.5}$$

[3]En sådan egenværdi kaldes også for en *vægt* og den tilhørende egenvektor kaldes for en *vægtvektor*.

[4]På den baggrund kaldes $\pi(X)$ også for *hæveoperatoren*, mens $\pi(Y)$ kaldes *sænkeoperatoren*.

Dermed har vi $\pi(H)v_0 = \lambda v_0$. Sæt nu videre: $v_m = \pi(Y)^m v_0$, så vi dermed har

$$\pi(H)v_m = \pi(H)\pi(Y)^m v_0 = (\lambda - 2m)\pi(Y)^m v_0 = (\lambda - 2m)v_m \,. \tag{3.6}$$

Lad os nu vise, at der gælder følgende for $m > 0$:

$$\pi(X)v_m = (m\lambda - m(m-1))v_{m-1} \tag{3.7}$$

Vi viser det ved induktion, først $m = 1$:

$$\pi(X)v_1 = \pi(X)\pi(Y)v_0 = \pi(H)v_0 + \pi(Y)\pi(X)v_0 = \pi(H)v_0 = \lambda v_0 \,,$$

hvor næstsidste lighedstegn følger af, at $\pi(X)v_0 = 0$, pr. definition af v_0. Men dette er præcis (3.7) for $m = 1$. Antag nu, at det gælder for m, og betragt:

$$\begin{aligned}\pi(X)v_{m+1} &= \pi(X)\pi(Y)v_m = (\pi(H) + \pi(Y)\pi(X))v_m \\ &= \pi(H)v_m + (m\lambda - m(m-1))\pi(Y)v_{m-1} \\ &= (\lambda - 2m)v_m + (m\lambda - m(m-1))v_m = ((m+1)\lambda - m(m-1) - 2m)v_m \\ &= ((m+1)\lambda - (m+1)m)v_m \,.\end{aligned}$$

Det er præcis (3.7) med $m + 1$ i stedet for m. Dermed er (3.7) vist.

$v_m = \pi(Y)^m v_0$ var som nævnt egenvektorer for $\pi(H)$ med forskellige egenværdier. Med samme argument som før, må der altså findes et $l \in \mathbb{N}_0$, så $v_l \neq 0$, og $v_{l+1} = 0$. Vha. (3.7) får vi

$$0 = \pi(X)v_{m+1} = ((m+1)\lambda - (m+1)m)v_m = (m+1)(\lambda - m)v_m \,.$$

Da $v_m \neq 0$ og $m + 1 \neq 0$, må vi nødvendigvis have $m = \lambda$. (3.6) giver nu, at $\pi(H)$ kun har heltallige egenværdier, og at disse præcis er $-l, -l+2, -l+4, \ldots, l-2, l$ svarende til at m løber fra 0 til l.

Vi har altså nu fundet $l + 1$ lineært uafhængige vektorer v_m, der opfylder følgende:

$$\pi(H)v_m = (l - 2m)v_m \quad , \quad \pi(Y)v_m = v_{m+1} \quad \pi(Y)v_l = 0$$

$$\pi(X)v_m = (ml - m(m-1))v_{m-1} \ (m > 0) \quad , \quad \pi(X)v_0 = 0$$

$v_0, \ldots, v_l$ udspænder altså et $l + 1$-dimensionalt underrum af V, der er invariant under $\pi(H), \pi(X)$ og $\pi(Y)$ og dermed under $\pi(Z)$ for ethvert $Z \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Da π er irreducibel, må vi derfor have, at V er lig spannet af disse. □

Ved kombination af Sætning 3.5 med Lemma 3.1 og Lemma 3.3 får vi det, vi søgte efter:

Korollar 3.7. *For hvert naturligt tal l findes en irreducibel repræsentation af* SU(2) *af dimension $l + 1$. Hvis Π er en irreducibel repræsentation af* SU(2) *af dimension $l + 1$, vil Π være ækvivalent med Π_l. Specielt vil to irreducible repræsentationer af* SU(2) *med samme dimension være ækvivalente.*

Fra Sætning 3.5 kender vi alle irreducible repræsentationer af $\mathfrak{su}(2)$. Dermed kender vi også alle irreducible repræsentationer af $\mathfrak{so}(3)$, da $\mathrm{ad} : \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}(3)$ var en isomorfi. Vi kan nu karakterisere alle irreducible repræsentationer af SO(3) og dermed eksplicit besvare det spørgsmål, der blev stillet i slutningen af afsnit 2.

Proposition 3.8. *Lad $\tau_l = \pi_l \circ \mathrm{ad}^{-1}$ være en irreducibel repræsentation af $\mathfrak{so}(3)$. Der findes en repræsentation $\mathfrak{D}$ af* SO(3)*, så $\mathfrak{D}_* = \tau_l$, hvis og kun hvis l er lige.*

Bevis. Antag at m er lige. Vi skal vise, at der findes $\mathfrak{D}$, der inducerer $\tau_l = \pi_l \circ \mathrm{ad}^{-1}$. Jvf. Proposition 2.4 er det nok at vise, at $\{\pm I\} \subseteq \ker \Pi_l$, hvor Π_l er den irreducible repræsentation af SU(2), der inducerer π_l. Vi skal med andre ord blot vise, at $\Pi_l(-I) = I$. Bemærk først, at $\exp(2\pi\sigma_1) = -I$. Derfor:

$$\Pi_l(-I) = \Pi_l(\exp(2\pi\sigma_1)) = \exp(\pi_l(2\pi\sigma_1)) = \exp(2\pi\pi_l(\sigma_1)) = \exp(i\pi\pi_l(H)) ,$$

idet $\sigma_1 = \frac{i}{2}H$. Men $\pi_l(H)$ er diagonal med egenværdierne $l, l-2, \ldots, -l+2, -l$, så

$$\exp(i\pi\pi_l(H)) = \exp(\mathrm{Diag}(-i\pi l, \ldots, i\pi l)) = \mathrm{Diag}(e^{2\pi i \frac{l}{2}}, \ldots, e^{-2\pi i \frac{l}{2}}) = I ,$$

hvor vi har udnyttet, at $\frac{l}{2}$ er et heltal.

Antag nu, at l er ulige. Hvis vi kan vise $-I \notin \ker \Pi_l$ giver Proposition 2.4, at der ikke findes en repræsentation af SO(3), der inducerer τ_l. Men med fuldstændigt tilsvarende udregninger som ovenfor, får vi, at $\Pi_l(-I) = -I$, som var det ønskede. □

Som vi så i beviset for Sætning 3.5, så vi, at rummet V_l havde en basis bestående af egenvektorer for $\pi(H)$ med egenværdierne $-l, -l+2, \ldots, l-2, l$. Lad m være én af disse egenværdier. Den tilhørende egenvektor vil vi notere med $|lm\rangle$, så vi flugter med fysikernes Dirac-notation.

4 Spin og angulært moment

Billederne af de 3 matricer A_1, A_2 og A_3 under $\mathfrak{D}_*$ kaldes *impulsmomentoperatorerne* i hhv. x-, y- og z-retningen, og de betegnes med J_x, J_y og J_z. Disse er elementer i $\mathrm{End}(V)$ og dermed operatorer på V. Da $\mathfrak{D}_*$ er en Lie-algebra-homomorfi, besidder impulsmomentoperatorerne de samme kommutatorrelationer som A_i'erne:

$$[J_x, J_y] = J_z \quad , \quad [J_y, J_z] = J_x \quad , \quad [J_z, J_x] = J_y .$$

Med V vil vi betegne *tilstandsrummet* eller *ket-rummet*; et Hilbertrum, typisk $L_2(\mathbb{R}^3, m_3)$ eller $\mathbb{C}^n$. Vi vil betragte *unitære repræsentationer* $\mathfrak{D} : \mathrm{SO}(3) \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$. Et eksempel på en unitær repræsentation af SO(3) på $L_2(\mathbb{R}^3)$ kunne være

$$(\mathfrak{D}(R)f)(x) = f(R^{-1}x)$$

med $R \in \mathrm{SO}(3)$. Man tjekker hurtigt, at $\mathfrak{D}$ ovenfor faktisk er en homomorfi fra SO(3) til $\mathrm{Aut}(L_2(\mathbb{R}^3))$, at $\mathfrak{D}(R)$ er en unitær operator på $L_2(\mathbb{R}^3)$, og at $\mathfrak{D}$ dermed er en unitær repræsentation af SO(3).

Lad os nu vende tilbage til der, hvor vi begyndte i afsnittet. Sæt $V = \mathbb{C}^2$ og definer en repræsentation $\mathfrak{D} : \mathrm{SO}(3) \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ ved, at $\mathfrak{D}_* : \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ er afbildningen $A_i \longmapsto \sigma_i$, altså den inverse til ad, nævnt i Proposition 2.3. Da $\mathfrak{D}_*$ således afbilder ind i $\mathfrak{su}(2)$ giver det kommutative diagram (2.3), at $\mathfrak{D}$ afbilder ind i SU(2). Operatorerne, som σ_1, σ_2 og σ_3 i standardbasen for $\mathbb{C}^2$ er matrixrepræsentationer for, betegnes i dette specialtilfælde ikke J_x, J_y eller J_z, men for S_x, S_y og S_z og betegnes *spin-operatorerne* (bemærk, at i fysik-litteraturen vil vores S_x svare til S_z, mens vores S_z vil svare til S_x). Egenværdierne for disse operatorer er de mulige spin-værdier langs den givne akse [5].

Man kan vise, at disse operatorer virkelig giver anledning til fysiske rotationer af ens system. Lad os betragte en rotation $R_x(\theta)$, altså en rotation med vinklen θ om x-aksen. $\mathfrak{D}(R_x(\theta)) = \exp(\theta\sigma_1)$ er da en operator på $\mathbb{C}^2$. Hvis $v \in \mathbb{C}^2$ betegner en kvantemekanisk tilstand (fysikerne skriver $|v\rangle$), vil $\mathfrak{D}(R_x(\theta))v$ være tilstanden efter rotationen. Ved at

[5] Fysikerne måler spin i enheder af $\frac{\hbar}{2}$, og lægger man dertil det til konventionsstridighederne hørende i, opnås, at den fysiske spin-værdi vil være $\frac{1}{2}i\hbar$ gange egenværdien for σ_i.

udregne de kvantemekaniske middelværdier af S_y og S_z (i fysik-litteratur betegnet $\langle S_y\rangle$ og $\langle S_z\rangle$), ser man disse ændrer sig på samme måde som var de komponenter af en vektor i rummet.

Lad stadig v være en tilstand i $\mathbb{C}^2$, og lad os betragte effekten af en rotationen $R_x(2\pi)$. Vi ser:

$$\mathfrak{D}(R_x(2\pi))v = \exp(2\pi\sigma_1)v = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} v = -v \; ,$$

altså efter en rotation på 2π er vi *ikke* tilbage, hvor vi begyndte!

Antag, at vi har en partikel, der kan bevæge sig inden for et eller andet område $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Hvis vi ser bort fra spin, så er partiklen fuldstændigt beskrevet ved et element i $L^2(\Omega)$, rummet af funktioner på Ω, der er kvadratisk integrable mht. Lebesgue-målet. Dette vides at være et Hilbertrum.

Til at beskrive partiklen *med* spin, er $L^2(\Omega)$ ikke nok. Det korrekte rum til denne beskrivelse er

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega) \otimes \mathbb{C}^2$$

Ethvert element i $\mathcal{H}$ kan skrives som en linearkombination af $\psi_1 \otimes (1,0)$ og $\psi_2 \otimes (0,1)$, for $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\Omega)$. Dette vil vi notere (ψ_1, ψ_2). Ethvert element i $\mathcal{H}$ er altså af denne form.

Lemma 4.1. $\mathcal{H} = L^2(\Omega) \otimes \mathbb{C}^2$ *er et Hilbertrum.*

Bevis. I det følgende vil vi notere det indre produkt på både $L^2(\Omega)$ og $\mathbb{C}^2$ med $\langle\cdot,\cdot\rangle$, det burde ikke kunne give anledning til misforståelser. Vi konstruerer et indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ på $\mathcal{H}$ ved følgede:

$$\langle v_1 \otimes \psi_1, v_2 \otimes \psi_2\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi_1, \psi_2\rangle\langle v_1, v_2\rangle \qquad , \qquad v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$$

og udvider sesquilineært. Det ses hurtigt, at denne opfylder aksiomerne for et indre produkt.

Specielt ser vi, hvis vi udtrykker elementerne som (ψ_1, ψ_2) og (φ_1, φ_2):

$$\begin{aligned} \langle(\psi_1, \psi_2), (\varphi_1, \varphi_2)\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \psi_1 \otimes (1,0) + \psi_2 \otimes (0,1), \varphi_1 \otimes (1,0) + \varphi_2 \otimes (0,1)\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle \psi_1, \varphi_1\rangle + \langle \psi_2, \varphi_2\rangle \; . \end{aligned}$$

Specielt har vi $\|(\psi_1,\psi_2)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\psi_1\|_2^2 + \|\psi_2\|_2^2$, hvor $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ er normen på $\mathcal{H}$ og $\|\cdot\|_2$ er 2-normen på $L^2(\Omega)$.

Vi skal vise, at $\mathcal{H}$ er fuldstændigt i normen $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, så lad (ψ_1^n, ψ_2^n) være en Cauchy-følge, dvs. givet $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$, så $\|(\psi_1^n, \psi_2^n) - (\psi_1^m, \psi_2^m)\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$ for alle $n, m \geq N$. Men så giver identiteten $\|(\psi_1,\psi_2)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\psi_1\|_2^2 + \|\psi_2\|_2^2$, at (ψ_1^n) og (ψ_2^n) begge er Cauchy-følger i $L^2(\Omega)$, og derfor konvergerer mod hhv. ψ_1 og ψ_2 i $L^2(\Omega)$. Men da

$$\begin{aligned} \|(\psi_1^n, \psi_2^n) - (\psi_1, \psi_2)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|(\psi_1^n - \psi_1, \psi_2^n - \psi_2)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \|\psi_1^n - \psi_1\|_2^2 + \|\psi_2^n - \psi_2\|_2^2 \to 0 \end{aligned}$$

for $n \to \infty$, vil $(\psi_1^n, \psi_2^n) \to (\psi_1, \psi_2)$. Ergo er $\mathcal{H}$ et Hilbertrum. □

5 Addition af impulsmoment. Clebsch-Gordan-problemet

Antag, at (Π_1, V) og (Π_2, W) er to endeligtdimensionale repræsentationer af en Lie-gruppe G, kan vi danne tensorproduktet af de to repræsentationer og få en ny repræsentation $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ af G på vektorrummet $V \otimes W$ givet ved

$$\Pi_1 \otimes \Pi_2(g)(v \otimes w) = \Pi_1(g)v \otimes \Pi_2(g)w \; .$$

Denne repræsentation giver nu anledning til en repræsentation $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V \otimes W)$:

Proposition 5.1. *Givet to repræsentationer* $\Pi_1 : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ *og* $\Pi_2 : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W)$ *kan vi danne tensorproduktet* $\Pi_1 \otimes \Pi_2 : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V \otimes W)$*. Den inducerede repræsentation* $\pi_1 \otimes \pi_2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V \otimes W)$ *har udseendet:*

$$\pi_1 \otimes \pi_2(X) = \pi_1(X) \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes \pi_2(X) \qquad , \qquad X \in \mathfrak{g}\,,$$

hvor π_1 *og* π_2 *er Lie-algebra-repræsentationerne hørende til* Π_1 *og* Π_2*.*

Bevis. For at finde Lie-algebra-repræsentationen, skal vi udregne:

$$\begin{aligned} \pi_1 \otimes \pi_2(X)(v_1 \otimes v_2) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Pi_1 \otimes \Pi_2(e^{tX})(v_1 \otimes v_2) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Pi_1(e^{tX})v_1 \otimes \Pi_2(e^{tX})v_2\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Vi har med andre ord brug for at kunne differentiere et tensorprodukt af to glatte kurver.

Lad $u(t)$ være en glat kurve i V og $v(t)$ en glat kurve i W, så vil $u(t) \otimes v(t)$ være en glat kurve i $V \otimes W$. Lad os regne (udregningerne i det følgende er fuldstændig identiske med de tilsvarende udregninger for differentiation af et produkt af to sædvanlige funktioner):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u \otimes v &= \lim_{h\to 0} \frac{u(t+h) \otimes v(t+h) - u(t) \otimes v(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(t+h) \otimes v(t+h) - u(t-h) \otimes v(t)}{h} + \frac{u(t+h) \otimes v(t) - u(t) \otimes v(t)}{h} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \otimes v(t) + u(t+h) \otimes \frac{v(t+h) - v(t)}{h} \right) \\ &= \frac{du}{dt} \otimes v(t) + u(t) \otimes \frac{dv}{dt}\,. \end{aligned}$$

Ved at benytte dette i (5.1), får vi:

$$\begin{aligned} \pi_1 \otimes \pi_2(X) v_1 \otimes v_2 &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(\Pi_1 e^{tX} v_1\right) \otimes \Pi_2(e^{tX})\big|_{t=0} v_2 \\ &\quad + \Pi_1(e^{tX})\big|_{t=0} v_1 \otimes \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(\Pi_2 e^{tX} v_2\right) \\ &= \pi_1(x) v_1 \otimes \mathrm{id}_W\, v_2 + \mathrm{id}_V\, v_1 \otimes \pi_2(X) v_2\,, \end{aligned}$$

hvilket giver det ønskede. □

Altså virker $\pi_1 \otimes \pi_2(X)$ på $v \otimes w$ ved

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(X)(v \otimes w) = (\pi_1(X)v) \otimes w + v \otimes (\pi_2(X)w)\,.$$

Kvantemekanisk er situationen følgende: Vi har to partikler begge udsat for samme fysiske betingelser (e.g. et potentialfelt, elektrisk eller magnetisk felt etc.), partikel 1 i tilstanden $v_1 \in V$ og partikel 2 i tilstanden $v_2 \in V$. Eftersom de fysiske forhold er ens, er det rimeligt at antage, at deres tilstande befinder sig i samme tilstandsrum V. Opfattes de to partikler som ét samlet system, er deres tilstand vektoren $v_1 \otimes v_2$ i rummet $V \otimes V = V^{\otimes 2}$.

Fra forrige afsnit ved vi, at spin og impulsmoment er egenværdier for operatoren $J_z = \pi(\sigma_1)$, når Π er én af de irreducible repræsentationer af SU(2) nævnt i afsnit 3. Antag nu, at både v_1 og v_2 er egentilstande for J_z. Hvad er impulsmomentet om z-aksen for det forenede system $v_1 \otimes v_2$? Well, som nævnt ovenfor kan vi danne tensorproduktet $\Pi \otimes \Pi$. Problemet er nu, at selvom Π var irreducibel, så er $\Pi \otimes \Pi$ det ikke nødvendigvis. Vi skal derfor dekomponere $\Pi \otimes \Pi$ i en direkte sum af irreducible repræsentationer, før vi kan udtale os om det samlede systems impulsmoment. Dette kaldes *Clebsch-Gordan-problemet*. For SU(2) er dette heldigvis nemt og løsningen findes i nedenstående:

Sætning 5.2 (Clebsch-Gordan-dekomposition for SU(2))**.** *Lad* (Π_k, V_k) *og* (Π_l, V_l) *være irreducible repræsentationer af* $\mathrm{SU}(2)$. *Repræsentationen* $\Pi_k \otimes \Pi_l$ *er dekomposabel med*

$$\Pi_k \otimes \Pi_l = \Pi_{k+l} \oplus \Pi_{k+l-2} \oplus \cdots \oplus \Pi_{|k-l|+2} \oplus \Pi_{|k-l|}$$

med tilsvarende dekomposition af vektorrummet

$$V_m \otimes V_n = V_{k+l} \oplus V_{k+l-2} \oplus \cdots \oplus V_{|k-l|+2} \oplus V_{|k-l|} \ .$$

Bevis. Vi viser det ved at betragte den tilsvarende situation i $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Vælg basen $\{u_k, u_{k-2}, \ldots, u_{-k}\}$ for V_k og basen $\{v_l, v_{l-2}, \ldots, v_{-l}\}$ for V_l. Da vil $u_m \otimes v_n$ udgøre en basis for $V_k \otimes V_l$. Vi ser, at

$$\begin{aligned}(\pi_k(H) \otimes \mathrm{id}_{V_l} + \mathrm{id}_{V_k} \otimes \pi_l(H)) u_m \otimes v_n &= (\pi_k(H) u_m) \otimes v_n + u_m \otimes (\pi_l(H) v_n) \\ &= (m+n) u_m \otimes v_n \ .\end{aligned}$$

Altså er $u_m \otimes v_n$ en egenvektor for $J = \pi_k(H) \otimes \mathrm{id}_{V_l} + \mathrm{id}_{V_k} \otimes \pi_l(H)$ i $V_k \otimes V_l$. Vi kan derfor splitte $V_k \otimes V_l$ op i en direkte sum af egenrum for J.

De mulige egenværdier for J er $k+l, k+l-2, \ldots, -(k+l)+2, -(k+l)$. Egenrummet hørende til $k+l$ er én-dimensionalt, eneste mulige basisvektor er $u_k \otimes v_l$. For $k+l-2$ er der to muligheder, $u_k \otimes v_{l-2}$ og $u_{k-2} \otimes v_l$. For $k+l-4$ er der 3 sådan vil egenrummets dimension stige med 1, indtil vi når $|k-l|$, hvor dimensionen er $l+1$, nemlig $u_k \otimes v_{-l}$, $u_{k-2} \otimes v_{-l+2}, \ldots, u_{k-l} \otimes v_l$. Dimensionen er konstant, indtil vi når $-|k-l|$, og derefter falder dimensionen med 1 hver gang egenværdien falder med 2, indtil vi når $-(k+l)$, hvor dimensionen igen er 1, udspændt af $u_{-k} \otimes v_{-l}$. □

Da repræsentationen og vektorrummet dekomponerer ens, vil vi i det følgende undertrykke repræsentationen og blot angive vektorrummet, repræsentationen virker på.

Antag nu igen, at vi har to partikler, hvis tilstande begge er vektorer i et (uendeligt-dimensionalt) vektorrum V. Af en eller anden sætning, kan vektorrummet dekomponeres i invariante underrum (svarende til irreducible summander i den tilsvarende repræsentation af SO(3))

$$V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V_{2k} \ .$$

Tensorproduktet $V \otimes V$ kan vi nu dekomponere på følgende måde:

$$V \otimes V = \Big(\bigoplus_{k=0}^{\infty} V_{2k}\Big) \otimes \Big(\bigoplus_{l=0}^{\infty} V_{2l}\Big) = \bigoplus_{k,l=0}^{\infty} (V_{2k} \otimes V_{2l}) \ . \tag{5.2}$$

Vi kan nu angive en basis $\widetilde{B}$ for $V \otimes V$ bestående af vektorer af formen $|2k, m_1\rangle \otimes |2l, m_2\rangle$, hvor notationen er som i slutningen af afsnit 3. Denne basis for $V \otimes V$ kaldes til tider for den *ukoblede basis*.

Problemet med denne dekomposition er, som nævnt ovenfor, at $V_{2k} \otimes V_{2l}$ ikke nødvendigvis er irreducibel. Vi benytter derfor Sætning 5.2 til at dekomponere yderligere

$$V \otimes V = \bigoplus_{k,l=0}^{\infty} (V_{2k} \otimes V_{2l}) = \bigoplus_{k,l=0}^{\infty} \big(V_{2(k+l)} \oplus V_{2(k+l)-2} \oplus \cdots \oplus V_{2|m-n|}\big) \ . \tag{5.3}$$

A Det nødvendigste om Lie-grupper og Lie-algebraer

I dette appendix nævnes de vigtigste begreber og sætninger i relation til Lie-grupper, der har relevans for den øvrige tekst. Sætningerne bevises ikke, da dette vil være for omfattende.

Definition A.1. *En* Lie-gruppe G *er en differentiabel mangfoldighed med en gruppestruktur, således at afbildningen* $G \times G \longrightao G$ *givet ved* $(g,h) \longmapsto g^{-1}h$ *er differentiabel* [6].

Eksempler på Lie-grupper: Gruppen af invertible $n \times n$-matricer $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ er en Lie-gruppe. Ligeså er $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Hvis V er et n-dimensionalt reelt vektorrum og vi herpå har udvalgt en basis, da kan vi naturligt identificere $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$ (altså mængden af invertible lineære afbildninger fra V til V) med $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, hvorfor også $\mathrm{Aut}(V)$ er en Lie-gruppe. På tilsvarende måde, hvis V er kompleks, kan vi identificere $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, så også $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ er en Lie-gruppe.

Definition A.2. *En* Lie-algebra $\mathfrak{g}$ *er et endeligdimensionalt vektorrum med en bilineær afbildning* $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$*, der er antisymmetrisk og for alle* $x,y,z \in \mathfrak{g}$ *opfylder* Jacobi-identiteten*:*

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0 \,.$$

Eksempler på Lie-algebraer: Rummet af $n \times n$-matricer $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ med kommutatoren $[A,B] = AB - BA$ er en Lie-algebra. Tilsvarende er $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ det. Hvis V er et endeligt-dimensionalt reelt vektorrum med en basis valgt, så vil $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ - rummet af lineære afbildninger fra V til V - være isomorf med $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, så også $\mathrm{End}(V)$ er en Lie-algebra. Tilsvarende, hvis V er kompleks, vil $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ være en Lie-algebra.

Til de definitioner hører et væld af begreber. Hvis G og H er to Lie-grupper, og $\varphi : G \longrightarrow H$ en afbildning mellem dem, så kaldes φ for en *Lie-gruppe-homomorfi*, hvis φ er en gruppe-homomorfi, der samtidig er differentiabel. Hvis φ er invertibel og den inverse er differentiabel, kaldes φ en *Lie-gruppe-isomorfi*.

Hvis $\mathfrak{g}$ og $\mathfrak{h}$ er Lie-algebraer, så kaldes en lineær afbildning $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ for en *Lie-algebra-homomorfi*, hvis den for alle $x,y \in \mathfrak{g}$ opfylder $\psi([x,y]) = [\psi(x),\psi(y)]$. ψ kaldes en *Lie-algebra-isomorfi*, hvis den tillige er invertibel.

Definition A.3. *En* Lie-undergruppe H *af Lie-gruppen* G *er en undergruppe af* G *udstyret med en differentiabel struktur, der gør* H *til en (immerseret) delmangfoldighed af* G.

En Lie-delalgebra $\mathfrak{h}$ *af Lie-algebraen* $\mathfrak{g}$ *er et underrum af* $\mathfrak{g}$*, der er lukket under Lie-parentesen* $[\cdot,\cdot]$.

Der gælder følgende to overraskende sætninger (der begge er svære at vise!)

Sætning A.4 (Ado's Sætning)**.** *Enhver Lie-algebra sidder som delalgebra af* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ *for passende* n.

Sætning A.5. *Enhver (topologisk) afsluttet undergruppe af en Lie-gruppe er automatisk en Lie-undergruppe.*

Sætning A.5 forærer os straks en række nye Lie-grupper. $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ er undergruppen af $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ bestående af matricer med determinant 1, dvs. $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}\{1\}$, og da $\det : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert, er $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ afsluttet i $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ og dermed en Lie-undergruppe.

Man kan relativt nemt vise, at også $\mathrm{O}(n)$ (gruppen af ortogonale matricer) er en afsluttet undergruppe af $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ og dermed selv er en Lie-gruppe, og med samme argument

[6] Med differentiabel menes i denne sammenhæng C^∞.

som før, får vi yderligere, at også $\mathrm{SO}(n)$ er en Lie-gruppe. Tilsvarende vil $\mathrm{U}(n)$ og $\mathrm{SU}(n)$ være Lie-grupper.

Til enhver Lie-gruppe, kan vi knytte en Lie-algebra, der faktisk siger overraskende meget om gruppen. Tilmed er Lie-algebraerne med deres lineære struktur væsentlig nemmere at arbejde med end grupperne.

Lad $g \in G$, hvor G er en Lie-gruppe. Venstre-multiplikation L_g med g er afbildningen $G \ni h \longmapsto L_g(h) = gh$. Da produktet i en Lie-gruppe er en differentiabel operation, er L_g differentiabel. Den inverse er $L_{g^{-1}}$, der selv er differentiabel, ergo er L_g en diffeomorfi. Dermed vil pushforward $(L_g)_*$ af et vektorfelt på G give et nyt vektorfelt på G (det kan vi ikke være sikre på med mindre afbildningen, hvis pushforward vi betragter, er en diffeomorfi). Et vektorfelt X siges at være *venstre-invariant*, hvis $(L_g)_*X = X$. Lie-parentesen af to venstre-invariante vektorfelter er igen venstre-invariant:

$$(L_g)_*[X,Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X,Y]\,,$$

Et vektorfelt, der vides at være venstre-invariant, er bestemt alene ud fra sin værdi i et enkelt af gruppens punkter, fx i enhedselementet, e. I punktet g vil vektorfeltet da blot have værdien $(L_g)_*X_e$, hvor X_e er værdien i e.

Rummet af venstre-invariante vektorfelter på Lie-gruppen G udgør altså en Lie-algebra $\mathfrak{g}$, Lie-algebraen for gruppen. Som vektorrum betragtet er $\mathfrak{g}$ isomorf med tangentrummet i enhedselementet T_eG, og er således at betragte som en slags "linearisering" af gruppen. Specielt gælder, at Lie-algebraen har samme dimension som Lie-gruppen.

Denne definition er ikke særlig anvendelig til rent faktisk at bestemme Lie-algebraen for en givet Lie-gruppe, så efter at have indført eksponentialafbildningen giver vi en langt stærkere metode til at bestemme Lie-algebraer.

Det første indblik i den nære sammenhæng mellem Lie-grupper og deres algebraer kommer nu. Givet to grupper G og H og en Lie-gruppe-homomorfi $\varphi : G \longrightarrow H$. Denne afbildning inducerer på naturlig måde en afbildning mellem de tilhørende Lie-algebraer. Lad $X \in \mathfrak{g}$ være et venstre-invariant vektorfelt på G, og X_e værdien i e. Pushforward $\varphi_* : T_eG \longrightarrow T_eH$ giver nu en vektor i T_eH, og dette bestemmer et vestre-invariant vektorfelt på H. Denne netop konstruerede *inducerede Lie-gruppe-homomorfi* $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ betegnes også φ_*. Der gælder

Sætning A.6. *Hvis $\varphi : G \longrightarrow H$ er en Lie-gruppe-isomorfi, da er den inducerede afbildning $\varphi_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ en Lie-algebra-isomorfi.*

Altså isomorfe Lie-grupper har isomorfe Lie-algebraer. Det omvendte - at grupper med isomorfe Lie-algebraer er isomorfe - gælder dog desværre ikke altid, men dog i et vigtigt tilfælde, se Sætning A.7.

Nu vil vi kort vende os mod *fundamentalgrupper* og *universelle overlejringer*. Ved en *sti* γ i et topologisk rum X forstås en kontinuert afbildning $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$. To stier γ_1 og γ_2 med samme begyndelsespunkt $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$ og samme endepunkt $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$ siges at være *stihomotope*, hvis der findes en kontinuert afbildning $H : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow X$, så $H(0,t) = \gamma_1(t)$ og $H(1,t) = \gamma_2(t)$ og så $H(s,0) = a$ og $H(s,1) = b$. En *løkke* er en sti med samme begyndelses- og endepunkt: $\gamma(0) = \gamma(1)$. To stier kan sammensættes på følgende (oplagte) måde;

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & , \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1) & , \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}\,,$$

hvor vi altså først bevæger os langs γ_1 og derefter langs γ_2. Vi kan også definere den omvendte sti γ^{-1} ved $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, hvor vi bevæger os den modsatte vej gennem sporet.

Vi samler nu løkkerne i ækvivalensklasser, idet vi erklærer to løkker at være ækvivalente, hvis de er stihomotope (stihomotopi er oplagt en ækvivalensrelation). Klassedannelsen respekterer sammensætning: $[\gamma_1 * \gamma_2] = [\gamma_1] * [\gamma_2]$ samt inversdannelse. Med $*$ som komposition, bliver mængden af ækvivalensklasser af løkker i punktet a til en gruppe, $\pi_1(X, a)$, kaldet *fundamentalgruppen* eller den *første homotopigruppe* for X i a, hvor neutralelementet er ækvivalensklassen indeholdende den konstante løkke $[0,1] \longmapsto a$.

Lad os herefter betragte kurvekomponenterne af det topologiske rum X, og antag, at a og b ligger i samme kurvekomponent. Altså findes der en kontinuert kurve α fra a til b. Givet en løkke γ baseret i b, vil $\alpha * \gamma * \alpha^{-1}$ være en løkke baseret i a. Denne afbildning giver en gruppeisomorfi $\pi_1(a, X) \cong \pi_1(b, X)$, således at alle fundamentalgrupperne i en kurvekomponent er isomorfe. Hvis specielt X er kurvesammenhængende, giver det mening at tale om fundamentalgrupp*en* for X, da fundamentalgrupperne i alle punkter er isomorfe. Fundamentalgruppen er en topologisk invariant, thi om to kurvesammenhængende topologiske rum X og Y gælder, at de har de isomorfe fundamentalgrupper, hvis de er homeomorfe (men ikke nødvendigvis omvendt). Et kurvesammenhængende rum med triviel fundamentalgruppe kaldes *enkeltsammenhængende*. For enkeltsammenhængende Lie-grupper, er ligheden mellem gruppen og dens algebra meget slående:

Sætning A.7. *Lad G og H være Lie-grupper, G enkeltsammenhængende, og $\mathfrak{g}$ og $\mathfrak{h}$ de tilhørende Lie-algebraer. Til enhver Lie-algebra-homomorfi $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ hører en Lie-gruppe-homomorfi ψ, med $\psi_* = \varphi$, der altså har φ som induceret afbildning. Hvis både G og H er enkeltsammenhængende og φ er en isomorfi, er ψ også en isomorfi.*

Lad nu $p : E \longrightarrow B$ være en kontinuert surjektiv afbildning. En åben delmængde $U \subseteq B$ siges at være *jævnt overlejret* ved p, hvis $p^{-1}(U)$ er en forening $\bigcup_{i \in I} V_i$ af disjunkte mængder V_i, således at $p|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ er en homeomorfi. Parret (E, p) siges at være en *overlejring* af B, hvis ethvert punkt i B har en omegn, der er jævnt overlejret ved p. E kaldes *overlejringsrummet* og B kaldes *basen* eller *basis-rummet*. Hvis overlejringsrummet er enkeltsammenhængende, kaldes overlejringen *universel*. Skulle en sådan universel overlejring findes, så er den unik, i den forstand, at hvis E og F begge er universelle overlejringsrum for B, så er de homeomorfe. Hvis endvidere det universelle overlejringsrum kan udstyres med en gruppe-struktur, der gør det til en Lie-gruppe, kaldes det for den *universelle overlejringsgruppe*.

Ikke alle topologiske rum har en universel overlejring, men visse Lie-grupper er pæne nok [7] til at have én:

Sætning A.8. *Enhver sammenhængende Lie-gruppe har en universel overlejringsgruppe.*

For Lie-grupper er der følgende nydelige sammenhænge mellem fundamentalgruppen og universelle overlejringer

Sætning A.9. *Lad G være en sammenhængende Lie-gruppe, og $p : E \longrightarrow G$ den universelle overlejringshomomorfi. Der gælder da:*

$$\pi_1(G) \cong \ker p\,.$$

For generelle topologiske rum gælder kun, at fundamentalgruppen har sammen kardinalitet som enhver fiber af den universelle overlejring, men for Lie-grupper har vi altså et stærkere resultat.

[7] For generelle topologiske rum gælder, at det har en universel overlejring, hvis det er kurvesammenhængende, lokalt kurvesammenhængende og ethvert punkt har en enkeltsammenhængende omegn.