

PROJEKTIVE REPRÆSENTATIONER I KVANTEMESKANIK

AF THOMAS HJORTGAARD DANIELSEN

Det er velkendt, at tilstande (eller rettere *ægte tilstande*) i kvantemekanik er beskrevet ved enhedsvektorer i et Hilbertrum \mathcal{H} . Eftersom en fasefaktor $e^{i\theta}$ ikke spiller den store rolle, er vi ikke så meget interesseret i Hilbertrummet \mathcal{H} som i det projektiviserede rum $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ som er mængden af linier i H gennem 0, udstyret med kvotienttopologien. Elementer heri kaldes *tilstande*. Givet to tilstande $[\varphi]$ og $[\psi]$ kan vi definere *overgangssandsynligheden* fra den ene tilstand til den anden ved

$$([\varphi], [\psi]) := \frac{|\langle \varphi, \psi \rangle|}{\|\varphi\| \|\psi\|}.$$

Fremover vil vi antage, at repræsentanterne for tilstandene er normerede vektorer.

Definition 1 (Symmetri). Lad $\text{Aut}(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$ være mængden af kontinuerte bijektioner $\Phi : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(\mathcal{H})$, der bevarer overgangssandsynligheden, dvs.

$$(\Phi[\varphi], \Phi[\psi]) = ([\varphi], [\psi]).$$

En sådan afbildning kaldes en symmetri af kvantesystemet.

Klart vil en unitær eller antiunitær¹ afbildning inducere en symmetri af det projektiviserede rum ved $\widehat{U}([\varphi]) = [U\varphi]$. At det omvendte er tilfældet er mere overraskende:

Sætning 2 (Wigner-Bargman). Lad Φ være en symmetri af $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, da er Φ induceret af en unitær eller antiunitær afbildning, dvs. $\Phi = \widehat{U}$. Hvis U_1 og U_2 begge inducerer symmetrien Φ , så findes $\theta \in \mathbb{R}$, så $U_2 = e^{i\theta}U_1$, mao. U_1 og U_2 er begge unitære eller begge antiunitære.

Mao. studiet af symmetrier er blot studiet af unitære eller antiunitære operatorer på Hilbertrummet (op til en fase).

Lad $U(\mathcal{H})$ betegne mængden af unitære operatorer på \mathcal{H} og $U'(\mathcal{H})$ mængden af antiunitære operatorer på \mathcal{H} . Hvis $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ betegner den naturlige antiunitære isomorfi af \mathcal{H} , altså

$$J\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k e_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{a}_k e_k,$$

¹Ved en *antiunitær* operator forstås en antilineær afbildning $U' : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, der opfylder $\langle U'\varphi, U'\psi \rangle = \overline{\langle \varphi, \psi \rangle}$.

så vil $U'(\mathcal{H}) = JU(\mathcal{H})$. Giv $U(\mathcal{H})$ den stærke operator-topologi og overfør den til $U'(\mathcal{H})$ via J . Giv $\text{Aut}(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$ kvotienttopologien induceret fra afbildningen $U(\mathcal{H}) \cup U'(\mathcal{H}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$, $U \longmapsto \widehat{U}$. Dette gør $\text{Aut}(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$ til en topologisk gruppe.

Når man betragter et givet fysisk system, vil det ofte have nogle åbenlyse symmetrier, altså nogle operationer på systemet som lader overgangssandsynlighederne, og dermed alt af fysisk interesse, invariant. Hvis vi fx betragter et system, der lever på linien \mathbb{R} , vil det være naturligt, at kræve de fysiske love er uafhængige af, hvor på linien vi befinder os, mao. skal translation være en symmetri af systemet. Betragter man et system der lever i en kugle i \mathbb{R}^3 vil det være naturligt at kræve, at rotationer skal være symmetrier. Mere generelt, hvis vi i klassisk kvantemekanik, betragter et system i \mathbb{R}^3 vil det være naturligt at kræve, at systemet er invariant under samtlige Galilei-transformationer, dvs. under translationer, rotationer, boosts og tidsforskydninger. Alle disse udgør en gruppe, Galilei-gruppen \mathcal{G} . Er vi interesserede i en relativistisk teori, vil det være naturligt at kræve invarians under Poincaré-gruppen \mathcal{P} . Dette formaliserer vi i følgende:

Definition 3 (Projektiv repræsentation). *Givet en Lie gruppe G , så er en projektiv repræsentation en kontinuert gruppehomomorfi $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$.*

Definition 4 (Kvantesystem). *Ved et kvantesystem vil vi forstå en triplet $(\mathcal{H}, \rho, U(t))$ bestående af et Hilbertrum \mathcal{H} , en projektiv repræsentation ρ af en gruppe G , der kaldes kvantesystemets symmetri-gruppe, samt en stærkt kontinuert 1-parameter-gruppe $U(t)$ af unitære operatorer, kaldet systemets tidsudvikling.*

En projektiv repræsentation κ af \mathbb{R} således at $\kappa(t)$ kommuterer med $\widehat{U}(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$ kaldes en kontinuert tidssymmetri af systemet.

Et typisk eksempel på, hvordan projektive repræsentationer af \mathbb{R} kan konstrueres er ved for et element X i Liealgebraen \mathfrak{g} for symmetri-gruppen at betragte afbildningen $t \longmapsto \rho(\exp(tX))$.

Givet en projektiv repræsentation $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$, så kan vi altså for hvert $g \in G$ finde en unitær eller antiunitær operator $\pi(g)$, så $\rho(g) = \widehat{\pi}(g)$. Denne er dog kun bestemt op til en fasefaktor. En projektiv repræsentation, om hvilken der gælder, at $\pi(g)$ er unitær for alle g kaldes en *unitær projektiv repræsentation*. Det er forholdsvis nemt at vise, at projektive repræsentationer af sammenhængende grupper altid er unitære.

Definition 5 (Irreducibilitet). *Lad $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$ være en projektiv repræsentation af en gruppe og $\pi : G \longrightarrow U(\mathcal{H}) \cup U'(\mathcal{H})$ et valg af punktvis løft. Et afsluttet underrum $V \subseteq \mathcal{H}$ kaldes ρ -invariant, såfremt V er invariant under alle operatorerne $\pi(g)$, dvs. hvis $\pi(g)V \subseteq V$. Repræsentationen ρ kaldes irreducibel, såfremt de eneste ρ -invariante underrum er $\{0\}$ og \mathcal{H} selv.*

Et kvantesystem (\mathcal{H}, ρ) hvor den projektive repræsentation er irreducibel kaldes et kvantesystem uden superudvalgsregler.

Vi vender tilbage til irreducibilitet superudvalgsregler senere. Spørgsmålet er nu, under antagelse af, at G er sammenhængende, kan man da vælge π på en

sådan måde, at den er en unitær repræsentation af G ? Svaret på, hvornår dette kan lade sig gøre, viser sig at involvere Lie-gruppe-cohomologi og gruppeudvidelser, men først lidt motivation: Antag, at vi har valgt $\pi : G \longrightarrow U(H)$. Da må nødvendigvis både $\pi(gh)$ og $\pi(g)\pi(h)$ repræsentere $\rho(gh)$, mao. findes der $\omega(g, h) \in U(1)$, en såkaldt *faktor*, således at

$$\pi(gh) = \omega(g, h)\pi(g)\pi(h).$$

ω kan ikke opføre sig vilkårligt vildt, fx ser vi, at $\omega(g, 1) = \omega(1, h) = 1$, og at associativiteten af den projektive repræsentation fordrer

$$\omega(h, k)\omega(g, hk) = \omega(g, h)\omega(gh, k), \quad (1)$$

kaldet *cocycle-betingelsen*. Bemærk yderligere, at ω afhænger af valget af π , hvis vi i stedet havde valgt $\pi' : G \longrightarrow U(1)$ til at inducere ρ , så kunne vi finde en funktion $\gamma : G \longrightarrow U(1)$ således $\pi'(g) = \gamma(g)\pi(g)$, og π' ville give anledning til $\omega' : G \times G \longrightarrow U(1)$ ved

$$\pi'(gh) = \omega'(g, h)\pi'(g)\pi'(h).$$

Ved at indsætte $\pi'(g) = \gamma(g)\pi(g)$ fås, at ω og ω' er relaterede ved

$$\gamma(g)\gamma(h)\omega'(g, h) = \omega(g, h)\gamma(gh). \quad (2)$$

Bemærk, at ω ingenlunde behøver at være kontinuert (da vi ikke har pålagt π nogen kontinuitetskrav) endsiges differentiabel. Bemærk dog følgende:

Lemma 6. *Hvis G er en sammenhængende og enkeltssammenhængende, så kan vi til en projektiv repræsentation ρ af G vælge $\pi : G \longrightarrow U(\mathcal{H})$, så den tilhørende faktor $\omega : G \times G \longrightarrow U(1)$ er glat. Følgelig vil π være en kontinuert afbildning.*

Mao. i ækvivalensklassen af faktorer hørende til ρ findes altså mindst én glat af slagsen.

Nu til gruppe-cohomologi. Lad G være en gruppe (behøver ikke have yderligere struktur end gruppestrukturen), lad A være en abelsk gruppe, og lad $\sigma : G \longrightarrow \text{Aut}(A)$ være en venstrevirkning.

En n -cokæde er en afbildning

$$\alpha : \underbrace{G \times \cdots \times G}_n \longrightarrow A.$$

En 0-cokæde er blot et element i A . Mængden af n -cokæder betegnes $C^n(G; A)$. Det er en abelsk gruppe med punktvis kompositioner nedarvet fra A :

$$(\alpha + \beta)(g_1, \dots, g_n) = \alpha(g_1, \dots, g_n) + \beta(g_1, \dots, g_n).$$

Vi definerer en randoperator $\delta_n : C^n(G; A) \longrightarrow C^{n+1}(G; A)$ ved

$$\begin{aligned} (\delta_n \alpha)(g_1, \dots, g_{n+1}) &:= \sigma(g_1)\alpha(g_2, \dots, g_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \alpha(g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} \alpha(g_1, \dots, g_n). \end{aligned}$$

De første eksempler lyder

$$\begin{aligned}(\delta_0\alpha)(g) &= \sigma(g)\alpha - \alpha \\(\delta_1\alpha)(g_1, g_2) &= \sigma(g_1)\alpha(g_2) - \alpha(g_1g_2) + \alpha(g_1) \\(\delta_2\alpha)(g_1, g_2, g_3) &= \sigma(g_1)\alpha(g_2, g_3) + \alpha(g_1, g_2g_3) - \alpha(g_1g_2, g_3) - \alpha(g_1, g_2).\end{aligned}$$

Ved nogle udregninger kan man vise, at $\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$, dvs. at $(C^*(G; A), \delta_*)$ er et cokædekompleks. Vi definerer nu cohomologien af G med koefficienter i A :

$$H_\sigma^n(G; A) := \ker \delta_n / \text{im } \delta_n.$$

Lad os betragte et helt konkret tilfælde, nemlig gruppen den abelske gruppe $U(1)$ med den trivielle G -virkning, dvs. $g \cdot z = z$. I dette tilfælde ser vi fra (1), at faktoren for en projektiv repræsentation præcis er en 2-cocykel (bemærk at kompositionen i $U(1)$ er multiplikativt skrevet, mens den i A er additivt skrevet). Yderligere, hvis ω og ω' er 2 ækvivalente faktorer, så vil

$$\omega(g, h) = \omega'(g, h)\gamma(gh)^{-1}\gamma(g)\gamma(h),$$

dvs. ω og ω' adskiller sig med en co-rand. Mao. vil en projektiv repræsentation af G bestemme et element $[\omega]$ i $H^2(G; U(1))$. Denne afbildning, skal det understreges, er bestemt ikke bijektiv! Flere forskellige projektive repræsentationer kan sagtens bestemme samme cohomologiklasse.

Spørgsmålet melder sig: hvordan kan vi bestemme disse cohomologi-grupper? Som oftest, når man spørger til Liegrupper, ligger (en del af) svaret i gruppens Liealgebra, og det fører os til at introducere Liealgebra-cohomologi.

Lad \mathfrak{g} være en Liealgebra og V en endeligtdimensional venstre \mathfrak{g} -modul, (dvs. V er repræsentationsvektorrummet for en Liealgebra-repræsentation $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$). Vi definerer mængden af n -cokæder til at være

$$C^n(\mathfrak{g}; V) = \Lambda^n \mathfrak{g}^* \otimes V,$$

dvs. mængden af multilineære afbildninger $\omega : \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g} \rightarrow V$. Specielt vil altså $C^0(\mathfrak{g}, V) = V$.

Vi introducerer en rand-afbildning $\delta_n : C^n(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$ ved

$$\begin{aligned}(\delta_n\omega)(X_1, \dots, X_{n+1}) &:= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \rho(X_i)(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1})) \\ &+ \sum_{1 \leq j < k \leq n+1} (-1)^{j+k} \omega([X_j, X_k], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}),\end{aligned}$$

og igen tjekker man, at denne faktisk opfylder $\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$, så det giver mening at definere *Liealgebra-cohomologien*:

$$H_\rho^n(\mathfrak{g}; V) := \ker \delta_n / \text{im } \delta_{n-1}.$$

Eftersom alt her er lineært, er dette mere håndterbart end gruppe-cohomologien. Fx ser vi umiddelbart, at hvis $n > \dim \mathfrak{g}$ så vil $C^n(\mathfrak{g}; V) = 0$ og følgelig

$$H_\rho^n(\mathfrak{g}; V) = 0 \quad \text{for } n \geq \dim V.$$

Yderligere, hvis virkningen ρ er triviel, dvs. $\rho(X) = 0$ for alle $X \in \mathfrak{g}$, så gælder umiddelbart $H_0^n(\mathfrak{g}; V) = H_0^n(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) \otimes V$.

Et andet væsentligt resultat, som vi nævner uden bevis, er følgende:

Proposition 7. *Hvis \mathfrak{g} er en semisimpel Liealgebra, så vil $H_\rho^1(\mathfrak{g}; V) = 0$ og $H_\rho^2(\mathfrak{g}; V) = 0$.*

Prominente eksempler på semisimple Liealgebraer er $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ og $\mathfrak{su}(n)$ for $n \geq 2$, samt $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ og $\mathfrak{so}(n)$ for $n \geq 3$, så for alle disse vil den 2. cohomologigruppe være 0 (uanset koefficientrummet). Også \mathbb{R} (nødvendigvis udstyret med den trivielle Lieparentes) vil have triviel anden cohomologi eftersom dens dimension kun er 1.

Liealgebra-cohomologiens forbindelse til gruppe-cohomologien er følgende:

Proposition 8. *Lad G være en sammenhængende og enkeltsammenhængende Liegruppe og A en sammenhængende, abelsk Liegruppe, og $\sigma : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ en glat gruppevirkning. Hvis $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{a})$ er den inducerede Liealgebra-repræsentation så findes en gruppeisomorfi*

$$H_\sigma^2(G; A) \xrightarrow{\sim} H_\rho^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{a}).$$

$\text{SU}(n)$ for $n \geq 2$ og $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ for $n \geq 3$ er eksempler på enkeltsammenhængende Liegrupper med semisimple Liealgebraer, så ved at kombinere de to ovenstående propositioner, får vi altså at disse grupperes 2. cohomologigruppe er 0.

Så langt, så godt. Husk, målet er undersøge mulighederne for at finde en unitær repræsentation, der inducerer den givne projektive repræsentation. For at komme videre i denne efterforskning, er det nødvendigt, at introducere endnu et begreb, nært relateret til den 2. cohomologigruppe, nemlig gruppeudvidelser.

Definition 9 (Gruppeudvidelse). *Lad G og K være grupper (uden yderligere struktur). En udvidelse af G med gruppen K er en gruppe \tilde{G} , der passer ind i en kort-eksakt følge:*

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow 1.$$

En udvidelse kaldes triviel, såfremt den eksakte følger splitter, dvs. hvis der findes en gruppehomomorfi $s : G \rightarrow \tilde{G}$, så $\varphi \circ s = \text{id}_G$.

Hvis grupperne K , G og \tilde{G} er Liegrupper og homomorfierne er Liegruppe-homomorfier, vil vi kalde udvidelsen for en Liegruppe-udvidelse.

En central udvidelse er en udvidelse om hvilken der gælder, at $i(K)$ er indeholdt i centret for \tilde{G} , dvs. hvor ethvert element af $i(K)$ kommuterer med alle elementer af \tilde{G} . Specielt må K selv være abelsk.

Hvis \tilde{G} er en udvidelse af G , gælder der altså $G \cong \tilde{G}/K$, hvis vi opfatter K som en undergruppe af \tilde{G} . For en triviel udvidelse gælder der, at $\tilde{G} \cong G \times K$, deraf betegnelsen *triviel*. Hvis grupperne er Liegrupper, vil denne udvidelse nødvendigvis være en Ligruppe-udvidelse. Der gælder dog ikke nødvendigvis, at alle udvidelser af Liegrupper selv er Liegruppe-udvidelser.

For at kunne sætte udvidelser i forbindelse med cohomologi vil vi anlægge følgende betragtning, nemlig \tilde{G} som værende totalrummet for et principalt K -bundt over G . BLA BLA BLA. Vi har dermed vist

Proposition 10. *Der er en bijektiv forbindelse mellem $H_0^2(G; A)$ og centrale udvidelser af G med den abelske gruppe A .*

Hvis således $H_0^2(G; A) = 0$, så findes der altså kun én central udvidelse af G med A , nemlig den trivielle. Bemærk dog følgende: hvis G er en enkeltssammenhængende Liegruppe med $H_0^2(G; A) = 0$, så vil også $H_0^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{a}) = 0$, hvor \mathfrak{g} -virkningen på \mathfrak{a} er triviel. Men eftersom dette er lig $H_0^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) \otimes \mathfrak{a}$ må vi have $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$. Men dermed vil af samme formel $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}) = 0$ for alle abelske \mathfrak{b} , og følgelig $H_0^2(G; B) = 0$ for alle abelske grupper B . Sagt i andre ord: hvis der findes en gruppe A , om hvilken der gælder, at den eneste centrale A -udvidelse af G er den trivielle, så vil dette gælde for alle grupper B .

Definition 11 (Liealgebra-udvidelse). *Lad \mathfrak{g} og \mathfrak{h} være Liealgebraer. En udvidelse af \mathfrak{g} med Liealgebraen \mathfrak{h} er en Liealgebra $\tilde{\mathfrak{g}}$, der passer ind i en kort-eksakt følge:*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0.$$

En udvidelse kaldes triviel, såfremt den eksakte følger splitter, dvs. hvis der findes en Liealgebra-homomorfi $s : \mathfrak{g} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$, så $\varphi \circ s = \text{id}_{\mathfrak{g}}$.

En central udvidelse er en udvidelse om hvilken der gælder, at $i(\mathfrak{h})$ er indeholdt i centret for $\tilde{\mathfrak{g}}$, dvs. hvor Lieparentesen af element af $i(\mathfrak{h})$ og et vilkårligt element $\tilde{\mathfrak{g}}$ er 0, specielt er \mathfrak{h} en abelsk Liealgebra.

Det er klart, at en Liegruppe-udvidelse nødvendigvis vil inducere en Liealgebra-udvidelse. Som i Liegruppe-tilfældet, kan man vise, at der er en bijektiv korrespondance mellem $H_0^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{h})$ og centrale udvidelser af \mathfrak{g} med \mathfrak{h} . Endelig, hvis $\tilde{\mathfrak{g}}$ er en udvidelse af \mathfrak{g} med \mathfrak{h} , så vil $\tilde{\mathfrak{g}}$ være isomorf med $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ som vektorrum, dog ikke en kanonisk isomorfi, og slet ikke en Liealgebra-isomorfi.

Nu er det vist på tide, at få knyttet alt det her sammen med projektive repræsentationer. Som nævnt, så vil et valg af afbildning $\pi : G \longrightarrow U(\mathcal{H})$ inducere en faktor $\omega : G \times G \longrightarrow U(1)$, der, som vi har set, repræsenterer en klasse i $H_0^2(G; U(1))$ og følgelig altså en central udvidelse af G med $U(1)$. Det er oven i købet muligt at vælge π på en sådan måde, at ω er glat og π er kontinuert, så det vil vi gøre. Vi kan konstruere den centrale udvidelse helt eksplicit som angivet ovenfor, nemlig ved $\tilde{G} = G \times_{\omega} U(1)$, der som mængde betragtet blot er produktet $G \times U(1)$ med multiplikationen

$$(g, z)(h, w) = (gh, \omega(g, h)zw).$$

Eftersom ω er glat, vil \tilde{G} være en Liegruppe. Afbildningerne $U(1) \longrightarrow \tilde{G}$ og $\tilde{G} \longrightarrow G$ er de åbenlyse: indlejring på anden komponent og projektion ned på første. De er selvfølgelig Liegruppe-homomorfier, og giver dermed en central udvidelse af G med $U(1)$.

Nu er vi inde ved kernen, for på denne udvidelse kan vi definere en unitær repræsentation, der på en naturlig måde inducerer den projektive repræsentation. Definér nemlig $\kappa : G \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{H})$ ved

$$\kappa(g, z) := \bar{z}\pi(g).$$

Den er en gruppehomomorfi, (idet vi husker at $\pi(gh) = \omega(g, h)\pi(g)\pi(h)$):

$$\begin{aligned}\kappa((g, z)(h, w)) &= \kappa(gh, \omega(g, h)zw) = \overline{\omega(g, h)zw}\pi(gh) \\ &= \overline{zw}\pi(g)\pi(h) = \kappa(g, z)\kappa(h, w),\end{aligned}$$

og da π er kontinuert, er κ også kontinuert og dermed en unitær repræsentation. Vi har dermed vist

Sætning 12. *Lad $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$ være en projektiv repræsentation af en sammenhængende, enkeltsammenhængende gruppe G , da findes en central $U(1)$ -udvidelse \tilde{G} og en unitær repræsentation κ heraf, der inducerer ρ i den forstand at $\rho(g) = \widehat{\kappa}(g, z)$.*

Så svaret på vores oprindelige spørgsmål er altså: Det er ikke altid muligt at finde et løft af ρ til en unitær repræsentation af G , men det er altid muligt (for det fald at G er enkeltsammenhængende) at finde en udvidelse af G og et løft af ρ til en unitær repræsentation af denne gruppe.

I det tilfælde, hvor ovenstående udvidelse er triviell, så findes der altså en Liegruppe-homomorfi $s : G \longrightarrow \tilde{G}$. Sættningen $\kappa \circ s$ er en unitær repræsentation af G , og den er klart et løft af ρ . Vi får altså umiddelbart:

Korollar 13. *Lad G være en enkeltsammenhængende Liegruppe, om hvilken der gælder, at $H_0^2(G, U(1)) = 0$. Da vil enhver projektiv repræsentation af G løfte til en unitær repræsentation af G .*

Ovenstående krav vil fx være opfyldt for grupperne $SU(n)$ og $SL(n, \mathbb{C})$ for $n \geq 2$ hhv. $n \geq 3$ (de er semisimple som nævnt ovenfor) samt for \mathbb{R} . Specielt gælder altså, at enhver projektiv repræsentation af \mathbb{R} løfter til en unitær repræsentation af \mathbb{R} , altså til en stærkt kontinuert unitær 1-parametergruppe. Følgende er således veldefineret

Definition 14 (Ladning). *Lad κ være en projektiv repræsentation af \mathbb{R} på \mathcal{H} . Vi definerer generatoren for κ til at være generatoren for den løftede unitære repræsentation af \mathbb{R} .*

Hvis κ er en kontinuert tidssymmetri, så kaldes den tilhørende generator for en ladning.

Generatorer og dermed også ladninger er altså selvadjungerede operatorer på Hilbertrummet \mathcal{H} , og kan altså opfattes som observable. Fra klassisk mekanik kender vi Noethers sætning, der kort fortalt siger, at til en kontinuert symmetri hører en bevaret størrelse. I denne kontekst spiller ladningen altså rollen som bevaret størrelse. Følgelig kaldes den også ofte for *Noether ladningen*. Hvis $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$ er en projektiv repræsentation, og $\kappa : \tilde{G} \longrightarrow U(\mathcal{H})$ er et unitært løft. Hvis $X \neq 0$ er et element i $i_*(\mathfrak{u}(1)) \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}$, så vil den unitære gruppe $t \longmapsto \kappa(\exp(tX))$ have en generator, som ikke er at finde blandt de observable, der er genereret af ρ . Eftersom X ligger i centret for $\tilde{\mathfrak{g}}$ og dermed kommuterer med alt, kalder vi denne generator for en *central ladning*. Eksistensen af centrale ladninger er således prisen vi må betale for at kunne løfte ρ til en unitær repræsentation.

For et givet kvantesystem vil man som fysiker oftest være interesseret i, at finde den størst mulige symmetrigruppe af dette system, mao. vi ønsker altså at finde en gruppe G og en projektiv repræsentation $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$ sådan at samtlige observable fremkommer som generatorer for 1-parameter undergrupper af den projektive repræsentation. Eksempelvis vil vi i klassisk kvantemekanik kræve, at samtlige Galileitransformationer svarer til symmetrier af kvantesystemet, mao. vi ønsker altså en projektiv repræsentation af Galileigruppen på det givne Hilbertrum. Tidsudviklingen vil da være den unitære 1-parametergruppe genereret af tidsforskydninger. Tilsvarende søger vi i relativistisk kvantemekanik projektive repræsentationer af Poincarégruppen. Forskellige projektive repræsentationer vil således svare til forskellige typer af partikler: elektroner vil svare til én projektiv repræsentation, protoner til en anden osv. Det er således interessant at klassificere projektive repræsentationer af Galileigruppen og Poincarégruppen. Hvis man yderligere vil inddrage de fundamentale vekselvirkninger, må man udvide sin gruppe med en relevant gaugegruppe, fx $U(1)$, $SU(2)$ eller $SU(3)$ eller et produkt af disse. Det giver selvfølgelig flere symmetrier, og dermed mulighed for en finere klassifikation af elementarpartiklerne. Det vil vi ikke befatte os med her.

Lad os i stedet prøve at belyse betydningen af irreducibilitet af den projektive repræsentation ρ af G . Hvis $\kappa : \tilde{G} \longrightarrow U(\mathcal{H})$ er et unitært løft af ρ af udvidelsen \tilde{G} , så er det klart, at ρ er irreducibel, hvis og kun hvis κ er irreducibel. Vi noterer nu følgende:

Lemma 15. *Lad $\pi : \tilde{G} \longrightarrow U(\mathcal{H})$ være en unitær repræsentation af en sammenhængende Lie gruppe \tilde{G} på \mathcal{H} . Et afsluttet underrum $V \subseteq \mathcal{H}$ er π -invariant hvis og kun hvis der for alle $X \in \mathfrak{g}$ gælder, at $\pi_*(X)$ ² afbilder $\mathfrak{D}(\pi_*(X)) \cap V$ ind i V .*

PROOF. Hvis V er et π -invariant underrum, så vil $\pi|_V : \tilde{G} \longrightarrow U(V)$ være en unitær repræsentation af \tilde{G} på V . Givet $X \in \mathfrak{g}$, vil generatoren for den unitære 1-parametergruppe $t \longmapsto \pi|_V(\exp(tX))$ være defineret på $\mathfrak{D}(\pi_*(X)) \cap V$ og afbilder selvfølgelig ind i V .

Omvendt, hvis $\pi_*(X)$ afbilder $\mathfrak{D}(\pi_*(X)) \cap V$ ind i V for alle X , så vil $\pi_*(X)|_V$ være selvdjungeret som operator på V , dvs.

$$\pi|_V(\exp tX) = e^{t\pi_*(X)|_V}$$

afbilder V på V , og eftersom G er sammenhængende, kan ethvert element i \tilde{G} skrives på formen $\exp(X)$ for et passende $X \in \mathfrak{g}$. \square

Mao., hvis den projektive repræsentation ρ er reducibel, så findes altså ikke-trivielle underrum af \mathcal{H} , der er invariante under alle de observable. Hvis \mathcal{H}_i for $i = 1, 2$ er sådanne underrum, A er en vilkårlig observabel (genereret af den projektive repræsentation), og $\psi_i \in \mathcal{H}_i$, hvor ψ_2 er valgt i domænet for A , så vil

$$\langle \psi_1, A\psi_2 \rangle = 0$$

²Her betegner π_* den inducerede repræsentation af Lie algebraen \mathfrak{g} . For $X \in \mathfrak{g}$ er $\pi_*(X)$ defineret til at være generatoren for den unitære 1-parametergruppe $t \longmapsto \pi(\exp(tX))$.

Fysikere siger så, at tilstandene ψ_1 og ψ_2 og dermed underrommene \mathcal{H}_1 og \mathcal{H}_2 er separeret af *superudvalgsregler*.