

Supplerende noter til 'An Introduction to Symplectic Geometry'

Thomas Hjortgaard Danielsen

1 Komplekse strukturer

Definition 1.1. *Et symplektisk vektorrum (V, ω) er et reelt vektorrum V udstyret med en ikke-degenereret 2-form ω .*

Man kan vise, at et symplektisk vektorrum altid har lige dimension, og at der findes en basis $(A_1, B_1, \dots, A_n, B_n)$ for V med tilhørende dualbasis $(\alpha^1, \beta^1, \dots, \alpha^n, \beta^n)$, så

$$\omega = \sum_{i=1}^n \alpha^i \wedge \beta^i.$$

Lemma 1.2. *Lad V være $2n$ -dimensional vektorrum og $\omega \in \Lambda^2(V^*)$. Da er ω ikke-degenereret, hvis og kun hvis $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega \neq 0$.*

BEVIS. Antag først, at ω er ikke-degenereret. Som nævnt, kan vi finde en basis $(A_1, B_1, \dots, A_n, B_n)$ med dualbasis $(\alpha^1, \beta^1, \dots, \alpha^n, \beta^n)$, så $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha^i \wedge \beta^i$. Det er nu nemt at se, at vi pga. antisymmetri af wedge-produktet får

$$\omega^n = c \alpha^1 \wedge \beta^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n \wedge \beta^n,$$

hvor c er -1 i en eller anden potens; hvilken er underordnet, det afgørende er, at $c \neq 0$. Vi ser nu, at

$$\omega^n(A_1, B_1, \dots, A_n, B_n) = c \det I_{2n} = c \neq 0.$$

Ergo $\omega^n \neq 0$.

Den anden vej viser vi ved kontraposition, så vi antager ω degenereret, og viser $\omega = 0$. Der findes således et $0 \neq e_1 \in V$, så $\omega(e_1, v) = 0$ for alle $v \in V$, dvs. covektoren $i_{e_1}\omega = 0$. Vi ser nu

$$i_{e_1}(\omega \wedge \omega) = (i_{e_1}\omega) \wedge \omega + \omega \wedge (i_{e_1}\omega) = 0,$$

og pr. induktion, at $i_{e_1}\omega^n = 0$. Udvid nu $\{e_1\}$ til en basis for V , $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$, da vil

$$\omega^n(e_1, \dots, e_{2n}) = (i_{e_1}\omega^n)(e_2, \dots, e_{2n}) = 0.$$

Heraf følger umiddelbart, at $\omega^n = 0$. □

En lineær afbildning $F : (V, \omega) \rightarrow (W, \eta)$ mellem symplektiske vektorrum kaldes en *symplektomorfi*, hvis $\eta(Fv, Fw) = \omega(v, w)$ for alle $v, w \in V$. Mængden af symplektiske endomorfier over et symplektisk vektorrum (V, ω) betegnes $\text{Sp}(V, \omega)$

Proposition 1.3. *Lad (V, ω) være et $2n$ -dimensionalt symplektisk vektorrum. For alle $F \in \text{Sp}(V, \omega)$ gælder, at $\det F = 1$.*

BEVIS. En symplektisk form lader pr. definition ω invariant. Vi vil først vise at F også lader ω^n (som vi lige har vist var forskellig fra 0) invariant, dvs.

$$\omega^n(Fv_1, \dots, Fv_{2n}) = \omega^n(v_1, \dots, v_{2n}),$$

Vælg en basis, så $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha^i \wedge \beta^i$. Så vil $\omega^n = \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n \wedge \beta^1 \wedge \dots \wedge \beta^n$. Der gælder altid

$$\begin{aligned} \omega^n(Fv_1, \dots, Fv_{2n}) &= (\alpha^1 \wedge \dots \wedge \beta^n)(Fv_1, \dots, Fv_{2n}) \\ &= (\det F)(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \beta^n)(v_1, \dots, v_{2n}) = (\det F)\omega^n(v_1, \dots, v_{2n}) \end{aligned}$$

så hvis desuden $\omega^n(Fv_1, \dots, Fv_{2n}) = \omega^n(v_1, \dots, v_{2n})$, ser vi, at $\det F = 1$.

Lad nu $F \in \text{Sp}(V)$. Vi vil vise at F lader $\omega \wedge \omega$ invariant. Herefter følger det generelle resultat af induktion. Vi bruger simpelthen definitionen af ω som det alternerende tensorprodukt:

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \omega)(Fv_1, Fv_2, Fv_3, Fv_4) &= \sum_{\sigma \in S_4} \text{sign}(\sigma)(\omega \otimes \omega)(Fv_{\sigma(1)}, Fv_{\sigma(2)}, Fv_{\sigma(3)}, Fv_{\sigma(4)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_4} \text{sign}(\sigma)\omega(Fv_{\sigma(1)}, Fv_{\sigma(2)})\omega(Fv_{\sigma(3)}, Fv_{\sigma(4)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_4} \text{sign}(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)})\omega(v_{\sigma(3)}, v_{\sigma(4)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_4} \text{sign}(\sigma)(\omega \otimes \omega)(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}, v_{\sigma(4)}) \\ &= (\omega \wedge \omega)(v_1, v_2, v_3, v_4) \end{aligned}$$

Ergo lader F $\omega \wedge \omega$ invariant, og pr. induktion også ω^n . □

Definition 1.4. *Lad V være et reelt n -dimensionalt vektorrum. $J \in \text{Aut}(V)$ kaldes en kompleks struktur på V , såfremt $J^2 = -\text{id}_V$.*

Hvis (V, ω) er et symplektisk vektorrum, siges J at være kompatibel med ω , hvis $J \in \text{Sp}(V)$, dvs. hvis $\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w)$.

Vi kan opfatte (V, J) som et komplekst vektorrum, idet vi definerer skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$ ved $(a + ib)v = av + bJv$.

Lad os herefter betragte kompleksifikationen $V_c := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong V \oplus iV$ af V , hvor vi opfatter et element $(v, iw) \in V_c$ som summen $v + iw$. Læg mærke til at V_c har kompleks dimension n , og dermed reel dimension $2n$. Hvis V er udstyret med en kompleks struktur kan vi udvide denne til også at omfatte V_c , simpelthen ved at sætte

$$J(v + iw) = Jv + iJw,$$

og også på V_c gælder $J^2 = -\text{id}_V$:

$$J^2(v + iw) = J^2v + iJ^2w = -v - iw = -(v + iw).$$

Antag nu, at $\lambda \in \mathbb{C}$ er en egenverdi for J , og $v \in V_c$ en egenvektor herfor

$$-v = J^2v = \lambda^2v,$$

dvs. $\lambda^2 = -1$, så $\lambda = \pm i$. Lad $V_c^+ := \ker(I + iJ)$ og $V_c^- := \ker(I - iJ)$ betegne egenrummene for hhv. i og $-i$. At både i og $-i$ begge er egenverdier, er en konsekvens af følgende:

Proposition 1.5. *Der gælder*

- 1) $V_c^\pm = \text{im}(I \mp iJ)$,
- 2) $V_c = V_c^+ \oplus V_c^-$,
- 3) $\dim_{\mathbb{R}} V_c^\pm = n$.

BEVIS. For at vise 1) skal vi vise $\ker(I + iJ) = \text{im}(I - iJ)$. Først ser vi

$$(I + iJ)(I - iJ) = I^2 + iJ - iJ - i^2 J^2 = 0,$$

hvilket giver $\text{im}(I - iJ) \subseteq \ker(I + iJ)$. Omvendt, hvis $v \in \ker(I + iJ)$, så vil

$$(I - iJ)\left(\frac{1}{2}v\right) = (I - iJ)\left(\frac{1}{2}v\right) + (I + iJ)\left(\frac{1}{2}v\right) = v,$$

dvs. $v \in \text{im}(I - iJ)$. Dermed $\ker(I + iJ) = \text{im}(I - iJ)$.

For 2) ser vi

$$v = (I + iJ)\left(\frac{1}{2}v\right) + (I - iJ)\left(\frac{1}{2}v\right)$$

og kan derfor skrive v som sum af elementer fra $\text{im}(I + iJ) = V_c^-$ og $\text{im}(I - iJ) = V_c^+$.

For at vise 3) bemærker vi først, at $V_c^+ \cap V_c^- = \{0\}$, thi hvis $v \in V_c^+ \cap V_c^-$, så vil $v = iJv$ og $v = -iJv$, dvs. $v = -v$, så $v = 0$. Lad nu $v = v_1 + iv_2 \in V_c$. Vi definerer den konjugerede \bar{v} af v til at være $\bar{v} = v_1 - iv_2$. Afbildningen er tydeligvis lineær og injektiv. Lad os nu restringere den til V_c^+ . Vi ser for $v = v_1 + iv_2 \in V_c^+$, at

$$J\bar{v} = J(v_1 - iv_2)Jv_1 - iJv_2 = \overline{Jv} = \overline{iv} = -i\bar{v},$$

så $\bar{v} \in V_c^-$. Da konjugering også som afbildning $V_c^+ \rightarrow V_c^-$ er injektiv, følger, at $\dim_{\mathbb{R}} V_c^+ \leq \dim_{\mathbb{R}} V_c^-$. Tilsvarende ses, at konjugering afbilder V_c^- injektivt på V_c^+ , hvorfor $\dim_{\mathbb{R}} V_c^- \leq \dim_{\mathbb{R}} V_c^+$. Ergo har V_c^+ og V_c^- samme dimension. Men da der ydermere gælder $V_c^+ \oplus V_c^- = V_c$ og $V_c^+ \cap V_c^- = \{0\}$, følger, at $\dim_{\mathbb{R}} V_c^\pm = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} V_c = n$. \square

Lad nu (V, ω, J) være et symplektisk vektorrum med en ω -kompatibel kompleks struktur J , og definer en bilinear afbildning $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ved

$$g(v, w) = \omega(v, Jw). \tag{1.1}$$

Den er klart bilinear, og den er symmetrisk, idet

$$g(v, w) = \omega(v, Jw) = \omega(Jv, J^2w) = -\omega(Jv, w) = \omega(w, Jv) = g(w, v).$$

Definition 1.6. *Lad (V, ω, J) være et symplektisk vektorrum med en ω -kompatibel kompleks struktur. En bilinear afbildning defineret som i (1.1) kaldes en pseudo-hermittisk metrik på V . Såfremt der for alle $0 \neq v \in V$ gælder $g(v, v) > 0$, kaldes g en hermittisk metrik på V . En tripel (V, ω, J) , hvor den tilhørende metrik g er hermittisk, kaldes et Kähler-vektorrum.*

Eksempel 1.7. Lad os tage det simplest mulige eksempel: \mathbb{R}^{2n} udstyret med det sædvanlige euklidiske indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, og med den symplektiske form ω givet ved $\omega(v, w) = v^t J_n w$, hvor J_n er $2n \times 2n$ -matricen

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Påstanden er, at $J = -J_n$ er en ω -kompatibel kompleks struktur. Sempel matrixregning afslører, at $J_n^2 = -I_{2n}$, så også $(-J_n)^2 = -I_{2n}$, så J er en kompleks struktur. For at vise, at J er ω -kompatibel, bemærk først, at $J^t = -J = J_n$, og derfor:

$$\omega(Jv, Jw) = (Jv)^t J_n (Jw) = v^t J^t J_n Jw = v^t J_n w = \omega(v, w).$$

Ergo er J altså ω -kompatibel. Da desuden

$$\omega(v, Jv) = v^t J_n(Jv) = v^t v$$

er det sædvanlige indre produkt på \mathbb{R}^{2n} , vil $\omega(v, Jv) > 0$ for $v \neq 0$, så $(\mathbb{R}^{2n}, \omega, J)$ er et Kähler-vektorum.

$v = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ i \mathbb{R}^{2n} kan vi identificere med $(a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n)$ i \mathbb{C}^n . Vi ser, at

$$Jv = (-b_1, \dots, -b_n, a_1, \dots, a_n),$$

som vi straks identificerer med $(ia_1 - b_1, \dots, ia_n - b_n) = i(a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n)$. Dvs. J virker som multiplikation med den imaginære enhed i .

Givet et symplektisk vektorrum (V, ω) , kan vi da altid finde en kompleks struktur, der gør V til et Kähler-vektorum?

Proposition 1.8. *Lad (V, ω) være et symplektisk vektorrum. Der findes da en kompleks struktur J , kompatibel med ω , så $\omega(v, Jv) > 0$ for $v \neq 0$, dvs. så (V, ω, J) er et Kähler-vektorum.*

BEVIS. Lad γ være et sædvanligt reelt indre produkt på V og definer en lineær afbildning $A : V \rightarrow V$ ved

$$\gamma(Av, w) = \omega(v, w)$$

(angivelsen af Av 's indre produkt med alle $w \in V$ specificerer entydigt Av). Vi ser, at

$$\gamma(Av, w) = \omega(v, w) = -\omega(w, v) = -\gamma(Aw, v) = -\gamma(v, Aw),$$

og

$$\gamma(A^2v, w) = -\gamma(Av, Aw) = \gamma(v, A^2),$$

så A^2 er selvadjungeret, mht. γ . Specielt er A^2 altså diagonaliserbar. Alle A^2 's egenverdier må være negative, thi hvis $v \neq 0$, så vil

$$\gamma(A^2v, v) = -\gamma(Av, Av) < 0$$

(thi γ er jo positiv definit). Men hvis v er egenvektor for A^2 , vil $\gamma(A^2v, v) = \lambda\gamma(v, v)$. Da dette er negativt, må $\lambda < 0$. Lad $-\lambda_1^2, \dots, -\lambda_{2n}^2$ betegne A^2 's egenverdier, hvor λ_i 'erne er reelle tal, og lad $D = (e_1, \dots, e_{2n})$ være en basis, der diagonaliserer A^2 . Lad nu $B : V \rightarrow V$ være afbildningen, der i basen D har matricen $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$. Der gælder da, at $B^2 = -A^2$. Da alle egenverdierne $\lambda_i \neq 0$ er B invertibel, så sæt $J := AB^{-1}$. Påstanden er, at dette er den søgte ω -kompatible komplekse struktur på V .

Bemærk først, at der gælder $AB^{-1} = B^{-1}A$, så vi har

$$J^2 = (AB^{-1})(B^{-1}A) = A(B^2)^{-1}A = -A(A^2)^{-1}A = -I,$$

så J er en kompleks struktur på V . At J er ω -kompatibel, ses af, at

$$\begin{aligned} \omega(Jv, Jw) &= \gamma(AJv, Jw) = \gamma(A^2B^{-1}v, AB^{-1}w) = -\gamma(AB^{-1}, A^2B^{-1}w) \\ &= \omega(B^{-1}v, Bw) = \gamma(AB^{-1}v, Bw) = \gamma(BAB^{-1}v, w) \\ &= \gamma(BB^{-1}Av, w) = \gamma(Av, w) = \omega(v, w). \end{aligned}$$

I tredje lighedstegn har vi benyttet, at A er skæv-adjungeret, i fjerde lighedstegn, at $A^2 = -B^2$ og i sjette, at B er selvadjungeret.

Vi mangler nu blot at vise, at den associerede metrik er hermittisk. Sæt $g(v, w) = \omega(v, Jw)$:

$$\begin{aligned} g(v, v) &= \omega(v, Jv) = \gamma(Av, Jv) = -\gamma(v, AJv) = -\gamma(v, A^2B^{-1}v) \\ &= \gamma(v, Bv), \end{aligned}$$

og $\gamma(v, Bv) > 0$, da alle B 's egenverdier er positive. □

Vi vil nu ved hjælp af ovenstående bevise et ikke-trivielt resultat om relationen mellem unitære, ortogonale og symplektiske grupper.

Lad (V, J) være et vektorrum med kompleks struktur. Som nævnt kan vi opfatte V som et komplekst vektorrum, og det giver derfor mening at tale om hermiteske indre produkter på V , dvs. symmetriske, positivt definte sesquilineære afbildninger $H : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$.

Lemma 1.9. *Lad (V, ω, J) være et Kähler-vektorrum og g den tilhørende metrik. Da er $H := g + i\omega$ et hermitisk indre produkt på V .*

BEVIS. H er konjugeret symmetrisk

$$\begin{aligned} H(v, w) &= \omega(v, Jw) + i\omega(v, w) = -\omega(Jw, v) - i\omega(w, v) = -\omega(J^2w, Jv) - i\omega(w, v) \\ &= \omega(w, Jv) - i\omega(w, v) = \overline{H(w, v)}. \end{aligned}$$

Den er \mathbb{C} -lineær i anden variabel: Det er klart, at den er reelt lineær i anden variabel, så

$$H(v, (a + ib)w) = H(v, aw + bJw) = aH(v, w) + bH(v, Jw).$$

Lad os se på $H(v, Jw)$

$$H(v, Jw) = \omega(v, J^2w) + i\omega(v, Jw) = i\omega(v, Jw) - \omega(v, w) = iH(v, w).$$

Dermed har vi $H(v, (a + ib)w) = aH(v, w) + ibH(v, w) = (a + ib)H(v, w)$, så H er \mathbb{C} -lineær i anden variabel. Dette, og det at H er konjugeret symmetrisk, giver så, at H er konjugeret lineær i første variabel.

Den er positiv definit, thi antag $v \neq 0$:

$$H(v, v) = \omega(v, Jv) - i\omega(v, v) = \omega(v, Jv) \neq 0. \quad \square$$

Eksempel 1.10. Lad som i det tidligere eksempel \mathbb{R}^{2n} være udstyret med den komplekse struktur $-J_n$, der var kompatibel med den naturlige symplektiske form $\omega \cong J_n$. Vi vil vise, at $H(v, w) = \omega(v, Jw) + i\omega(v, w)$ blot er det sædvanlige komplekse indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ på \mathbb{C}^n . Først identificerer vi $v = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ og $w = (c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n)$ i \mathbb{R}^{2n} med $(a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n)$ og $(c_1 + id_1, \dots, c_n + id_n)$ i \mathbb{C}^n . Vi ser da

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^n (a_j + ib_j)(c_j - id_j) = \sum_{j=1}^n a_j c_j - i \sum_{j=1}^n a_j d_j + i \sum_{j=1}^n b_j c_j + \sum_{j=1}^n b_j d_j.$$

På den anden side ser vi, at

$$\omega(v, Jw) = v^t J_n (-J_n) w = v^t w = \sum_{j=1}^n a_j c_j + \sum_{j=1}^n b_j d_j$$

og at

$$i\omega(v, w) = iv^t (-J_n) w = -i \sum_{j=1}^n a_j d_j + i \sum_{j=1}^n b_j c_j.$$

Vi ser således, at $\langle v, w \rangle = \omega(v, Jw) + i\omega(v, w)$.

Definition 1.11. *Lad (V, g) være et reelt vektorrum med reelt indre produkt g . Ved den ortogonale gruppe $O(V, g)$ forstås mængden af lineære afbildninger $\Phi : V \rightarrow V$, så $g(\Phi v, \Phi w) = g(v, w)$. Tilsvarende, hvis (V, J, H) er et komplekst vektorrum med et hermitisk indre produkt H , defineres den unitære gruppe $U(V, H)$ til at være de kompleks-lineære afbildninger $\Phi : V \rightarrow V$, så $H(\Phi v, \Phi w) = H(v, w)$.*

Proposition 1.12. *Lad (V, ω, J) være et Kähler-vektorrum og g den tilhørende hermiteske metrik. Sæt $H := g + i\omega$. Da gælder*

$$U(V, H) = O(V, g) \cap \text{Sp}(V, \omega).$$

BEVIS. Da V er et Kähler-vektorrum, er H et hermittisk indre produkt, jvf. ovenstående lemma. g er H 's realdel og ω dens imaginærdel (bortset fra et fortegn). Hvis nu $\Phi \in U(V, H)$, da vil $H(\Phi v, \Phi w) = H(v, w)$. Dette gælder hvis og kun hvis der gælder en tilsvarende relation for real- og imaginærdelene, dvs. det gælder hvis og kun hvis

$$g(\Phi v, \Phi w) = g(v, w) \quad \text{og} \quad \omega(\Phi v, \Phi w) = \omega(v, w).$$

Heraf udleder vi, at $\Phi \in U(V, H)$ hvis og kun hvis $\Phi \in O(V, g) \cap \text{Sp}(V, \omega)$. \square

Korollar 1.13. *Der gælder $U(n) = \text{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap O(2n)$.*

BEVIS. Vi har fra et tidligere eksempel udstyret \mathbb{R}^{2n} med symplektisk form ω og kompleks struktur så det blev til et Kähler-vektorrum. Ydermere gjaldt der, at $H := g + i\omega$, hvor g er den tilhørende metrik, faktisk er det sædvanlige hermiteske indre produkt på \mathbb{C}^n . Vi har nu, at $U(\mathbb{R}^{2n}, J, H) = U(n)$, at $\text{Sp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega) = \text{Sp}_n(\mathbb{R})$ og $O(\mathbb{R}^{2n}, g) = O(2n)$. Denne observation sammen med Proposition 1.12 giver resultatet. \square

2 Symplektiske mangfoldigheder

En 2-form ω på en mangfoldighed siges at være *ikke-degenereret*, hvis for alle $p \in M$ $\omega_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ er ikke degenereret.

Definition 2.1. *En symplektisk mangfoldighed (M, ω) er en differentiabel mangfoldighed M udstyret med en lukket, ikke-degenereret 2-form ω .*

En diffeomorfi $F : (M, \omega) \rightarrow (M', \omega')$ mellem symplektiske mangfoldigheder kaldes en symplektomorfi, hvis $F^\omega' = \omega$, og hvis en sådan symplektomorfi findes, siges mangfoldighederne at være symplektomorfe.*

Da således $(T_p M, \omega_p)$ er et symplektisk vektorrum, er dimensionen $2n$, dvs. symplektiske mangfoldigheder har altid lige dimension.

Da ω_p er ikke degenereret, følger at $\omega_p^n \neq 0$, og dermed, at $\omega^n \neq 0$. Vi har altså en orienteringsform på M , dvs. enhver symplektisk mangfoldighed er orienterbar. Deraf følger umiddelbart, at fx Möbius-båndet, der ellers er en 2-dimensional mangfoldighed, umuligt kan udstyres med en symplektisk struktur.

Definition 2.2. *Lad M være en reel $2n$ -dimensional mangfoldighed. En næsten-kompleks struktur på M er en bundtisomorfi $J : TM \rightarrow TM$, der opfylder, at $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ er en kompleks struktur på $T_p M$, dvs. $J_p^2 = -\text{id}_{T_p M}$. En mangfoldighed med en næsten-kompleks struktur, kaldes en næsten-kompleks mangfoldighed*

Hvis (M, ω) er en symplektisk mangfoldighed, siges en næsten-kompleks struktur på M at være ω -kompatibel, hvis der for alle $p \in M$ gælder

$$\omega_p(J_p X_p, J_p Y_p) = \omega(X_p, Y_p).$$

for $X_p, Y_p \in T_p M$.

Hvis (M, J) er en næsten-kompleks mangfoldighed, og ω en ikke-degenereret 2-form på M , således at J er ω -kompatibel, og som for $0 \neq X_p \in T_p M$ opfylder $\omega_p(X_p, J_p X_p) > 0$ giver anledning til en Riemannsk metrik. Dette verificeres nemt ved hjælp af resultaterne fra afsnit 1. J vil være kompatibel med g , dvs. $g(JX, JY) = g(X, Y)$. Omvendt givet

en Riemansk metrik g , så J er g -kompatibel, vil $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ være en ikke-degenereret 2-form, så J er ω -kompatibel, og $\omega_p(X_p, J_p X_p) > 0$ for $X_p \neq 0$. I begge de to tilfælde (der jo altså er ækvivalente) kaldes (ω, J, g) for en *kompatibel tripel*.

Lad (M, J) være en næsten-kompleks mangfoldighed. Vi definerer *Nijenhuis-tensoren* $N_J : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$ ved følgende

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y].$$

For at vise, at det virkelig er et (2,1)-tensorfelt, skal vi vise, at den er $C^\infty(M)$ -bilineær: at den er additiv er nemt nok. Lad $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} N_J(fX, Y) &= [f(JX), JY] - J[f(JX), Y] - J[fX, JY] - [fX, Y] \\ &= f[JX, JY] - (JXf)JY - fJ[JX, Y] + (JXf)JY \\ &\quad - fJ[X, JY] + (Xf)J^2Y - f[X, Y] + (Xf)Y \\ &= f([JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]) = fN_J(X, Y). \end{aligned}$$

Det samme for Y -variablen.

Definition 2.3. *En næsten-kompleks struktur J på M kaldes integrabel, eller en kompleks struktur på M , såfremt $N_J \equiv 0$. Mangfoldigheden M kaldes da en kompleks mangfoldighed.*

Der er imidlertid også en anden, og måske mere velkendt, definition af komplekse mangfoldigheder, nemlig en reel $2n$ -dimensional mangfoldighed M , således, at der findes et maksimalt atlas af kort (U, φ) , hvor φ er en homeomorfi af U på en åben delmængde af \mathbb{C}^n , således at transitionsfunktionerne $\varphi' \circ \varphi^{-1}|_{(U \cap U')}$ er holomorfe. Man kan vise, at de to definitioner er ækvivalente, i den forstand at hvis (M, J) er en kompleks mangfoldighed á la Definition 2.3, da findes kompleks-holomorfe kort på \mathbb{C}^n , og hvis M er en kompleks mangfoldighed som lige beskrevet, da findes en kanonisk næsten-kompleks struktur J , hvis Nijenhuis-tensor er 0.

Definition 2.4. *En Kähler-mangfoldighed er en kompleks mangfoldighed (M, J) , med en kompatibel tripel (ω, J, g) , således at $d\omega = 0$. Metrikken g kaldes en Kähler-metrik.*

En definition fuldstændig ækvivalent hermed er, at en Kähler-mangfoldighed er en symplektisk mangfoldighed (M, ω) med en ω -kompatibel kompleks struktur J , således, at $\omega_p(X_p, J_p X_p) > 0$ for alle $0 \neq X_p \in T_p M$. En Kähler-mangfoldighed er således både en symplektisk mangfoldighed og en Riemansk mangfoldighed.

Definition 2.5. *En Calabi-Yau mangfoldighed er en kompakt Kähler-mangfoldighed, hvis første Chern-klasse er 0.*

Calabi-Yau mangfoldigheder er vigtige i strengteori, hvor rumtiden modelleres med mangfoldigheden $\mathbb{R}^4 \times C$, hvor \mathbb{R}^4 er udstyret med Lorentz-metrikken og C er en Calabi-Yau mangfoldighed af størrelsesorden Planck-længden, dvs.

$$\max_{p, q \in C} L(p, q) \cong \text{Planck-længden},$$

hvor L er længdefunktionen, som er infimum over længden af alle stykkevis glatte kurver fra p til q .

3 Hamiltonske systemer

Følgende sætning er én af de mest centrale i hele teorien for symplektiske mangfoldigheder:

Sætning 3.1 (Darboux). *Lad (M, ω) være en symplektisk $2n$ -dimensional mangfoldighed. Om ethvert punkt i M kan vi finde et kort $(U, x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$, i hvilket ω har udseendet:*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i. \quad (3.1)$$

Sådanne koordinater kaldes Darboux-koordinater.

For et bevis se [LEE] Sætning 18.19.

En anden formulering af Darboux' sætning er, at symplektiske mangfoldigheder altid er lokalt symplektomorfe. Det er helt anderledes i forhold til Riemannsk geometri, hvor vi i krumningen har en ikke-triviel lokal invariant.

Hvad symplektisk geometri imidlertid har tilfælles med Riemannsk geometri er muligheden for at 'hæve og sænke indices' altså at identificere vektorfelter og covektorfelter/1-former. Først ser vi, at $\tilde{\omega}(X)$ for $X \in \mathcal{T}(M)$ giver anledning til en afbildning $\mathcal{T}(M) \rightarrow C^\infty(M)$, altså til et (groft) covektorfelt, ved

$$\tilde{\omega}(X)(Y)_p = \omega_p(X_p, Y_p).$$

At den resulterende funktion virkelig er glat, følger af, at ω , X og Y alle er glatte. $\tilde{\omega}(X)$ er \mathbb{R} -lineær, idet ω er bilinear. Men af [LEE] Problem 6-8 følger da, at $\omega(X)$ er et glat covektorfelt. Vi har mao. en afbildning $\tilde{\omega} : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}^*(M)$. Denne kommer fra en glat bundtafbildning $\tilde{\omega} : TM \rightarrow T^*M$. Denne er bijektiv, thi da ω_p er ikke-degenereret, er $\tilde{\omega}_p$ bijektiv. Ergo findes $\tilde{\omega}^{-1} : T^*M \rightarrow TM$ og denne er automatisk en glat bundtafbildning (jvf. [LEE] Problem 5-9), så det giver den inverse afbildning $\tilde{\omega}^{-1} : \mathcal{T}^*(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$. Takket være ω har vi altså en bijektiv forbindelse mellem glatte vektorfelter og glatte covektorfelter. Vi vil ofte skrive X^\flat for covektorfeltet $\tilde{\omega}(X)$ og η^\sharp for vektorfeltet $\tilde{\omega}^{-1}(\eta)$.

Denne bijektive forbindelse udnytter vi til at definere en symplektisk analog til gradienten:

Definition 3.2. *Lad $f \in C^\infty(M)$. Ved f 's hamiltonske vektorfelt X_f forstås vektorfeltet $X_f = \tilde{\omega}^{-1}(df) = (df)^\sharp$.*

Det er umiddelbart af definitionen, at X_f er det entydige vektorfelt på M , der opfylder $i_{X_f}\omega = df$.

Proposition 3.3. *I Darboux-koordinater $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ har X_f udseendet*

$$X_f = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^i} \right).$$

BEVIS. Sæt $X_f = \sum_{i=1}^n (A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + B^i \frac{\partial}{\partial y^i})$. Af [LEE] formel (13.3) fås, at

$$i(X_f)\omega = \sum_{i=1}^n (A^i dy^i - B^i dx^i).$$

Da vi pr. definition af X_f har $i(X_f)\omega = df$, og

$$df = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial f}{\partial y^i} dy^i \right),$$

ser vi ved at sammenligne, at $A^i = \frac{\partial f}{\partial y^i}$ og $B^i = -\frac{\partial f}{\partial x^i}$. □

Lad γ være en integralkurve for et hamiltonsk vektorfelt X_f , da er f konstant langs γ , thi

$$X_f f = df(X_f) = (i_{X_f} \omega)(X_f) = \omega(X_f, X_f) = 0$$

således, at

$$(f \circ \gamma)'(t) = \gamma'(t)f = X_f|_{\gamma(t)} = 0.$$

Definition 3.4. En triplet (M, ω, H) af en symplektisk mangfoldighed med en udvalgt funktion $H \in C^\infty(M)$ kaldes et hamiltonsk system.

Hvis V er et vektorfelt med komponenter V^1, \dots, V^n i et givet koordinatsystem, og γ er en integralkurve for V , da opfylder γ 's komponenter

$$\begin{aligned} (\gamma^1)'(t) &= V^1(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)), \\ &\vdots \\ (\gamma^n)'(t) &= V^n(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)). \end{aligned}$$

Hvis altså specielt (M, ω, H) er et hamiltonsk system, $(q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n)$ er Darboux-koordinater for M og $\gamma(t) = (q^i(t), p^i(t))$ en integralkurve for X_H , så vil γ 's komponenter opfylde *Hamilton-ligningerne*:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i(t) &= \frac{\partial H}{\partial p^i}(q^i(t), p^i(t)) \\ \dot{p}^i(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q^i(t), p^i(t)). \end{aligned}$$

Dette følger umiddelbart af udtrykket for X_H i Darboux-koordinater.

Hamiltonligningerne stammer fra fysik, hvor situationen er følgende: Vi har givet et konfigurationsrum Q , dvs. en glat mangfoldighed, der på én eller anden måde udtrykker naturen af det fysiske system i betragtning. Hvis det er en fri partikel vil Q være en åben delmængde af \mathbb{R}^3 , hvis ikke hele \mathbb{R}^3 . Hvis det er to frie partikler vil Q være (en åben delmængde af) \mathbb{R}^6 , mens hvis det er en lille perle, der bevæger sig på en cirkelformet skinne, vil Q være cirklen \mathbb{S}^1 . Der er nu to måder, vi kan angive bevægelsen af partiklen i et givet punkt $p \in Q$, enten dens hastighed eller dens impuls. Det første svarer til en vektor i TQ mens impulsen svarer til et element i T^*Q . Nu viser det sig, at T^*Q (der jo har lige dimension!) har en naturlig symplektisk form ω (også kaldet *Liouville-formen*), så for at sætte klassisk mekanik ind i rammen af symplektisk geometri, vælger vi altså at specificere et system ved at angive dens position $q \in Q$ og impuls $p \in T^*Q$. Vi bruger altså den symplektiske mangfoldighed (T^*Q, ω) som model for hamiltonsk mekanik. Darboux-koordinater på denne symplektiske mangfoldighed kaldes også *kanoniske koordinater*, i hvert fald i Goldstein, og en *kanonisk transformation* er en symplektomorfi $F : (T^*Q, \omega) \longrightarrow (T^*Q, \omega)$.

Som udvalgt funktion H vælger vi energien udtrykt ved position og impuls (så det bliver en funktion på T^*Q), ergo har vi det hamiltonske system (T^*Q, ω, H) . Man kan nu vise, at integralkurverne for X_H præcis tilsvarende tidsudviklinger af systemet, mao. at *Hamiltons ligninger er ækvivalente med Newtons love*. Som tidligere nævnt vil H være konstant langs disse integralkurver. Det udtrykker præcis *bevarelse af energien*.

Definition 3.5. Et vektorfelt X på M kaldes symplektisk, hvis $\mathcal{L}_X \omega = 0$, altså hvis og kun hvis den Lie-aftledede af ω langs X er 0. Et vektorfelt X kaldes (globalt) hamiltonsk, hvis der findes $f \in C^\infty(M)$, så $X = X_f$, og mængden af hamiltonske vektorfelter betegnes $\text{Ham}(M)$. Et vektorfelt kaldes lokalt hamiltonsk, hvis der om hvert punkt findes en omegn, hvorpå X er hamiltonsk, og mængden af sådanne betegnes $\text{Ham}^0(M)$.

Et hamiltonsk vektorfelt er klart lokalt hamiltonsk, den omvendte vej kræver noget ekstra:

Proposition 3.6. *Et vektorfelt er symplektisk, hvis og kun hvis det er lokalt hamiltonsk. Et lokalt hamiltonsk vektorfelt er globalt hamiltonsk, hvis og kun hvis $H_{dR}^1(M) = \{0\}$.*

For et bevis se [LEE] Proposition 18.23. Lad $X, Y \in \text{Ham}^0(M)$, dvs. $\mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_Y\omega = 0$ af ovenstående proposition. Da vil

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}\omega = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y\omega) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X\omega) = 0,$$

så $[X, Y]$ er lokalt hamiltonsk. Dermed er $\text{Ham}^0(M)$ en Lie-delalgebra af $\mathcal{T}(M)$.

Proposition 3.7. *Lad (M, ω) være en sammenhængende symplektisk mangfoldighed, $i : \mathbb{R} \rightarrow C^\infty(M)$ være afbildningen, der sender en tal c i den tilsvarende konstante afbildning, og $j : C^\infty(M) \rightarrow \text{Ham}(M)$ være afbildningen $f \mapsto X_f$. Da er nedenstående korte følge eksakt:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{i} C^\infty(M) \xrightarrow{j} \text{Ham}(M) \longrightarrow 0.$$

BEVIS. Det er klart, at i er injektiv, og at j er surjektiv (at j er surjektiv, er præcis definitionen af et hamiltonsk vektorfelt!). Vi skal blot vise, at $\text{im } i = \ker j$. Antag at $f \in \ker j$, dvs. $X_f = \tilde{\omega}^{-1}(df) = 0$. Det er ensbetydende med $df = 0$, der, da M er sammenhængende, er ensbetydende med, at f er konstant. Dvs. $f \in \ker j$ hvis og kun hvis $f \in \text{im } i$. \square

4 Poisson-parenteser

Vi vil nu udstyre $C^\infty(M)$ med en bilinear afbildning, der gør $C^\infty(M)$ til en Lie-algebra.

Definition 4.1. *Ved Poisson-parentesen $\{f, g\}$ af $f, g \in C^\infty(M)$ forstås C^∞ -funktionen $\{f, g\} = X_g f = -X_f g$.*

En anden måde at definere det på er følgende: $\{f, g\} = i_{X_g} i_{X_f} \omega$, thi X_f er pr. definition det entydige vektorfelt, der opfylder $i_{X_f} \omega = df$, så

$$i_{X_g} i_{X_f} \omega = df(X_g) = X_g f.$$

Proposition 4.2. *Poisson-parentesen besidder følgende elementære egenskaber:*

1. \mathbb{R} -bilinearitet: $\{af + bg, h\} = a\{f, h\} + b\{g, h\}$ og $\{f, ag + bh\} = a\{f, g\} + b\{f, h\}$.
2. Antisymmetri: $\{f, g\} = -\{g, f\}$.
3. Jacobi-identitet: $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\}$.
4. $X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]$.
5. Afbildningen $g \mapsto \{f_0, g\}$ for fast f_0 er en derivation af $C^\infty(M)$, dvs. en lineær afbildning, der opfylder

$$\{f_0, gh\} = g\{f_0, h\} + h\{f_0, g\}.$$

BEVIS. 1) og 2) følger direkte af, at $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$. For et bevis for 3) og 4) se [LEE] Proposition 18.25.

Lad os vise 5). Det følger af, at X_{f_0} er en derivation:

$$\{f_0, gh\} = -X_{f_0}(gh) = -gX_{f_0}h - hX_{f_0}g = g\{f_0, h\} + h\{f_0, g\}. \quad \square$$

1)-3) i ovenstående siger præcis, at C^∞ med Poisson-parentesen er en Lie-algebra.

Proposition 4.3. *I Darboux-koordinater $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ har vi følgende udtryk for Poisson-parentesen:*

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial y^i} - \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial g}{\partial x^i} \right). \quad (4.1)$$

BEVIS. Dette følger direkte af Proposition 3.3 og af definitionen $\{f, g\} = X_g f$. \square

Definition 4.4. *Lad (M, ω, H) være et hamiltonsk system. Et $f \in C^\infty(M)$ kaldes en bevaret størrelse, (i fysik også et første-integral eller en bevægelseskonstant) hvis f er konstant langs X_H 's integralkurver. Et vektorfelt V kaldes en infinitesimal symmetri, hvis det er symplektisk og $VH = 0$.*

At f er konstant langs X_H 's integralkurver, er ensbetydende med $\mathcal{L}_{X_H} f = 0$. Men da $\mathcal{L}_{X_H} f = X_H f = \{f, H\}$, har vi, at $f \in C^\infty(M)$ er bevaret, hvis og kun hvis $\{f, H\} = 0$. Vi kan altså bruge Poisson-parentesen til at detektere bevarede størrelser. Da vi har $\{H, H\} = 0$, ser vi, at H er en bevaret størrelse som tidligere bemærket. Hvis desuden f og g er to bevarede størrelser, så siger Jacobi-identiteten, at

$$\{\{f, g\}, H\} = -\{\{H, f\}, g\} - \{\{g, H\}, f\} = 0$$

så $\{f, g\}$ er igen en bevaret størrelse.

Sætning 4.5 (Noether). *Hvis f er en bevaret størrelse, da er det tilhørende hamiltonske vektorfelt X_f en infinitesimal symmetri. Omvendt, hvis $H_{dR}^1(M) = \{0\}$ findes til enhver infinitesimal symmetri V en bevaret størrelse f , så $V = X_f$. Dette f er entydigt bestemt op til addition af en funktion, der er konstant på M 's sammenhængskomponenter.*

For et bevis se [LEE] Sætning 18.27.

Vi kan også definere en Poisson-parentes for covektorfelder:

Definition 4.6. *For covektorfelder $\alpha, \beta \in \mathcal{T}^*(M)$ definerer vi Poisson-parentesen*

$$\{\alpha, \beta\} = -[\alpha^\sharp, \beta^\sharp]^\flat.$$

Vi tager altså de to covektorfelder, gør dem til vektorfelder via $\tilde{\omega}^{-1}$, tager Lie-parentesen, som giver et vektorfelt, og gør dette til et covektorfelt igen via $\tilde{\omega}$. Eftersom $[\cdot, \cdot]$ er bilinear, antisymmetrisk og opfylder Jacobi-identiteten, følger det nemt, at Poisson-parentesen også opfylder disse, og dermed gør $\mathcal{T}^*(M)$ til en Lie-algebra.

Definitionen er ikke særlig hensigtsmæssig til direkte beregninger. Heldigvis findes en nemmere måde at udregne det på:

Proposition 4.7. *Lad $\alpha, \beta \in \mathcal{T}^*(M)$. Da kan Poisson-parentesen udregnes som*

$$\{\alpha, \beta\} = -\mathcal{L}_{\alpha^\sharp} \beta + \mathcal{L}_{\beta^\sharp} \alpha + d(\omega(\beta^\sharp, \alpha^\sharp)).$$

BEVIS. Lad os først genkalde os formlen for differentialet af en 2-form (se [LEE] Proposition 12.19):

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= X\omega(Y, Z) - Y\omega(X, Z) + Z\omega(X, Y) \\ &\quad - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X) \\ &= \mathcal{L}_X(\omega(Y, Z)) - \mathcal{L}_Y(\omega(X, Z)) + \mathcal{L}_Z(\omega(X, Y)) \\ &\quad - \omega([X, Y], Z) - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y). \end{aligned}$$

Sæt nu $X = \alpha^\sharp$ og $Y = \beta^\sharp$, og bemærk desuden, at vi har $\alpha(Z) = (\alpha^\sharp)^\flat(Z) = \omega(\alpha^\sharp, Z)$. Derudover

$$\begin{aligned} -\omega([\alpha^\sharp, \beta^\sharp], Z) &= -[\alpha^\sharp, \beta^\sharp]^\flat(Z) = \{\alpha, \beta\}(Z), \\ -\omega([\beta^\sharp, Z], \alpha^\sharp) &= \omega(\alpha^\sharp, [\beta^\sharp, Z]) = \alpha([\beta^\sharp, Z]) = \alpha(\mathcal{L}_{\beta^\sharp} Z). \end{aligned}$$

Ved at benytte dette, fås:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_{\alpha^\sharp}(\beta(Z)) - \mathcal{L}_{\beta^\sharp}(\alpha(Z)) + \mathcal{L}_Z(\omega(\alpha^\sharp, \beta^\sharp)) \\ &\quad + \{\alpha, \beta\}(Z) + \alpha(\mathcal{L}_{\beta^\sharp} Z) - \beta(\mathcal{L}_{\alpha^\sharp} Z). \end{aligned}$$

Af [LEE] Proposition 18.9 ses, at

$$\mathcal{L}_{\alpha^\sharp}(\beta(Z)) - \beta(\mathcal{L}_{\alpha^\sharp} Z) = (\mathcal{L}_{\alpha^\sharp} \beta)(Z) \quad \text{og} \quad -\mathcal{L}_{\beta^\sharp}(\alpha(Z)) + \alpha(\mathcal{L}_{\beta^\sharp} Z) = -(\mathcal{L}_{\beta^\sharp} \alpha)(Z).$$

Det ses desuden, at $\mathcal{L}_Z(\omega(\alpha^\sharp, \beta^\sharp)) = Z(\omega(\alpha^\sharp, \beta^\sharp)) = d(\omega(\alpha^\sharp, \beta^\sharp))(Z)$. Indsættes dette fås den ønskede formel. \square

Proposition 4.8. *Hvis α og β er lukkede covektorfelter, da er $\{\alpha, \beta\}$ eksakt.*

BEVIS. Cartans formel for Lie-afledning af en differentialform α siger

$$\mathcal{L}_X \alpha = d(i(X)\alpha) + i(X)d\alpha.$$

Da α og β begge er lukkede, får vi da, at $\mathcal{L}_{\alpha^\sharp} \beta = d(i(\alpha^\sharp)\beta)$ og $\mathcal{L}_{\beta^\sharp} \alpha = d(i(\beta^\sharp)\alpha)$, så af Proposition 4.7 fås:

$$\begin{aligned} \{\alpha, \beta\} &= -d(i(\alpha^\sharp)\beta) + d(i(\beta^\sharp)\alpha) + d(i(\alpha^\sharp)i(\beta^\sharp)\omega) \\ &= d(i(\alpha^\sharp)\beta) + i(\beta^\sharp)\alpha + i(\alpha^\sharp)i(\beta^\sharp)\omega, \end{aligned}$$

så $\{\alpha, \beta\}$ er eksakt. \square

Som navnene antyder er der en snæver sammenhæng mellem Poisson-parentesen for funktioner og den for covektorfelter:

Proposition 4.9. *For $f, g \in C^\infty(M)$ gælder*

$$d\{f, g\} = \{df, dg\}.$$

BEVIS. Husk, at vi pr. definition har $X_f = df^\sharp$. Proposition 4.7 giver nu

$$\begin{aligned} \{df, dg\} &= -\mathcal{L}_{df^\sharp} dg + \mathcal{L}_{dg^\sharp} df - d(\omega(df^\sharp, dg^\sharp)) = -\mathcal{L}_{X_f} dg + \mathcal{L}_{X_g} df - d(\omega(X_f, X_g)) \\ &= d(-\mathcal{L}_{X_f} g + \mathcal{L}_{X_g} f - \omega(X_f, X_g)) = d(\{f, g\} + \{f, g\} - \{f, g\}) \\ &= d\{f, g\}, \end{aligned}$$

hvor vi undervejs har benyttet, at $\mathcal{L}_X f = Xf$ og at d kommuterer med \mathcal{L} . \square