Forslag til opgaver om differentialligninger

Vi betragter varmeledningsligningen i 1-dimension

$$T'_t(t,x) - T''_{xx}(t,x) = 0 \tag{1}$$

Vi forestiller os en stang der har længden π. Den kan altså beskrives ved intervallet $[0,\pi]$. Tænk over hvordan nedenstående ændrer sig hvis vi ændrer længden af stangen!

Antag, at vi holder temperaturen fast i endepunkterne:

$$T(t,0) = T(t,\pi) = 0 \tag{2}$$

til alle tider t.

Som et eksempel antager vi, at temperaturen til at starte med er

$$T(0,x) = \sin(x), \quad x \in [0,\pi]. \tag{3}$$

Bemærk temperaturen i endepunkterne er OK.

Opgave 1 Vis, at $T(t,x) = e^{-t}\sin(x)$ er en løsning til (1),(2),(3).

Vi kan nu se på andre begyndelsesbetingelser.

Opgave 2 Betragt nu (1),(2) med begyndelsestemperaturen

$$T(0,x) = 2\sin(x) + \sin(2x) - \sin(4x)$$

Tegn grafen for begyndelsestemperaturen. Bestem løsningen $T(t,x)$. Find det punkt hvor temperaturen er størst til t=2. Bestem hvor temperaturen er størst efter meget lang tid ($t \to \infty$). Bestem hvordan total varme som er (proportional med) $\int T(t,x)dx$ opfører sig med tiden for den givne løsning.

Opgave 3 Betragt de nye randbetingelser:

$$T'_x(t,0) = T'_x(t,\pi) = 0.$$

Se på begyndelsestemperaturen $T(0,x) = 2 - \cos(x) + \cos(2x)$. Tegn grafen for begyndelsestemperaturen og tjek at randbetingelsen er opfyldt. Find løsningen $T(t,x)$ til (1) med de nye randbetingelser og begyndelsestemperaturen. Vis, at den den totale varme $\int T(t,x)dx$ som funktion af tiden er konstant. Fortolk forskellen mellem de to typer randbetingelser.

Opgave 4 Modelleringsopgave. Diskuter hvordan forskellige randbetingelser kan bruges til at modellere hvor godt isolerende endepunkterne er. Hvordan vil man inkludere en varmekilde i modellen?