Besvarelse, Eksamen Analyse 1, 2014

Opgave 1

(a) Gør rede for at grænseværdien

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{1/2}} \tag{1}$$

eksisterer i $\mathbb{R}$, og benyt dette til at vise at integralet

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx \tag{2}$$

konvergerer.

(b) Bestem mængden af potenser $\alpha \in \mathbb{R}$ for hvilke

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,dx \tag{3}$$

er konvergent.

Besvarelse: (a) Ifølge TL Sætning 6.3.15 gælder $\frac{\ln x}{x^{1/2}} \to 0$ for $x \to \infty$. For $1 \le x$ er $0 \le \ln(1+x) \le \ln(2x)$ og dermed

$$0 \le \frac{\ln(1+x)}{x^{1/2}} \le 2^{1/2}\,\frac{\ln(2x)}{(2x)^{1/2}} \to 0.$$

Heraf det ønskede. Ifølge Sætning 9.5.4 konvergerer

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$

og ifølge (1) og Sætning 9.5.13 (grænsesammenligning) konvergerer (2) så.

(b) Integralet er konvergent for $\alpha > 1$ ved samme argument som i (a): Man vælger p så $\alpha > p > 1$ og får

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha-p}} = 0$$

Derefter sammenlignes med

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

som ifølge Sætning 9.5.4 konvergerer da $p > 1$.
Integralet er divergent for $\alpha \le 1$. Det følger af Sætning 9.5.11, idet $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ er divergent (Sætning 9.5.4 igen) og

$$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \ge \frac{1}{x^\alpha}.$$

Opgave 2

Lad
$$g(x) = \frac{\ln x}{1+x}$$
og sæt $f_n(x) = g(x^n)$ for $n \in \mathbb{N}$ og for alle $x \in [1, \infty[$.

(a) Vis, at funktionsfølgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er punktvis konvergent og angiv grænsefunktionen f.

(b) Vis at konvergensen ikke er uniform. Vink: Betragt feks $f_n(2^{1/n})$.

(c) Lad $c > 1$. Vis at konvergensen er uniform for $x \in [c, \infty[$.

Besvarelse: (a) For $x = 1$ fås $f_n(1) = g(1) = 0$ for alle n, så den er klart konvergent. Fra TL Sætning 6.3.15 fås at $g(x) \to 0$ for $x \to \infty$. For $x > 1$ gælder $x^n \to \infty$ for $n \to \infty$. Så fås $f_n(x) = g(x^n) \to 0$ for $n \to \infty$. Altså konvergerer f_n punktvis mod nulfunktionen.

(b) Hvis funktionsfølgen konvergerer uniformt vil det være med den samme grænsefunktion som punktvist, altså nulfunktionen.
Der gælder $f_n(2^{1/n}) = g(2)$ for alle n. Med $A = [1, \infty[$ fås dermed fra Definition 11.3.5 at $d_A(f_n, 0) \geq g(2) > 0$ for alle n. Altså konvergerer funktionsfølgen ikke uniformt mod nulfunktionen.

(c) Nu sættes $A = [c, \infty[$. Det skal vises, at $d_A(f_n, 0) \to 0$ for $n \to \infty$.
Idet
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x) - \ln x}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1}{x} + 1 - \ln x}{(1+x)^2} \leq \frac{2 - \ln x}{(1+x)^2}$$
ses, at $g(x)$ er aftagende for $\ln x \geq 2$ (dvs $x \geq e^2$). Altså er $f_n(x) = g(x^n)$ aftagende hvis $\ln(x^n) \geq 2$. Det gælder for alle $x \geq c$ hvis $\ln(c^n) \geq 2$.
Vælg N tilstrækkelig stor så $\ln(c^N) \geq 2$ (det opnås for $N \geq 2/\ln c$) og lad $n \geq N$. Så er $\ln(c^n) \geq 2$. Altså er $f_n(x)$ aftagende og vi får
$$d_A(f_n, 0) = \sup_{x\in A} f_n(x) = f_n(c) \to 0$$
for $n \to \infty$.

Opgave 3

Betragt potensrækkerne

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n2^{-n}}\, x^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n2^{n}}\, x^n.$$

(a) Find konvergensradius for hver af rækkerne.

(b) Find konvergensintervallet for hver af rækkerne.

Besvarelse: (a) Konvergensradius bestemmes ved hjælp af Sætning E fra Ugeseddel 3 (kvotientkriteriet for potensrækker). Sæt

$$a_n = \frac{1}{1+n2^{-n}}, \qquad b_n = \frac{1}{1+n2^{n}}.$$

Idet $a_n \to 1$ for $n \to \infty$ (jævnfør TL Sætning 6.3.15) fås $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{1} = 1$ for $n \to \infty$, og dermed er konvergensradius 1 for potensrækken for f.
Endvidere fås

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1+n2^n}{1+(n+1)2^{(n+1)}} = \frac{\frac{1}{n}2^{-n}+1}{\frac{1}{n}2^{-n}+2+\frac{2}{n}} \to \frac{0+1}{0+2+0} = \frac{1}{2}$$

og dermed er konvergensradius 2 (den reciprokke værdi) for rækken for g.

(b) Idet $|a_n x^n| \to 1$ for $x = \pm 1$ kan potensrækken for $f(x)$ ikke konvergere for $x = \pm 1$ ifølge Sætning 12.1.4 (divergenskriteriet). Altså har denne række konvergensinterval $]-1,1[$.
Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^n$ er divergent ifølge sammenligningskriteriet idet

$$b_n 2^n = \frac{2^n}{1+n2^n} \geq \frac{2^n}{2^n+n2^n} = \frac{1}{1+n}$$

og $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n}$ (den harmoniske række) er divergent.
Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(-2)^n$ er alternerende, og dens led går mod nul. Den er derfor konvergent ifølge Sætning 12.3.1, hvis leddene er aftagende. Der gælder $b_n 2^n \geq b_{n+1}2^{n+1}$ hvis og kun hvis $b_n \geq 2b_{n+1}$ dvs hvis og kun hvis

$$1+(n+1)2^{n+1} \geq 2(1+n2^n) = 2+n2^{n+1}.$$

Det sker hvis og kun hvis $2^{n+1} \geq 1$ og det er opfyldt for alle $n \geq 0$.
Altså har rækken for g konvergensinterval $[-2,2[$.

Opgave 4

Lad (M, d) være et metrisk rum. Definer

$$D(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$$

for alle $x, y \in M$.

(a) Vis, at (M, D) er et metrisk rum. Vink: I beviset for trekantsuligheden

$$D(x, y) \leq D(x, z) + D(z, y) \tag{4}$$

kan det betale sig at skelne mellem de to tilfælde, hvor højresiden er henholdsvis < 1 og ≥ 1.

(b) Lad $A \subseteq M$. Vis, at A er åben i (M, d) hvis og kun hvis den er åben i (M, D).

(c) Vis, at (M, d) er fuldstændigt hvis og kun hvis (M, D) er fuldstændigt.

Besvarelse: (a) Vi skal vise axiomerne (M1)-(M3). Lad $x, y \in M$. Bemærk at

$$D(x, y) \leq d(x, y) \tag{5}$$

og

$$D(x, y) \leq 1 \Rightarrow d(x, y) = D(x, y). \tag{6}$$

(M1) At $D(x, y) \geq 0$ er klart da $d(x, y) \geq 0$. Hvis $D(x, y) = 0$, så må $d(x, y) = 0$ ifølge (6) og så er $x = y$, idet d er en metrik.

(M2) Oplagt ud fra den samme betingelse for d.

(M3) For at vise (4) for alle $x, y, z \in M$ følges vinket. Der er to tilfælde: Hvis $D(x, z) + D(z, y) < 1$ er både $D(x, z) < 1$ og $D(z, y) < 1$. Dermed er $D(x, z) = d(x, z)$ og $D(z, y) = d(z, y)$ ifølge (6). Da d opfylder (M3) fås nu

$$D(x, y) \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = D(x, z) + D(z, y).$$

Hvis $D(x, z) + D(z, y) \geq 1$ gælder klart $D(x, y) \leq 1 \leq D(x, z) + D(z, y)$.

(b) Lad $r > 1$. Vi betegner med $K_d(a, r)$ og $K_D(a, r)$ kuglerne i M med hensyn til de to metrikker. Det følger af (5) at

$$K_d(a, r) \subseteq K_D(a, r)$$

for alle $r > 0$. For $0 < r \leq 1$ fås fra (6) at

$$K_d(a, r) = K_D(a, r)$$

Hvis A er D-åben findes for hvert $a \in A$ et $r > 0$ så $K_D(a, r) \subseteq A$. Så er $K_d(a, r) \subseteq A$, og altså er A også d-åben. Omvendt hvis A er d-åben findes for hvert $a \in A$ et $r > 0$ så $K_d(a, r) \subseteq A$. Lad $s = \min\{r, 1\}$, så er $K_D(a, s) = K_d(a, s) \subseteq K_d(a, r) \subseteq A$, og dermed er A også D-åben.

(c) Antag først (M, D) er fuldstændigt, og lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en Cauchy følge i (M, d). For hvert $\epsilon > 0$ findes N så $d(x_m, x_n) < \epsilon$ for $m, n \geq N$, og ifølge (5) gælder den samme ulighed også for $D(x_m, x_n)$. Altså er følgen Cauchy i (M, D) og dermed er den konvergent i dette metriske rum.
Lad x betegne grænsepunktet. Vi viser at følgen også konvergerer mod x i (M, d):
Lad $\epsilon > 0$ og sæt $\delta = \min\{\epsilon, 1\}$. Da findes N så $D(x, x_n) < \delta$ for $n \geq N$, og fra (6) fås nu $d(x, x_n) = D(x, x_n) < \delta \leq \epsilon$. Altså gælder $x_n \to x$ i (M, d).
Dermed er det vist at (M, d) er fuldstændigt.

Beviset for den modsatte implikation forløber helt på samme måde:
Antag (M, d) er fuldstændigt, og lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en Cauchy følge i (M, D).
Lad $\epsilon > 0$ og sæt $\delta = \min\{\epsilon, 1\}$. Da findes N så $D(x_m, x_n) < \delta$ for $m, n \geq N$, og ifølge (6) gælder nu $d(x_m, x_n) < \delta \leq \epsilon$. Altså er følgen Cauchy i (M, d) og dermed er den konvergent i dette metriske rum.
Lad x betegne grænsepunktet. Vi viser at følgen også konvergerer mod x i (M, D):
Lad $\epsilon > 0$. Da findes N så $d(x, x_n) < \epsilon$ for $n \geq N$, og fra (5) fås nu $D(x, x_n) \leq d(x, x_n) < \epsilon$. Altså gælder $x_n \to x$ i (M, D).
Dermed er det vist at (M, D) er fuldstændigt.