Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet januar 2004

Matematik 3 GE

Skriftlig eksamen, 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt. De fem opgaver vægtes tilnærmelsesvis som angivet. Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker ikke ned og anbefales ved større ændringer.

Opgave 1 (tæller 25 %)
Betragt den parametriserede differentiable kurve

$$\gamma(t) = (2e^t \cos t, 2e^t \sin t, e^t), \quad t \in \mathbb{R}$$

gennem punktet $p = \gamma(0) = (2, 0, 1)$.

1. Angiv en parameterfremstilling $\alpha(s) = \gamma(t(s))$ ved buelængden ud fra p.

2. Bestem kurvens krumning κ i punktet p.

3. Bestem, i punktet p, de tre enhedsvektorer $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ (enhedstangentvektoren, hovednormalvektoren samt binormalvektoren).

4. Lad keglefladen $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - 4z^2 = 0,\ z > 0\}$ være orienteret således at normalvektoren har retning ind mod z-aksen. Idet det bemærkes at kurven γ forløber i $\mathcal{S}$, skal normalkrumningen af γ med hensyn til denne flade i punktet p bestemmes.

Opgave 2 (tæller 10 %)
Bestem koordinatfunktionerne $(x(s), y(s))$ for den plane kurve $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, hvor $-1 < s < 1$, som har enhedsfart, hvis tangentdrejning $\varphi(s)$ (dvs. vinklen fra e_1 til $\dot\gamma(s)$) er givet ved $\cos\varphi(s) = s$ hvor $0 < \varphi(s) < \pi$, og som opfylder $\gamma(0) = (\frac{1}{2}, 0)$. Bestem desuden kurvens krumning (med fortegn) κ_s, som funktion af s.

En eller flere blandt følgende formler kan benyttes:

$$\frac{d}{ds}(\cos^{-1} s) = \frac{-1}{\sqrt{1-s^2}}, \qquad \int \cos^{-1} s\, ds = s\cos^{-1} s - \sqrt{1-s^2},$$
$$\frac{d}{ds}(\sqrt{1-s^2}) = \frac{-s}{\sqrt{1-s^2}}, \qquad \int \sqrt{1-s^2}\, ds = \tfrac{1}{2} s\sqrt{1-s^2} + \tfrac{1}{2}\sin^{-1} s.$$

Opgave 3 (tæller 20%)
Lad $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = (1 + x)(x - y^2)\}$.

1. Vis, at $\mathcal{S}$ er en glat flade.

2. Bestem en normalvektor $\mathbf{N}$ til tangentrummet for $\mathcal{S}$ i punktet $(0, 0, 0)$.

3. Bestem en glat funktion $f(u, v)$, således at $\mathcal{S}$ i en omegn af $(0, 0, 0)$ er graf for f over en af de tre koordinatplaner.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (tæller 15 %)

Lad $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$. På en glat flade $\mathcal{S}$ er der givet et kort (σ, U) med hensyn til hvilket der gælder

$$E = 1 + v^2, \quad F = uv, \quad G = u^2$$

for alle $(u,v) \in U$. Antag $\mathcal{S} = \sigma(U)$.

1. Lad $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ være fastlagt ved

$$f(\sigma(u,v)) = \sigma(u, v + \frac{c}{u}),$$

hvor $c \in \mathbb{R}$ er konstant. Vis, at f er en isometri.

2. Vis, at Gauss krumningen K for fladen $\mathcal{S}$ i punktet $\sigma(u,v)$ er den samme for alle værdier af v.

Opgave 5 (tæller 30%)

Lad $\mathcal{S}$, (σ, U), samt E, F og G være som i den foregående opgave (de to opgaver er i øvrigt uafhængige).

1. Lad $A = (1, -1) \in U$ og lad $P = \sigma(A) \in \mathcal{S}$. Vis, at i dette punkt er tangentvektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \sigma_v \in T_P\mathcal{S} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_u + \sqrt{2}\sigma_v \in T_P\mathcal{S}$$

begge enhedsvektorer. Bestem vinklen mellem disse tangentvektorer.

2. Betragt kurverne

$$\gamma(s) = \sigma(a, \frac{s}{a}) \quad \text{og} \quad \mu(t) = \sigma(b\cos\frac{t}{b}, \tan\frac{t}{b}),$$

på $\mathcal{S}$, hvor $s \in \mathbb{R}$, $t \in]-b\frac{\pi}{2}, b\frac{\pi}{2}[$, og hvor $a, b > 0$ er konstanter. Vis, at begge disse kurver har enhedsfart.

3. Vis, at γ er en geodætisk kurve på $\mathcal{S}$.

4. Lad $a = 1$ og $b = \sqrt{2}$. De to kurver $s \mapsto (1, s)$ og $t \mapsto (b\cos\frac{t}{b}, \tan\frac{t}{b})$ i U skærer hinanden i $A = (1, -1)$ og $B = (1, 1)$, svarende til $s = \pm 1$ og $t = \pm b\frac{\pi}{4}$, og afgrænser derved et kompakt område $R \subset U$. Bestem de to indre vinkler i den kurvelineære polygon (tokant) $\sigma(R)$ og bestem dermed vinkelsummen.

5. Det oplyses, at fladen $\mathcal{S}$ har konstant Gauss krumning $K = 0$ og at kurven μ har konstant geodætisk krumning κ_g. Beregn denne konstant κ_g ved hjælp af disse oplysninger samt Gauss-Bonnet sætningen (stadig med $a = 1$ og $b = \sqrt{2}$. $\mathcal{S}$ orienteres i overensstemmelse med standard enhedsnormalen for kortet (σ, U)).

SLUT