Matematik 3 GE

Skriftlig eksamen, 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt. De tre opgaver vægtes tilnærmelsesvis som angivet.

Opgave 1 (tæller 15 %)

Betragt den parametriserede differentiable kurve

$$\beta(t) = ((2+t)^{3/2}, (2-t)^{3/2}, 4t), \quad -2 < t < 2.$$

1. Vis, at tangentvektoren $\beta'(t)$ har konstant længde, og angiv en parameterfremstilling $\alpha(s) = \beta(t(s))$ ved buelængden.

2. Lad $p = \beta(0) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$. Bestem, i punktet p, enhedstangentvektoren $\mathbf{t}$, krumningen k og hovednormalvektoren $\mathbf{n}$ af kurven.

Opgave 2 (tæller 60 %)

Lad $S = \mathbf{x}(U)$ betegne den regulære flade som er parametriseret ved

$$\mathbf{x}(u,v) = ((2 - v\sin\frac{u}{2})\sin u, (2 - v\sin\frac{u}{2})\cos u, v\cos\frac{u}{2}),$$

hvor $(u,v) \in U = (0, 2\pi) \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^2$. Det antages kendt at $\mathbf{x}$ er en regulær fladeparametrisering (S er en åben tæt delmængde af Möbius båndet). Fladen S udstyres med orienteringen givet ved denne parametrisering.

1. Vis, at koefficienterne til den første fundamentalform er givet ved

$$E = \frac{1}{4}v^2 + (2 - v\sin\frac{u}{2})^2, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

2. Betragt afbildningen $f\colon S \to S$ givet ved

$$f(\mathbf{x}(u,v)) = \mathbf{x}(2\pi - u, -v)$$

for $(u,v) \in S$. Gør rede for at f er en diffeomorfi af S. Er f en isometri? (Svaret skal begrundes).

3. Bestem matricen for differentialet df_p af f i punktet $p = \mathbf{x}(\pi, 0)$, med hensyn til basisvektorerne $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ (bemærk, at $f(p) = p$). Er f orienteringsbevarende eller orienteringsvendende? (Svaret skal begrundes).

Opgaven fortsættes på side 2

4. Lad
$$C = \{\mathbf{x}(u,v) \mid v = 0\} = \{(x,y,z) \in S \mid z = 0\}.$$
Bestem normalvektoren $N(p)$ til S i ethvert punkt $p \in C$. Vis, at
$$\lim_{u \to 0^+} N(\mathbf{x}(u,0)) \neq \lim_{u \to 2\pi^-} N(\mathbf{x}(u,0)),$$
og benyt dette til at argumentere for at Möbius båndet ikke er orienterbart.

5. Det oplyses, at i punktet $p = \mathbf{x}(\pi, 0)$ er
$$\mathbf{x}_{uu} = (0,2,0), \quad \mathbf{x}_{vv} = (0,0,0), \quad \mathbf{x}_{uv} = (-1,0,-\tfrac{1}{2})$$
Beregn koefficienterne e, f, g til den anden fundamentalform i p, og udregn fladens krumningsmål (Gauss krumning) i dette punkt. Benyt svaret til at argumentere for at der ikke findes nogen isometri (bøjning), af en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$ på en omegn af p i S.

6. Lad C være som ovenfor. Da er C en regulær kurve i S. Bestem dens normalkrumning k_n i ethvert af dens punkter. Bestem ligeledes absolutværdien $|k_g|$ af dens geodætiske krumning i ethvert af dens punkter (med hensyn til en vilkårlig orientering af C).

Opgave 3 (tæller 25 %)

Betragt en omdrejningsflade S parametriseret ved
$$\mathbf{x}(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$$
hvor $f(v) > 0$, $(f')^2 + (g')^2 = 1$ og $u \in (u_0 - \pi, u_0 + \pi)$ (det antages at $(f(v), g(v))$ er en regulær differentiabel kurve i $\mathbb{R}^2$).

Lad $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ være en differentiabel kurve på S, parametriseret ved buelængde, og lad $\theta(s)$ være en differentiabel bestemmelse af vinklen fra $\mathbf{x}_u$ til $\alpha'(s)$ (i orienteringen givet ved $\mathbf{x}$).

1. Vis, at $f(v(s))u'(s) = \cos\theta(s)$ og $v'(s) = \sin\theta(s)$.

2. Vis, at den geodætiske krumning af α er givet ved
$$k_g = -\frac{f'(v)}{f(v)}\cos\theta + \theta'.$$

3. Antag, at $\sin\theta(s) \neq 0$ for alle s. Vis, at
$$k_g = -\frac{(f(v)\cos\theta)'}{f(v)\sin\theta}.$$
hvor $'$ indikerer differentiation med hensyn til s. Vis, at Clairaut's relation gælder for α hvis *og kun hvis* den er en geodætisk kurve.

SLUT