Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 2003

Matematik 3 GE

Skriftlig eksamen, 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt. De tre opgaver vægtes tilnærmelsesvis som angivet. Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker ikke ned og anbefales ved større ændringer.

Opgave 1 (tæller 35 %)
Lad $a \in \mathbb{R}$ og sæt

$$\mathcal{S}_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y - xz + az = 0\}.$$

1. Vis, at $\mathcal{S}_a$ er en glat flade for hvert $a \neq 0$.
2. Lad $a = 1$. Vis, at

$$\sigma(u, v) = (u, (u-1)v, u^2v),$$

hvor $(u, v) \in U = \mathbb{R}^2$, er et regulært kort, som dækker hele $\mathcal{S}_1$.

3. Lad $a = 1$ og $P = (1, 0, 0)$. Bestem koefficienterne E, F, G og L, M, N af den første og den anden fundamentalform for σ i P. Bestem endvidere hovedkrumningerne κ_1, κ_2 og tilhørende hovedkrumningsvektorer i tangentrummet $T_P\mathcal{S}_1$.
4. Lad $a = 0$. Vis, at $\mathcal{S}_0$ *ikke* er en glat flade.

Opgave 2 (tæller 15 %)
Lad $\sigma_1(\theta, \varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ være de sædvanlige sfæriske koordinater på kuglefladen, og lad $\mathcal{S}_1$ være den del af kuglefladen som er givet ved $\mathcal{S}_1 = \sigma_1(U_1)$ hvor

$$U_1 = \{(\theta, \varphi) \mid -\tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{\pi}{2},\ -\pi < \varphi < \pi\}.$$

Lad endvidere λ være et fast positivt tal, og lad $\sigma_2(u, v) = (v\cos u, v\sin u, \lambda u)$ være den sædvanlige parametrisering af en vindelflade (helicoid). Lad $\mathcal{S}_2$ være den del af vindelfladen som er givet ved $\mathcal{S}_2 = \sigma_2(U_2)$, hvor

$$U_2 = \{(u, v) \mid -\pi < u < \pi,\ v \in \mathbb{R}\}.$$

Ved $f(\sigma_1(\theta, \varphi)) = \sigma_2(\varphi, \lambda\tan\theta)$ defineres en afbildning $f\colon \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$.

1. Gør rede for, at f er en diffeomorfi.
2. Vis, at f er konform.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (tæller 50 %)

Lad $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u,v) \neq (0,0)\}$. På en glat flade $\mathcal{S}$ er der givet et kort (σ, U) med hensyn til hvilket der gælder

$$E = G = \frac{1}{u^2+v^2}, \quad F = 0$$

for alle $(u,v) \in U$.

1. Betragt kurverne

$$\gamma(s) = \sigma(\sinh s, 1) \quad \text{og} \quad \mu(s) = \sigma(a\cos s, a\sin s),$$

hvor $s \in \mathbb{R}$, og hvor $a > 0$ er konstant. Vis, at γ og μ begge har enhedsfart.

2. Lad $a = \sqrt{2}$. De to plane kurver $s \mapsto (\sinh s, 1)$ og $s \mapsto (a\cos s, a\sin s)$ skærer hinanden i punkterne $A = (-1,1)$ og $B = (1,1)$, og afgrænser derved et kompakt område $R \subset \mathbb{R}^2$. Skitser området, og opstil en eksplicit integralformel for arealet af $\sigma(R)$ (det er tilstrækkeligt at opstille formlen; integrand og grænser skal anføres, men integrationen skal ikke udføres).

3. Vis, at fladen $\mathcal{S}$ har konstant Gauss krumning $K = 0$ på $\sigma(U)$.

4. Det oplyses yderligere, at den anden fundamentalform opfylder

$$L = \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}, \quad N = \frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}$$

(M oplyses ikke). Bestem middelkrumningen H og hovedkrumningerne κ_1, κ_2.

5. Vis, at enhedsfartkurven μ er en geodæt på $\mathcal{S}$.

6. Vis, at den geodætiske krumning af enhedsfartkurven $\gamma(s) = \sigma(\sinh s, 1)$ er givet ved

$$\kappa_g(s) = \frac{1}{\cosh s}.$$

7. Beregn integralet af κ_g langs γ fra $\sigma(A)$ til $\sigma(B)$ ved hjælp af formlen

$$\int \frac{1}{\cosh s}\, ds = \tan^{-1}(\sinh s).$$

8. Bestem de to indre vinkler i den kurvelineære polygon (tokant) $\sigma(R)$ og bestem dermed vinkelsummen. Forklar sammenhængen mellem dette resultat og resultatet i spm. 7, i lyset af Gauss-Bonnet sætningen.

9. Lad $\mathbf{v}$ betegne tangentvektoren σ_u i punktet $\sigma(A)$, og lad $\mathbf{w} \in T_{\sigma(B)}\mathcal{S}$ være paralleltransporten langs γ af $\mathbf{v} \in T_{\sigma(A)}\mathcal{S}$. Udtryk $\mathbf{w}$ som linearkombination af σ_u og σ_v i $\sigma(B)$.

SLUT