Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 2002

Matematik 3 GE

Skriftlig eksamen, 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt. De tre opgaver vægtes tilnærmelsesvis som angivet. Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker ikke ned og anbefales ved større ændringer.

Opgave 1 (tæller 10 %)

Bestem en plan kurve $\gamma(s)$, $s > 0$, som har enhedsfart, hvis fortegnskrumning er givet ved $\kappa_s = 1/s$, og som opfylder $\gamma(1) = (0,0)$ og $\dot\gamma(1) = (0,1)$.

Følgende formler kan benyttes:

$$\int \cos(\ln t)\,dt = \frac{t}{2}[\sin(\ln t) + \cos(\ln t)], \qquad \int \sin(\ln t)\,dt = \frac{t}{2}[\sin(\ln t) - \cos(\ln t)].$$

Opgave 2 (tæller 40 %)

1. Lad $I \subset \mathbb{R}$ være et åbent interval og lad $\theta : I \to \mathbb{R}$ være en vilkårlig glat funktion. Sæt

$$\sigma(u,v) = (v\cos(\theta(u)), v\sin(\theta(u)), u)$$

for $(u,v) \in U = I \times \mathbb{R}$, og lad $\mathcal{S} = \sigma(U)$.

Gør rede for at $\mathcal{S}$ er en glat flade og at (σ, U) er et regulært kort på $\mathcal{S}$.

2. Bestem koefficienterne E, F, G i den første fundamentalform samt koefficienterne L, M, N i den anden fundamentalform for σ. Vis desuden, at fladens krumningsmål (Gauss krumning) i punktet $\sigma(u,v)$ er givet ved udtrykket

$$K = -\frac{\dot\theta(u)^2}{(1 + v^2\dot\theta(u)^2)^2}.$$

3. Lad $\gamma(u)$, $u \in I$, være en kurve i $\mathbb{R}^3$ med enhedsfart og med krumning overalt forskellig fra nul, og lad $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ være den tilhørende tangentvektor, hovednormalvektor samt binormalvektor, som funktion af u. Lad $\bar{\mathcal{S}}$ betegne den tilhørende binormalflade, dvs. den retlinede flade som er kortlagt ved

$$\bar\sigma(u,v) = \gamma(u) + v\mathbf{b}(u)$$

hvor $(u,v) \in \bar U = I \times (-\epsilon, \epsilon)$. Det antages at $\epsilon > 0$ er valgt således at $\bar{\mathcal{S}} = \bar\sigma(\bar U)$ er en glat flade og $(\bar\sigma, \bar U)$ et regulært kort.

 Opgaven fortsættes på side 2

Vis, at koefficienten $\bar{E}$ i den første fundamentalform for $\bar{\sigma}$ er givet ved udtrykket

$$\bar{E} = 1 + v^2\tau(u)^2,$$

hvor $\tau(u)$ betegner torsionen af kurven γ, som funktion af u. Bestem desuden koefficienterne $\bar{F}$ og $\bar{G}$ i den første fundamentalform for $\bar{\sigma}$.

4. Lad $f : \bar{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ være afbildningen defineret ved

$$f(\bar{\sigma}(u, v)) = \sigma(u, v).$$

Opstil en nødvendig og tilstrækkelig betingelse på funktionen θ for at f er en isometri på sit billede i $\mathcal{S}$. Bestem krumningsmålet (Gauss krumningen) K for $\bar{\mathcal{S}}$.

Opgave 3 (tæller 50 %)

Betragt en omdrejningsflade $\mathcal{S}$, der som sædvanlig er parametriseret ved

$$\sigma(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),$$

hvor $f(u) > 0$ for alle u, og hvor profilkurven $u \mapsto (f(u), 0, g(u))$ antages at have enhedsfart.

1. Det oplyses, at koefficienterne for den første fundamentalform er givet ved

$$E = 1,\ F = 0,\ G = \frac{1}{16}(1 + u^2)^2.$$

Bestem $f(u)$ og opstil en integralformel for $g(u)$, for $-2 < u < 2$ (det er ikke nødvendigt at udføre integrationen).

2. Lad P være punktet $\sigma(1, 0)$ på $\mathcal{S}$. Bestem længden af tangentvektoren $a\sigma_u + b\sigma_v$ i P, for alle $a, b \in \mathbb{R}$. Bestem, ligeledes i P, vinklen fra σ_u til $\sigma_u - 2\sigma_v$ i P (med hensyn til den sædvanlige positive omløbsretning givet ved σ).

3. Betragt kurven

$$t \mapsto \sigma(1, t), \quad 0 < t < \pi$$

på $\mathcal{S}$. Beskriv kurven og find dens længde ℓ.

4. Betragt området $\sigma(R)$ på $\mathcal{S}$, hvor R er rektanglet

$$R = \{(u, v) \mid 0 < u < 1, 0 < v < \pi\}.$$

Bestem arealet af dette område på $\mathcal{S}$.

5. Bestem fladens krumningsmål (Gauss krumning) K i ethvert punkt $\sigma(u, v)$, hvor $-2 < u < 2$. Udregn integralet $\int_{\sigma(R)} K\, d\mathcal{A}_\sigma$ af K over $\sigma(R)$.

6. Bestem den geodætiske krumning κ_g af kurven γ, og udregn integralet $\int_0^\ell \kappa_g\, ds$ af κ_g langs γ.

7. Forklar sammenhængen mellem resultaterne fra spørgsmål 5 og 6 ud fra Gauss-Bonnet sætningen.

SLUT