Matematik 3GE

ENGLISH TEXT

Written exam, 4 hours. All course material is allowed during the exam (alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt).
There are 3 problems divided into 11 questions. All questions are given approximately the same weight.

Problem 1

Let S be the parametrised surface given by

$$\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \to (u,v,uv) \in \mathbb{R}^3$$

(a) *Prove* that S is a regular surface.

(b) *Find* the Gauss curvature K and the mean curvature H of S expressed as functions of the parameters (u,v).

(c) *Find* all the asymptotic curves on S.

(d) *Find* the principal curvatures of S at the point $P = (0,0,0)$ and *show* that the principal directions at P are given by vectors $(1,1,0)$ and $(1,-1,0)$.

Problem 2

Let $\mathcal{H}$ be the regular surface of revolution in $\mathbb{R}^3$ given by

$$\mathcal{H} = \{((2-cost)cosu,(2-cost)sinu,sint) \mid -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{ and } -\pi < u \le \pi\}$$

(a) *Prove* that the Gauss curvature K of $\mathcal{H}$ is always negative

(b) *Prove* that $\{(x,y,0) \mid x^2+y^2=1\}$ is the unique parallel of $\mathcal{H}$ which is a closed geodesic.

(c) Let $s \to \gamma(s)$ be an arbitrary *closed* regular curve on $\mathcal{H}$. We denote by $r(s)$ the distance from z-axis to $\gamma(s)$ and by $\theta(s)$ the angle between the parallel through the point $\gamma(s)$ and the vector tangent to γ at $\gamma(s)$.

  i. *Prove* that the function $\theta(s)$ has value zero in at least one point s_0 .

  ii. Suppose that γ is a *closed geodesic*. *Prove* that $r(s_0) = 1$ or $r(s) > r(s_0)$ for all $s \neq s_0$.

  HINT: You can use the Clairaut relation $rcos\theta = c$.

  iii. *Prove* that any closed geodesic γ on $\mathcal{H}$ coincides with the parallel $r = 1$.

Opgavesættet fortsættes p side 2

Problem 3

Let $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ be a closed, connected, regular oriented surface with Gauss curvature K non-zero everywhere.

(a) *Prove* that the image of the Gauss map, $N(\mathcal{F})$, is an open subset of the unit sphere S^2 of $\mathbb{R}^3$.

HINT: Use the inverse function theorem for regular surfaces.

(b) *Prove* that the Gauss map from $\mathcal{F}$ to S^2 is surjective.

(c) *Prove* that if the Gauss curvature K of $\mathcal{F}$ is everywhere positive, then the mean curvature H of $\mathcal{F}$ is never zero and has constant sign.

(d) *FACT (which can be used without proof):*

Suppose that $\mathcal{F}$ is an arbitrary closed, connected, regular surface in $\mathbb{R}^3$. Then

$$\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F} = A \cup B$$

where A and B are open, connected, disjoint subsets of $\mathbb{R}^3$ and A is bounded. $\mathcal{F}$ can be oriented by choosing the unit normal vector N to point towards A everywhere on $\mathcal{F}$.

If the mean curvature H of $\mathcal{F}$ has constant sign, then A is convex.

Prove that if $\mathcal{F}$ is a closed connected regular surface in $\mathbb{R}^3$ such that its Gauss curvature is greater than zero at every point, then the Gauss map is injective and hence a diffeomorphism from $\mathcal{F}$ to S^2.

Good luck !

Opgavesættet fortsættes p side 3

DANSK TEKST

EKSAMEN i 3GE - sommer 2000

Skriftlig eksamen, 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.
Da er 3 opgaver fordelt i 11 underopgaver. Alle underopgaver vægtes tilnærmelsesvis ens.

Opgave 1

Lad S være fladen parametriseret ved

$$\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \to (u,v,uv) \in \mathbb{R}^3$$

(a) *Vis* at S er en regulær flade.

(b) *Bestem* Gauss krumningen K og middelkrumningen H af S som funktioner af parametrene (u,v).

(c) *Bestem* samtlige asymptotiske kurver på S.

(d) *Bestem* de principale krumninger af S i punktet $P = (0,0,0)$ og *vis* at de principale retninger i P er givet ved vektorerne henholdsvis $(1,1,0)$ og $(1,-1,0)$.

Opgave 2

Lad $\mathcal{H}$ være den regulære omdrejningsflade i $\mathbb{R}^3$ givet ved

$$\mathcal{H} = \{((2-cost)cosu, (2-cost)sinu, sint) \mid -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{ og } -\pi < u \leq \pi\}$$

(a) *Vis* at Gauss krumningen K af $\mathcal{H}$ er negativ overalt.

(b) *Vis* at $\{(x,y,0) \mid x^2+y^2=1\}$ er den eneste parallelkurve på $\mathcal{H}$ som er en lukket geodætisk kurve.

(c) Lad $s \to \gamma(s)$ være en vilkårlig *lukket* regulær kurve på $\mathcal{H}$. Vi betegner med $r(s)$ afstanden fra z-aksen til $\gamma(s)$, og med $\theta(s)$ vinklen mellem parallelkurven gennem punktet $\gamma(s)$ og tangentvektoren til γ i $\gamma(s)$.

   i. *Vis* at funktionen $\theta(s)$ antager værdien nul i mindst ét punkt s_0 .

   ii. Antag nu, at γ er en *lukket geodætisk kurve*. *Vis* at $r(s_0) = 1$ eller $r(s) > r(s_0)$ for alle $s \neq s_0$.

   VINK: Man kan bruge Clairauts relation $rcos\theta = c$.

   iii. *Vis* at parallelkurven $r = 1$ er den eneste lukkede geodætiske kurve γ på $\mathcal{H}$.

Opgavesættet fortsættes på side 4

Opgave 3

Lad $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ være en kompakt, sammenhængende, orienteret, regulær overflade hvis Gauss krumning K overalt er forskellig fra nul.

(a) *Vis* at billedet ved Gauss afbildingen, $N(\mathcal{F})$, er en åben delmængde af enhedskuglen S^2 i $\mathbb{R}^3$.
VINK: Brug invers funktion sætningen for regulære overflader.

(b) *Vis* at Gauss afbildingen $N : \mathcal{F} \to S^2$ er surjektiv.

(c) *Vis* at hvis Gauss krumningen K overalt er positiv, da er middelkrumningen H af $\mathcal{F}$ aldrig nul og har konstant fortegn.

(d) *FAKTUM (kan benyttes uden bevis):*

Antag at $\mathcal{F}$ er en kompakt, sammenhængende, orienteret, regulær overflade i $\mathbb{R}^3$. Da er

$$\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F} = A \cup B$$

hvor A og B er åbne disjunkte delmængder af $\mathbb{R}^3$ og A er begrænset. $\mathcal{F}$ kan orienteres ved at vælge den normale enhedsvektor overalt til at pege ind i A. Hvis middelkrumningen H af $\mathcal{F}$ har konstant fortegn, da er A konvex.

Vis at hvis $\mathcal{F}$ er en kompakt, sammenhængende, orienteret, regulær overflade i $\mathbb{R}^3$, hvis Gauss krumning overalt er positiv, da er Gauss afbildingen en diffeomorfi af $\mathcal{F}$ på S^2.

God fornøjelse !