MAT 3GEx F2005. PLAN 3.

Program for forelæsningen 19/5

Målet for denne uge er Kapitel 7. Der er nyt stof i alle afsnittene, men primært i 7.3-7.6 (7.4 springer vi over).

Det vigtigste resultat er Proposition 7.2 og anvendelsen af eksistens- og entydighedssætningen for sædvanlige differentialligninger i beviset side 158-160.

Program for øvelserne 19/5

1 Lad $\mathcal{S}_1$ =enhedskuglefladen og $\mathcal{S}_2$=ellipsoiden, se Pressley p. 73, opg. 4.9. Lad $f\colon \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ være givet ved $f(x, y, z) = (ax, by, cz)$.

a) Vis, at f er en diffeomorfi.

b) Lad $p = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \in \mathcal{S}_1$. Bestem tangentrummene $T_p\mathcal{S}_1$ og $T_{f(p)}\mathcal{S}_2$ (angiv baser) og differentialet $df_p\colon T_p\mathcal{S}_1 \to T_{f(p)}\mathcal{S}_2$ (angiv matrix med hensyn til baserne).

2 Lad $\mathcal{S}_1$ og $\mathcal{S}_2$ være glatte flader, og lad $f\colon \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ være en glat afbildning. Givet et punkt $p \in \mathcal{S}_1$ og kort $\sigma_i\colon U_i \to \mathbb{R}^3$, på $\mathcal{S}_i$ for $i = 1, 2$, således at $p \in \sigma_1(U_1)$ og $f(p) \in \sigma_2(U_2)$. Vis, at matricen for differentialet $df_p\colon T_p\mathcal{S}_1 \to T_{f(p)}\mathcal{S}_2$ med hensyn til baserne $\sigma'_{1u}, \sigma'_{1v}$ for $T_p\mathcal{S}_1$ og $\sigma'_{2u}, \sigma'_{2v}$ for $T_p\mathcal{S}_2$ er lig Jacobimatricen for $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$.

3. Lad V, W være endelig dimensionale vektorrum med indre produkter (betegnet med en prik), og lad $f\colon V \to W$ være lineær. Vis, at følgende er ækvivalent:

(a) Der findes $\lambda > 0$ således at $f(v_1) \cdot f(v_2) = \lambda v_1 \cdot v_2$ for alle $v_1, v_2 \in V$.

(b) f er injektiv og vinkelbevarende, dvs vinklen mellem $f(v_1)$ og $f(v_2)$ er lig vinklen mellem v_1 og v_2 for alle ikke-nul vektorer $v_1, v_2 \in V$.

(c) f er injektiv og vinkelretbevarende, dvs $v_1 \cdot v_2 = 0$ medfører $f(v_1) \cdot f(v_2) = 0$.

Hvis disse betingelser er opfyldt kaldes f *konform*.

4. Lad $f\colon \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ være en diffeomorfi.

Vis, at f er en isometri hvis og kun hvis $df_p\colon T_p\mathcal{S}_1 \to T_{f(p)}\mathcal{S}_2$ er en isometri for alle $p \in \mathcal{S}_1$ (dvs. $\|df_p(v)\| = \|v\|$ for alle $v \in T_p\mathcal{S}_1$).

Vis, at f er konform hvis og kun hvis $df_p\colon T_p\mathcal{S}_1 \to T_{f(p)}\mathcal{S}_2$ er konform (ifølge opgave 3) for alle $p \in \mathcal{S}_1$

5. Formuler og bevis en invers funktions sætning for glatte afbildninger mellem flader.

6. Lad $f\colon \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ være glat. Hvis der for hvert $p \in \mathcal{S}_1$ findes en åben omegn V af p i $\mathcal{S}_1$ således at $f(V)$ er åben i $\mathcal{S}_2$ og restriktionen af f til V er en isometri $V \to f(V)$, kaldes f en *lokal isometri*.

Giv et eksempel på en lokal isometri som ikke er en isometri.

Vis, at f er en lokal isometri hvis og kun hvis $df_p\colon T_p\mathcal{S}_1 \to T_{f(p)}\mathcal{S}_2$ er en isometri for alle $p \in \mathcal{S}_1$.

Skriftlig opgave Eksamen 3GE vinter 2001-2, opgave 2, spørgsmål 2–5.

NB: I spørgsmål 2 skal $(u, v) \in U$. I spørgsmål 3 betyder orienteringsbevarende for f, at den tilsvarende omparametrisering fra σ til $f \circ \sigma$ er orienteringsbevarende. I spørgsmål 5 skal $\mathbf{x}''_{uv} = (1, 0, -\frac{1}{2})$ (betydningsløs ændring).