MAT 3GEx F2005. PLAN 2.

Målet for denne uges to forelæsninger er at nå frem til og med Kapitel 6 i Pressley.

Program for forelæsningen 9/5

Kurver og flader, afbildninger mellem flader. Geom1-noter Kapitel 7 side 7-14. Note 1-2. Pressley side 106-108 (om konforme afbildninger).

Program for forelæsningen 12/5

Kurveteoriens hovedsætning (Pressley, side 30-31 samt side 42-43)

Globale egenskaber ved kurver. Greens sætning og den isoperimetriske ulighed (side 50-54).

Eksempler på flader: Retlinede flader (side 78-81), kvadrikker (side 84-89), tangentflade (side 103-105).

Navlepunkter (side 133 samt 144-145).

Program for øvelserne 12/5

1 Lad $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ og lad $W_i \subset \mathbb{R}^3$, $i \in I$, være en åben overdækning af $\mathcal{S}$ (dvs. hver W_i er åben i $\mathbb{R}^3$ og $\mathcal{S} \subset \cup_{i\in I} W_i$). Antag, at $\mathcal{S} \cap W_i$ er en glat flade for hvert i. Vis, at $\mathcal{S}$ er en glat flade.

2 (se også Plan 1, opgave 3). Lad $\mathcal{S}$ være en glat flade og lad $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$. Vis, at hvis $\mathcal{S}_1$ er en glat flade findes en åben mængde $W \subset \mathbb{R}^3$ så $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} \cap W$ (Vink: Anvend Geom1-noter, Korollar 7.4).

3 Lad $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$. Vis, at $\mathcal{S}$ er en glat flade hvis og kun hvis følgende er opfyldt. For hvert $p \in \mathcal{S}$ findes en åben omegn $W \subset \mathbb{R}^3$ af p og en glat funktion $f\colon W \to \mathbb{R}$ således at

(i) $\mathcal{S} \cap W = \{(x, y, z) \in W \mid f(x, y, z) = 0\}$

(ii) $(f'_x(p), f'_y(p), f'_z(p)) \neq (0, 0, 0)$.

Sammenlign med Pressley Thm. 4.1. Formuler en tilsvarende sætning for kurver.

4. Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ være åben og $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ glat. Lad $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ være en glat kurve. Antag $\operatorname{rang} Jf(p) = 2$ for alle $p \in f^{-1}(\mathcal{C})$. Vis, at hvis $f^{-1}(\mathcal{C})$ ikke er tom, så er den en glat flade (Vink: Udnyt Opgave 3).

5. Antag, at $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ er en kurve. Vis, at følgende konstruktioner giver anledning til glatte flader (udnyt Opgave 4):

a) $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \mathcal{C}\}$ (generaliseret cylinder).

b) $\mathcal{S} = \{(tx, ty, t) \mid t \neq 0, (x, y) \in \mathcal{C}\}$ (generaliseret kegle).

c) Antag $r > 0$ for alle $(r, s) \in \mathcal{C}$. Lad $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in \mathcal{C}\}$ (omdrejningsflade).

6. Lad $f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, hvor $\mathcal{S}$ er en glat flade. Giv en fornuftig definition af at f er *glat*. Formuler og bevis en sætning som svarer til Geom1-noter Thm. 7.9 (a)$\Leftrightarrow$(c).

Skriftlig opgave Eksamen 3GE sommer 2003, opgave 2 (links til gamle eksamensopgaver findes på hjemmesiden).