MAT 3GEx F2005. PLAN 1.

Program for forelæsningen 28/4

Kurver og flader. Geom1-noter Kapitel 7, side 1-7 (erstatter Pressley, Afsnit 4.1-4.2)

Globale egenskaber ved kurver. Pressley, Afsnit 3.1-3.2 (Jordans kurvesætning, Greens sætning smat den isoperimetriske ulighed).

Program for den første øvelsesgang

1 (se også Pressley opgave 4.2). Vis, at cylinderen $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ kan gives et atlas bestående af kun et kort.

2 (se også Pressley opgave 4.5). Vis, at ethvert atlas for kuglefladen indeholder mindst to kort.

3 Lad $\mathcal{S}$ være en glat flade, og lad $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} \cap W$ hvor $W \subset \mathbb{R}^3$ er åben. Vis, at $\mathcal{S}_1$ er en glat flade.

4. Lad $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$ være xy-planen, lad $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > v\}$, og lad $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ være givet ved $\sigma(u, v) = (u + v, uv, 0)$. Er (U, σ) et kort på $\mathcal{S}$? Erstat dernæst betingelsen $u > v$ med $u \neq v$ i definitionen af U, og besvar samme spørgsmål.

5. Giv et eksempel på en niveaumængde $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\}$ som er en glat flade, og dog findes der et punkt i $\mathcal{S}$ for hvilket $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (0, 0, 0)$ (se også Geom1-øvelsesblad 1b, opgave 3).

6. Lad $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid xyz = c\}$ hvor $c \in \mathbb{R}$. Vis, at $\mathcal{S}$ er en glat flade hvis $c \neq 0$. Bestem $\mathcal{S}$ explicit for $c = 0$. Bevis, at det *ikke* er en glat flade.

Skriftlig opgave

Lad $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid z = x^2 - y^2\}$, den *hyperbolske paraboloide*. Vis, at $\mathcal{S}$ er en glat flade. Definer

$$\begin{aligned} \sigma_1(u, v) &= (u + v, u - v, 4uv) \qquad && (u, v) \in U_1 = \{(u, v) \mid u > v\} \\ \sigma_2(r, \theta) &= (r \cosh \theta, r \sinh \theta, r^2) \qquad && (r, \theta) \in U_2 = \{(r, \theta) \mid r > 0\}. \end{aligned}$$

Vis, at σ_1 og σ_2 er kort på $\mathcal{S}$, og at deres billeder i $\mathcal{S}$ er

$$\sigma_1(U_1) = \{(x, y, z) \in \mathcal{S} \mid y > 0\} \quad \text{og} \quad \sigma_2(U_2) = \{(x, y, z) \in \mathcal{S} \mid x > |y|\}.$$

Udgør de to kort et atlas?

Bestem delmængderne $V_i = \sigma_i^{-1}(\sigma_1(U_1) \cap \sigma_2(U_2)) \subseteq U_i$ (se eventuelt figuren Pressley side 64), og find transitions afbildningen $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 : V_2 \to V_1$.