Konveksitet i funktionalanalyse

Bachelorprojekt af

Randi Rohde & Martin Ehmsen

4. februar 2004

Vejleder: Mikael Rørdam

Forord

Denne opgave er udarbejdet som vores bachelorprojekt udført i perioden 1/9 - 31/12 2003 ved Institut for Matematik og Datalogi, Syddansk Universitet Odense.
Vi vil gerne takke vores vejleder Mikael Rørdam for gode råd og vejledning.

Randi Rohde og Martin Ehmsen

Indhold

Indledning

I dette bachelorprojekt vil vi gennemgå nogle af de centrale resultater omhandlende konvekse mængder og deres ekstremalpunkter i både funktionalanalysen og operatoralgebra teori.

Opgaven består af tre dele, hvor målet i første del er at bevise, at enhver kompakt konveks delmængde i et lokalt konvekst vektorrum har ekstremalpunkter. Vi bygger op til sætningen ved at introducere begreber som den svage topologi og ekstremalpunkter.

Anden del af projektet indeholder en række resultater om C^*-algebraer. Disse resultater er inkluderet i projektet, eftersom vi ikke havde kendskab til emnet, da vi begyndte projektet. Vi vil bl.a. vise, at en kommutativ C^*-algebra kan repræsenteres som $C(K)$ for et kompakt Hausdorffrum, samt at der er en sammenhæng mellem partielle isometrier og projektioner. Disse resultater vil blive brugt til at bevise hovedsætningen, der karakteriserer ekstremalpunkterne i enhedskuglen for en unital C^*-algebra, som en speciel type partielle isometrier. Sætningen giver endvidere, at de eneste invertible ekstremalpunkter i enhedskuglen er de unitære operatorer.

I sidste del vil vi bevise, at ethvert element i den åbne enhedskugle for en unital C^*-algebra kan skrives som et middel af et helt antal unitære elementer. Dette giver anledning til, at ethvert element i en C^*-algebra er summen af blot tre unitære elementer.
I et eksempel vil vi benytte sætningen til at beskrive normen af en lineær afbildning mellem to C^*-algebraer, samt give et eksempel på en operator der ikke kan skrives som en konveks kombination af unitære elementer.

Det skal iøvrigt bemærkes, at enhver C^*-algebra i opgaven er antaget unital.

Den gennemgåede teori i først del bygger især på lærerbøgerne "Analysis Now" af Gert K. Pedersen og "Fundamentals Of The Theory Of Operator Algebras" af Kadison og Ringrose. Den resterende del af opgaven tager udgangspunkt i Zhu's lærerbog "An Introduction To Operator Algebras" samt originalartiklerne "Means And Convex Combinations Of Unitary Operators" og "Isometries Of Operator Algebras".
De sætninger og lemmaer, der indgår i opgaven, tager udgangspunkt i de angivne lærerbøger og artikler, hvorimod eksemplerne er egne regnede opgaver.

Læseren forudsættes at have kendskab til topologi og funktionalanalyse. Ved udarbejdelsen af opgaven er resultater fra kapitel 1 - 6 i Zhu's bog antaget kendt og benyttes uden kommentarer eller bevis.

1. Den svage topologi

Dette afsnit er en introduktion til den svage topologi på et vektorrum. Vi vil gøre rede for en række egenskaber ved vektorrum udstyret med den svage topologi, som skal give forudsætning for at forstå og bevise Krein-Milmans sætning.
Som afslutning gennemgås et par eksempler for at illustrere anvendelser af teorien.[1]

Betragt et vektorrum V med en separerende familie af seminormer $\mathbb{F}$, dvs. hvis $x \neq y$ i V og dermed $x - y \neq 0$ findes $m \in \mathbb{F}$ så $m(x-y) \neq 0$.

Altså vil mængden $\mathbb{F} \times V$ af funktioner $x \mapsto m_y(x) = m(x-y)$, hvor $(m, y) \in \mathbb{F} \times V$ skille punkter i V. For hvis $x_1 \neq x_2$ i V findes $(m, y) \in \mathbb{F} \times V$ så $m_y(x_1 - x_2) = m((x_1 - x_2) - y) \neq 0$, da vi blot kan vælge $y \neq x_1 - x_2$ og m som ovenfor.

Topologien på V induceret af $\mathbb{F} \times V$ kaldes den svage topologi $\sigma(V, \mathbb{F})$ induceret af $\mathbb{F}$.
Da m tager værdier på $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, er en basis for den svage topologi $\sigma(V, \mathbb{F})$ givet ved

$$\{(m^{(1)}_{y_1})^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap (m^{(n)}_{y_n})^{-1}(U_n) : n \in \mathbb{N}, (m^{(j)}, y_j) \in \mathbb{F} \times V, U_j \in \tau_{\mathbb{R}}, 1 \leq j \leq n\} \tag{1}$$

hvor $\tau_{\mathbb{R}}$ er den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$ restingeret til $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Enhver åben mængde om $x_0 \in \mathbb{R}$ indeholder mængder på formen

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

for et vist $\varepsilon > 0$.
En omegnsbasis af $x_0 \in V$ er mængder på formen $\bigcap_{k=1}^n (m^{(k)}_{y_k})^{-1}(B_\varepsilon(m^{(k)}_{y_k}(x_0)))$ for $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \bigcap_{k=1}^n (m^{(k)}_{y_k})^{-1}(B_\varepsilon(m^{(k)}_{y_k}(x_0))) &= \bigcap_{k=1}^n \{x \in V : |m^{(k)}_{y_k}(x) - m^{(k)}_{y_k}(x_0)| < \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{k=1}^n \{x \in V : |m^{(k)}(x - y_k) - m^{(k)}(x_0 - y_k)| < \varepsilon\} \end{aligned} \tag{2}$$

Ved at tage $y_k = x_0$ fås mængden $\bigcap_{k=1}^n \{x \in V : m^{(k)}(x - x_0) < \varepsilon\}$, men af trekantsuligheden fås samtidig

$$\begin{aligned} m^{(k)}(x - x_0) + m^{(k)}(x_0 - y_k) \geq m^{(k)}(x - y_k) \iff \\ m^{(k)}(x - y_k) - m^{(k)}(x_0 - y_k) \leq m^{(k)}(x - x_0). \end{aligned}$$

Så med samme $m^{(k)}$ og ε er

$$\{x \in V : |m^{(k)}(x - x_0)| < \varepsilon\} \subseteq \{x \in V : |m^{(k)}(x - y_k) - m^{(k)}(x_0 - y_k)| < \varepsilon\}.$$

Heraf vil ethvert $x_0 \in V$ have en omegnsbasis på formen

$$\bigcap_{k=1}^n \{x \in V : m^{(k)}(x - x_0) < \varepsilon\} = \bigcap_{k=1}^n \{x \in V : m^{(k)}_{x_0}(x) < \varepsilon\} \tag{3}$$

mht. $\sigma(V, \mathbb{F})$.

[1] Dette afsnit tager udgangspunkt i [**Ped95**, Kap. 2.4] og [**KR97**, Kap. 1.3]

Lemma 1.1. *Den svage topologi $\sigma(V,\mathbb{F})$ er en Hausdorff topologi på V.*

Bevis. Lad $x, y \in V$ med $x \neq y$. Da $\mathbb{F} \times V$ skiller punkter i V kan vi finde $(m, z) \in \mathbb{F} \times V$, så $m_z(x-y) \neq 0$. Sæt $m_z(x-y) = r$.
Lad $U = \{q \in V : m_z(q-x) < \frac{r}{2}\}$ og $U' = \{q \in V : m_z(q-y) < \frac{r}{2}\}$.
Dermed er U og U' åbne omegne om hhv. x og y mht. $\sigma(V,\mathbb{F})$.
Antag til modstrid at $U \cap U' \neq \emptyset$, dvs. der findes $q \in U$ så $m_z(q-y) < \frac{r}{2}$. Ved brug af trekantsuligheden fås

$$\begin{aligned} m_z(x-y) &\leq m_z(x-q) + m_z(q-y) \\ &= m_z(q-x) + m_z(q-y) \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\ &= r. \end{aligned}$$

Dette er en modstrid, da $m_z(x-y) = r$. Så $U \cap U' = \emptyset$, dvs. $\sigma(V,\mathbb{F})$ er en Hausdorff topologi på V. $\square$

Lemma 1.2. *Den svage topologi $\sigma(V,\mathbb{F})$ er den svageste topologi på V, som gør enhver funktion i $\mathbb{F}$ kontinuert.*

Bevis. Først vises, at enhver funktion i $\mathbb{F}$ er kontinuert mht. $\sigma(V,\mathbb{F})$.
Lad $m \in \mathbb{F}$ være valgt vilkårligt og lad $U \subseteq \mathbb{R}$ være en vilkårlig åben mængde mht. $\tau_{\mathbb{R}}$.
Fra konstruktionen (1) af basen for $\sigma(V,\mathbb{F})$ ses at $m^{-1}(U)$ er åben, og dermed er m kontinuert.

Omvendt, hvis hver af seminormerne $m \in \mathbb{F}$ er kontinuerte mht. en topologi τ på V, så vil der for enhver åben mængde $U \subseteq \mathbb{R}$ gælde, at $m^{-1}(U)$ er åben mht. τ. Hermed er $(m^{(j)}_{y_j})^{-1}(U_j)$ åben mht. τ for alle $n \in \mathbb{N}, (m^{(j)}, y_j) \in \mathbb{F} \times V, U_j \in \tau_{\mathbb{R}}, 1 \leq j \leq n$. Dermed er en enhver mængde i basen (1) åben, så de åbne mængder mht. den svage topologi $\sigma(V,\mathbb{F})$ er åbne mht. τ, når m er kontinuert mht. τ, jvnf. (1).

Altså er $\sigma(V,\mathbb{F})$ den svageste topologi på V der gør ethvert m i $\mathbb{F}$ kontinuert. $\square$

I det følgende betragtes et vektorrum V over skalarlegemet $\mathbb{K}$, som enten kan være de reelle eller de komplekse tal.

Definition 1.3. *Et vektorrum V udstyret med en Hausdorff topologi så vektoroperationerne $(x, y) \mapsto x + y$ fra $V \times V \mapsto V$ og $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$, fra $\mathbb{K} \times V \mapsto V$ er kontinuerte, kaldes et topologisk vektorrum.*

Lemma 1.4. *Antag at V er et vektorrum, $\mathbb{F}$ er en separerende familie af seminormer på V, og φ er en afbildning fra et topologisk rum S ind i V.*
Da er φ kontinuert mht. den svage topologi $\sigma(V,\mathbb{F})$, hvis og kun hvis enhver af de sammensatte afbildninger $m \circ \varphi : S \mapsto \mathbb{K}$ er kontinuerte for $m \in \mathbb{F}$.

Bevis. Da hvert $m \in \mathbb{F}$ er kontinuert mht. $\sigma(V,\mathbb{F})$ vil $m \circ \varphi$ være kontinuert, når φ er kontinuert.

Antag omvendt at $m \circ \varphi$ er kontinuert for hvert $m \in \mathbb{F}$. Vi skal vise, at $\varphi^{-1}(U)$ er åben i S, når U er åben i V mht. $\sigma(V, \mathbb{F})$. Det er tilstrækkeligt at vise påstanden, når U er en af de åbne mængder fra basen for $\sigma(V, \mathbb{F})$. Så lad U være en åben omegn om $x_0 \in V$ på formen $\{x \in V : m^{(k)}(x - x_0) < \varepsilon, k = 1, \dots, n\}$ for et vist $\varepsilon > 0$.
Da $m^{(1)}, \dots, m^{(n)} \in \mathbb{F}$ er $m^{(k)} \circ \varphi : S \mapsto \mathbb{K}$ kontinuert for $k = 1, \dots, n$, og eftersom

$$\varphi^{-1}(U) = \{s \in S : \varphi(s) \in U\} = \{s \in S : m^{(k)}(\varphi(s) - x_0) < \varepsilon, k = 1, \dots, n\}$$

er $\varphi^{-1}(U)$ åben. □

LEMMA 1.5. *Den svage topologi $\sigma(V, \mathbb{F})$ gør V til et topologisk vektorrum.*

BEVIS. Af 1.1 fås at V er et Hausdorffrum mht. $\sigma(V, \mathbb{F})$, så vi mangler blot at vise, at vektoroperationerne er kontinuerte.

Jvnf. 1.4 er det tilstrækkeligt at vise, at afbildningerne $(x, y) \mapsto m(x + y)$ og $(\alpha, x) \mapsto m(\alpha x)$ er kontinuerte i produkttopologien på hhv. $V \times V$ og $\mathbb{K} \times V$, hvor V er udstyret med den svage topologi.

Lad $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ være et net i $V \times V$ så $\lim_\alpha (x_\alpha, y_\alpha) = (x, y)$. Vi skal vise at $\lim_\alpha m(x_\alpha + y_\alpha) = m(x + y)$. Da

$$\lim_\alpha |m(x_\alpha + y_\alpha) - m(x + y)| \leq \lim_\alpha |m(x_\alpha + y_\alpha - x - y)| = 0$$

er $m(x + y)$ kontinuert i $V \times V$. Et tilsvarende argument viser, at $m(\alpha x)$ er kontinuert i $\mathbb{K} \times V$. □

DEFINITION 1.6. *Et topologisk vektorrum V kaldes et lokalt konvekst vektorrum, hvis der findes en basis for topologien, som udgøres af konvekse mængder.*

LEMMA 1.7. *Et vektorrum V udstyret med den svage topologi $\sigma(V, \mathbb{F})$ er et lokalt konvekst vektorrum.*

BEVIS. Vi skal vise, at for et vilkårligt $x_0 \in V$ er hver af mængderne $U = \{x \in V : m^{(k)}(x - x_0) < \varepsilon, k = 1, \dots, n, \varepsilon > 0\}$ konveks, idet fællesmængden af konvekse mængder igen er konveks.

Lad $y, z \in U$ og $0 < t < 1$. For $k = 1, \dots, n$ er

$$\begin{aligned} m^{(k)}(((1-t)y + tz) - x_0) &= m^{(k)}((1-t)(y - x_0) + t(z - x_0)) \\ &\leq m^{(k)}((1-t)(y - x_0)) + m^{(k)}(t(z - x_0)) \\ &= (1-t)m^{(k)}(y - x_0) + tm^{(k)}(z - x_0) \\ &< (1-t)\varepsilon + t\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Så $(1-t)y + tz \in U$ og U er dermed konveks. □

Ofte er seminormerne, der bestemmer den svage topologi på V på formen $x \mapsto |\rho(x)|$, hvor ρ tilhører en separerende familie $\mathbb{F}$ af lineære funktionaler på V. Hvis vi for $\rho \in \mathbb{F}$ definerer $p_\rho(x) = |\rho(x)|$, vil den svage topologi på V være induceret af familien $\{p_\rho : \rho \in \mathbb{F}\}$.

I dette tilfælde siger vi stadig, at den svage topologi er induceret af $\mathbb{F}$ og skriver også $\sigma(V, \mathbb{F})$. I denne topologi vil ethvert x_0 i V have en omegnsbasis bestående af mængder på formen

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{x \in V : |\rho^{(k)}(x) - \rho^{(k)}(x_0)| < \varepsilon\} \tag{4}$$

jvnf. ligning (2).

Vi vil nu definere begrebet en Minkowski funktional på et vektorrum. Definitionen og egenskaber for Minkowski funktionaler benyttes til at bevise 1.11.

Definition 1.8. *En funktion $m : V \mapsto \mathbb{R}$ på et vektorrum V kaldes en Minkowski funktional, såfremt m opfylder*

(*i*) $m(x+y) \leq m(x) + m(y)$ *for alle* $x, y \in V$
(*ii*) $m(sx) = sm(x)$ *for alle* $s \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ *og* $x \in V$

Lemma 1.9. *Lad C være en åben, konveks omegn om 0 i et topologisk vektorrum V og definer*

$$m(x) = \inf\{s > 0 : s^{-1}x \in C\}$$

Da er $m : V \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ en Minkowski funtional på V og

$$C = \{x \in V : m(x) < 1\}.$$

Bevis. Da $n^{-1}x \to 0$ for $n \to \infty$ gælder, at for enhver åben omegn M om $0 \in V$ eksisterer der et $n_0 \in \mathbb{N}$ så $n^{-1}x \in M$ for $n \geq n_0$. Specielt giver dette at $m(x) < \infty$ for alle $x \in V$.

For at vise egenskab (i) i 1.8 lader vi $x, y \in V$ og $s, t \in \mathbb{R}_+$ så $s^{-1}x, t^{-1}y \in C$.

$$\begin{aligned}(s+t)^{-1}(x+y) &= (s+t)^{-1}s(s^{-1}x) + (s+t)^{-1}t(t^{-1}y) \\ &= \frac{s}{s+t}(s^{-1}x) + \frac{t}{s+t}(t^{-1}y)\end{aligned}$$

Sæt nu $r = \frac{s}{s+t}$. Da er $0 < r < 1$ og $1 - r = \frac{s+t}{s+t} - \frac{s}{s+t} = \frac{t}{s+t}$.
Da C er konveks og $s^{-1}x, t^{-1}y \in C$ vil $r(s^{-1}x) + (1-r)(t^{-1}y) \in C$.

Dvs. $(s+t)^{-1}(x+y) \in C$. Eftersom $m(x+y) = \inf\{p > 0 : p^{-1}(x+y) \in C\}$ er $m(x+y) \leq s+t$.

Lad $\varepsilon > 0$ være givet vilkårligt. Af argumentet ovenfor ses $m(x) + \frac{\varepsilon}{2} \in \{s > 0 : s^{-1}x \in C\}$ og $m(y) + \frac{\varepsilon}{2} \in \{t > 0 : t^{-1}y \in C\}$, dvs. $m(x+y) \leq m(x) + m(y) + \varepsilon$.
Heraf fås at $m(x+y) \leq m(x) + m(y)$.

Egenskab (ii) ses af det følgende

$$\begin{aligned}sm(x) &= s\inf\{t > 0 : t^{-1}x \in C\} \\ &= \inf\{st > 0 : t^{-1}x \in C\} \\ &= \inf\{r = st > 0 : r^{-1}(sx) \in C\} \\ &= m(sx).\end{aligned}$$

Det ses nu, at m er en Minkowski funktional.

At $C = \{x \in V : m(x) < 1\}$ ses ved at vise begge inklusioner.
Antag først at $x \in C$. Så findes et $\varepsilon > 0$, så $(1+\varepsilon)x \in C$, da C er åben.

Men da $m(x) = \inf\{s > 0 : s^{-1}x \in C\}$ er $m(x) \leq (1+\varepsilon)^{-1} < 1$.
Antag dernæst, at $m(x) < 1$ for et $x \in V$. Vi kan finde $0 < s < 1$ således at $s^{-1}x \in C$. Da $0 \in C$ og C er konveks vil $x \in C$, idet $x = (1-s)0 + s(s^{-1}x)$.

Altså er $C = \{x \in V : m(x) < 1\}$. □

For at bevise Sætning 1.11 får vi brug for følgende sætning, som angives uden bevis. Beviset kan ses i [**Ped95**, p. 57].

SÆTNING 1.10. *Lad m være en Minkowski funktional på et reelt vektorrum V og φ_0 en lineær funktional på et lineært underrum D af V, så $\varphi_0(y) \leq m(y)$ for alle $y \in D$. Da eksisterer en lineær funktional φ på V domineret af m, så $\varphi|_D = \varphi_0$.*

Nu kan vi vise følgende sætning, der senere benyttes i beviset for Krein-Milmans sætning.

SÆTNING 1.11. *Lad A og B være disjunkte, ikke tomme, konvekse delmængder af et topologisk vektorrum V. Hvis A er åben, findes en lineær og kontinuert funktional $\varphi : V \mapsto \mathbb{K}$ og et $t \in \mathbb{R}$ så*

$$\operatorname{Re}\varphi(x) < t \leq \operatorname{Re}\varphi(y) \tag{5}$$

for alle $x \in A$ og $y \in B$.

BEVIS. Antag først at skalarrummet er de reelle tal, dvs. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Vælg $x_0 \in A$ og $y_0 \in B$. Sæt $z = y_0 - x_0$ og $C = A - B + z$.

Mængden C er en åben omegn om 0, da

$$C = \bigcup_{y \in B}(A - y + z) = \bigcup_{y \in B}(A + (y_0 - y) - x_0)$$

er en forening af åbne mængder, og $0 \in C$ da $y_0 \in B$ og $x_0 \in A$.

Det ses, at C også er konveks. For vælg $a, b \in C$ vilkårligt og lad $0 < t < 1$.
Da $a, b \in C$ findes $a', b' \in A$ og $y', y'' \in B$ så $a = a' - y' + z$ og $b = b' - y'' + z$.
Heraf fås

$$\begin{aligned}(1-t)a + tb =&(1-t)(a' - y' + z) + t(b' - y'' + z)\\ =&(1-t)a' - (1-t)y' + tb' - ty'' + z\\ =&(1-t)a' + tb' - ((1-t)y' + ty'') + z.\end{aligned}$$

Da A og B er konvekse vil $(1-t)a' + tb' \in A$ og $(1-t)y' + ty'' \in B$. Derfor findes $p \in A$ og $q \in B$ så $(1-t)a + tb = p - q + z \in C$ jvnf. definitionen af C. Så C er konveks.

Lad nu m betegne det i 1.9 definerede Minkowski funktional på V mht. C.

Da $A \cap B = \emptyset$ vil $z \notin C$, og derfor er $m(z) \geq 1$. Definer φ_0 på $\mathbb{R}z = \{zs : s \in \mathbb{R}\}$ ved $\varphi_0(sz) = s$. Funktionen φ_0 er klart lineær og for $s \geq 0$ fås

$$\varphi_0(sz) = s \leq sm(z) = m(sz).$$

For $s < 0$ er $\varphi_0(sz) = s < 0$, men $m(sz) \geq 0$ pr. definition, så $\varphi_0 \leq m$.

Fra 1.10 kan φ_0 udvides til en lineær funktional φ på hele V så $\varphi(x) \leq m(x)$ for alle $x \in V$.

Vi vil nu vise at φ er kontinuert. Lad $\varepsilon > 0$ være givet og vælg x i omegnen $-\varepsilon C \cap \varepsilon C$ om 0. Da findes $y, y' \in C$ så $x = \varepsilon y$ og $x = -\varepsilon y'$. Da $\varphi(x) \leq m(x) < 1$ for alle $x \in C$ fås

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varepsilon\varphi(y) \leq \varepsilon m(y) < \varepsilon \text{ og} \\ \varphi(x) &= -\varepsilon\varphi(y') \geq -\varepsilon m(y') > -\varepsilon.\end{aligned}$$

Dvs. $|\varphi(x)| < \varepsilon$.

Så vælg $x_0 \in V$ vilkårligt og lad U være en åben omegn om $\varphi(x_0)$ i $\mathbb{R}$. Da findes $\varepsilon > 0$ så $B_\varepsilon(\varphi(x_0)) \subseteq U$. Altså er

$$\varphi^{-1}(U) \supseteq \{x \in V : |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon\} = \{x \in V : |\varphi(x - x_0)| < \varepsilon\}.$$

Heraf ses at $(-\varepsilon C \cap \varepsilon C) - x_0 \subseteq \varphi^{-1}(U)$. Så $\varphi^{-1}(U)$ er åben, da $(-\varepsilon C \cap \varepsilon C) - x_0$ er en åben omegn om x_0. Dvs. φ er kontinuert.

Da $\varphi(z) = \varphi_0(z) = \varphi_0(1z) = 1$ er φ ikke identisk 0 og må derfor være surjektiv. For tag et vilkårligt $r \in \mathbb{R}$, så er $r = r\varphi(z) = \varphi(rz)$.

Afbildningen φ er åben. Dette ses af, at hvis U er en åben delmængde af V og $x \in U$, så er $U - x$ en åben omegn om 0. Det giver, at $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} n(U - x)$.

Da φ er surjektiv er $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(n(U - x)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\varphi(U - x)$.

Altså er $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ indeholdt i $\varphi(U - x)$ for et tilpas stort n, hvilket giver at $[-\frac{1}{n} + \varphi(x), \frac{1}{n} + \varphi(x)] \subseteq \varphi(U)$. For lad y ligge i $[-\frac{1}{n} + \varphi(x), \frac{1}{n} + \varphi(x)]$, dvs. $-\frac{1}{n} \leq y - \varphi(x) \leq \frac{1}{n}$. Dermed vil $y - \varphi(x) \in \varphi(U - x) = \varphi(U) - \varphi(x)$. Dvs. $y \in \varphi(U)$.
Men så er $\varphi(U)$ åben, og φ er dermed en åben afbildning.

For vilkårlige elementer $x \in A$ og $y \in B$, vil $x - y + z \in C$.
Dermed er $\varphi(x - y + z) \leq m(x - y + z) < 1$, da m er Minkowski funktionalen på V defineret i 1.9.

Så da φ er lineær, er $\varphi(x-y+z) = \varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(z) < 1$. Dvs. $\varphi(x) < 1 - \varphi(z) + \varphi(y) = \varphi(y)$.

Eftersom $\varphi(x) < \varphi(y)$ for alle $x \in A$ og $y \in B$ må $\varphi(A)$ og $\varphi(B)$ være disjunkte.

Da A, B er konvekse, er $\varphi(A)$ og $\varphi(B)$ konvekse i $\mathbb{R}$, eftersom φ er lineær og surjektiv. Konvekse delmængder af $\mathbb{R}$ er intervaller, hvilket betyder, at $\varphi(A)$ og $\varphi(B)$ er intervaller.
Ved at vælge t som det højre endepunkt af $\varphi(A)$ fås $\varphi(x) < t \leq \varphi(y)$ for alle $x \in A$ og $y \in B$. Bemærk at $t \notin \varphi(A)$, da $\varphi(A)$ er åben.

For $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ kan vi betragte V som et lineært reelt vektorrum, og som ovenfor kan vi finde en reel og begrænset lineær funktional $\psi : V \mapsto \mathbb{R}$ så $\psi(A) < t \leq \psi(B)$. Vi kan nu konstruere en kompleks lineær funktional φ ved at sætte $\varphi(x) = \psi(x) - i\psi(ix)$. [2]

Pga. sammensætningen af kontinuerte funktioner er φ kontinuert og dermed begrænset. Endvidere er

$$\operatorname{Re}\varphi(x) = \psi(x) < t \leq \psi(y) = \operatorname{Re}\varphi(y)$$

for alle $x \in A$ og $y \in B$. $\square$

[2] Konstruktionen kan ses i [**Rud87**, Proposition 5.17 p. 105]

1.1. Eksempler.

Eksempel 1.12. Hvis V er et normeret vektorrum, defineres

$$V^* = \{\rho : V \mapsto \mathbb{C} \mid \rho \text{ er lineær og begrænset}\}$$

Dvs. V^* er en familie af kontinuerte funktionaler, der skiller punkter i V. Topologien $\sigma(V, V^*)$ kaldes *den svage topologi* på V.
Det er således den svageste topologi på V, der gør alle lineære funktionaler i V^* kontinuerte.

Eksempel 1.13. Lad V være en mængde, (Y, τ_Y) et topologisk rum og $\mathbb{F}$ en separerende familie af funktioner fra V ind i Y.
Lad $\tau_{\mathbb{F}}$ være den svage topologi på V induceret af $\mathbb{F}$, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ et net i V og $x \in V$.
Der gælder nu

$$x_\lambda \to x \text{ hvis og kun hvis } f(x_\lambda) \to f(x) \text{ for alle } f \in \mathbb{F}.$$

Bevis. Bemærk, at alle $f \in \mathbb{F}$ er kontinuerte i topologien $\tau_{\mathbb{F}}$ jvnf. 1.2.

Antag først at $x_\lambda \to x$ i $\tau_{\mathbb{F}}$.
Dvs. for alle $A \in U(x) = \{A \subseteq V \mid \exists U \in \tau_{\mathbb{F}} : x \in U \subseteq A\}$ findes $\lambda_0 \in \Lambda$ så $x_\lambda \in A$ for $\lambda \geq \lambda_0$.

Lad $f \in \mathbb{F}$ være valgt vilkårligt. Vi skal vise, at der for enhver åben omegn M om $f(x)$ findes et $\lambda_0 \in \Lambda$ så $f(x_\lambda) \in M$ for $\lambda \geq \lambda_0$.

Da f er kontinuert er $f^{-1}(M)$ en åben omegn om x.
Vi har altså pr. antagelse, at der eksisterer $\lambda_0 \in \Lambda$ så $x_\lambda \in f^{-1}(M)$ for $\lambda \geq \lambda_0$.
Dvs. at $f(x_\lambda) \in f(f^{-1}(M)) \subseteq M$ for $\lambda \geq \lambda_0$.

Antag omvendt at $f(x_\lambda) \to f(x)$ for alle $f \in \mathbb{F}$.

Hermed eksisterer $\lambda_0 \in \Lambda$ så $f(x_\lambda) \in M$ for $\lambda \geq \lambda_0$, hvor M er en vilkårlig åben omegn om $f(x)$.

Lad nu $A \in U(x)$ og $\mathbb{B}$ være en basis for den svage topologi på V. Da findes et $B \in \mathbb{B}$ så $x \in B \subseteq A$. Altså er B på formen

$$B = f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(U_n)$$

hvor $(U_j)_{j=1}^n$ er åbne mængder i τ_Y.

Da $x \in B$ vil $f_j(x) \in U_j$ for alle $1 \leq j \leq n$. På grund af konvergensen findes λ_j så $f_j(x_\lambda) \in U_j$ når $\lambda \geq \lambda_j$ for $1 \leq j \leq n$.

Da $(\Lambda, \leq)$ er en opad filtrende mængde eksisterer et λ_0, så der for alle λ_j gælder at $\lambda_0 \geq \lambda_j$.

Dvs. $f_j(x_\lambda) \in U_j$ for $\lambda \geq \lambda_0$. Men så vil $x_\lambda \in f_j^{-1}(U_j)$ for alle $1 \leq j \leq n$, og dermed vil $x_\lambda \in \bigcap_{j=1}^n f_j^{-1}(U_j) = B$.

Vi har altså vist, at $x_\lambda \in B$ for $\lambda \geq \lambda_0$, som ønsket. □

Eksempel 1.14. Lad V være et normeret vektorrum, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ et net i V og $x \in V$.

Hvis $x_\lambda \to x$ i normtopologien, da vil $x_\lambda \to x$ i den svage topologi $\sigma(V, V^*)$.

Bevis. Lad $f \in V^*$ være vilkårligt valgt.

Da f er kontinuert vil $f(x_\lambda) \to f(x)$ når $x_\lambda \to x$ i normtopologien.

Fra 1.13 har vi at $x_\lambda \to x$ i den svage topologi $\sigma(V, V^*)$ når $f(x_\lambda) \to f(x)$ for alle $f \in V^*$. $\square$

2. Ekstremalpunkter i konvekse mængder

Opbygningen til Krein-Milmans sætning fortsætter i dette afsnit, hvor det centrale begreb ekstremalpunkt introduceres.
Vi får også brug for definitionen af en side (facet) i en konveks mængde, og det meste af afsnittet omhandler egenskaber ved disse.[3]

DEFINITION 2.1. *Lad V være et vektorrum. Det konvekse hylster* $\operatorname{co} Y$ *af en delmængde* $Y \subseteq V$ *er mængden af konvekse kombinationer af punkter fra* Y, *dvs.*

$$\operatorname{co} Y = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : x_i \in Y, 0 \leq a_i \leq 1, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^{n} a_j = 1\}. \tag{6}$$

Bemærk $\operatorname{co} Y$ er en konveks delmængde af V, og dens afslutning $\overline{\operatorname{co}} Y$, det lukkede konvekse hylster af Y, er således den mindste lukkede konvekse mængde, der indeholder Y.

DEFINITION 2.2. *Antag at V er et vektorrum. Et element x_0 i en konveks delmængde $X \subseteq V$ kaldes et ekstremalpunkt, såfremt x_0 udtrykt som en konveks kombination*
$x_0 = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$, hvor $0 < \alpha < 1$ og $x_1, x_2 \in X$ medfører at $x_1 = x_2 = x_0$.

Det kan i visse tilfælde være lettere kun at kigge på konvekse kombinationer med $\alpha = \frac{1}{2}$. Følgende resultat retfærdiggør dette.

LEMMA 2.3. *Lad $X \subseteq V$ være en konveks delmængde af et vektorrum V. Et punkt $x_0 \in X$ er ekstremalt hvis og kun hvis x_0 udtrykt som $x_0 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ for $x_1, x_2 \in X$ betyder at $x_1 = x_2 = x_0$.*

BEVIS. Bemærk først at hvis $x_0 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ og x_0 er ekstremal, da giver definitionen at $x_1 = x_2 = x_0$.

Antag nu at $x_1 = x_2 = x_0$, hvis x_0 kan skrives som $x_0 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ for $x_1, x_2 \in X$.
Vi skal vise, at hvis $x_0 = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$ for $x_1, x_2 \in X$ og $0 < \alpha < 1$, så er $x_0 = x_1 = x_2$.

Vælg $s, t \in \mathbb{R}$ så $0 < s < t < 1$ og $\frac{s+t}{2} = \alpha$.
Sæt

$$\begin{aligned} y_1 &= t x_2 + (1-t)x_1 \text{ og} \\ y_2 &= s x_2 + (1-s)x_1. \end{aligned} \tag{7}$$

Da bliver

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 &= \frac{1}{2}t x_2 + \frac{1}{2}(1-t)x_1 + \frac{1}{2}s x_2 + \frac{1}{2}(1-s)x_1 \\ &= \frac{t+s}{2}x_2 + \frac{(1-t)+(1-s)}{2}x_1 \\ &= \alpha x_2 + (1-\alpha)x_1 \\ &= x_0. \end{aligned}$$

Men det betyder at $x_0 = y_1 = y_2$.

[3]Dette afsnit tager udgangspunkt i [**KR97**, Kap. 1.4]

Fra (7) har vi følgende ligninger

$$tx_2 + (1-t)x_1 = x_0,$$
$$sx_2 + (1-s)x_1 = x_0$$

Da $s \neq t$ har ligningssystemet maksimal rang og kan dermed løses entydigt. Det kan let ses at $x_0 = x_1 = x_2$ er en løsning, som derfor må være den eneste. $\square$

DEFINITION 2.4. *Lad V være et vektorrum og $X \subseteq V$ en konveks delmængde af V. En side F i X er en ikke-tom konveks delmængde $F \subseteq X$ så betingelserne*

$$0 < t < 1,\ x_1, x_2 \in X,\ (1-t)x_1 + tx_2 \in F$$

giver at $x_1, x_2 \in F$.

I det følgende betragtes et vektorrum V og en konveks delmængde $X \subseteq V$.

2.1. Egenskaber ved sider i konvekse mængder.

LEMMA 2.5. *Et punkt x_0 er ekstemalt i X, hvis og kun hvis $\{x_0\}$ er en side i X.*

BEVIS. Lad x_0 være et ekstremalpunkt i X.

For $0 < t < 1$, $x_1, x_2 \in X$ og $(1-t)x_1 + tx_2 \in \{x_0\}$ har vi $(1-t)x_1 + tx_2 = x_0$. Men da x_0 er et ekstremalpunkt, er dette kun opfyldt for $x_1 = x_2 = x_0$. Dvs. $x_1, x_2 \in \{x_0\}$. Så $\{x_0\}$ er en side i X, da $\{x_0\}$ også er konveks.

Antag omvendt at $\{x_0\}$ er en side i X. Hvis $0 < t < 1, x_1, x_2 \in X$ og $(1-t)x_1 + tx_2 \in \{x_0\}$ vil $x_1, x_2 \in \{x_0\}$, da $\{x_0\}$ er en side. Så hvis $(1-t)x_1 + tx_2 = x_0$ er $x_1 = x_2 = x_0$. Hermed er x_0 et ekstremalpunkt i X. $\square$

LEMMA 2.6. *Hvis $(F_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ er en familie af sider i X med $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$, da er $\bigcap_\alpha F_\alpha$ igen en side i X.*

BEVIS. Lad $0 < t < 1$, $x_1, x_2 \in X$ så $(1-t)x_1 + tx_2 \in \bigcap_\alpha F_\alpha$. Dvs. for ethvert $\alpha \in \Lambda$ fås $(1-t)x_1 + tx_2 \in F_\alpha$. Men hvert F_α er en side, så $x_1, x_2 \in F_\alpha$ for alle α. Hermed vil $x_1, x_2 \in \bigcap_\alpha F_\alpha$. Eftersom fællesmængden af konvekse mængder er konveks, er $\bigcap_\alpha F_\alpha$ altså en side i X. $\square$

LEMMA 2.7. *Hvis Y er en side i X og Z er en side i Y, så er Z en side i X.*

BEVIS. Lad $0 < t < 1$, $x_1, x_2 \in X$ så $(1-t)x_1 + tx_2 \in Z$.
Da $Z \subseteq Y$ vil $(1-t)x_1 + tx_2 \in Y$. Men Y er en side i X, så $x_1, x_2 \in Y$. Da Z er en side i Y og $(1-t)x_1 + tx_2 \in Z$, vil $x_1, x_2 \in Z$. Hermed er Z en side i X. $\square$

LEMMA 2.8. *Hvis X er en konveks mængde med $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ og $a_1, a_2, \dots, a_n$ er ikke negative reelle tal med sum 1, da vil $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \in X$.*

BEVIS. Beviset føres ved induktion over n.

Basistilfældet er $n = 2$. Det skal vises, at $a_1x_1 + a_2x_2 \in X$ når $x_1, x_2 \in X$ og $a_1 + a_2 = 1$. Dette er trivielt, da $a_1x_1 + a_2x_2 = (1 - a_2)x_1 + a_2x_2 \in X$, da X er konveks og $0 \leq a_2 \leq 1$.

Hypotesen er nu at $\sum_{j=1}^{n} a_jx_j \in X$ når $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$ og $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ for $n \geq 2$.

Betragt $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in X$ og $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \in [0, 1]$ så $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 1$. Vi skal vise at $\sum_{j=1}^{n+1} a_jx_j \in X$.

Hvis $a_{n+1} = 0$ er udsagnet opfyldt, jvnf. hypotesen.

Hvis $a_{n+1} = 1$ er udsagnet ligeledes opfyldt, for da er $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ og dermed er $\sum_{j=1}^{n+1} a_jx_j = x_{n+1} \in X$.

Antag nu at $0 < a_{n+1} < 1$ og sæt $a = 1 - a_{n+1}$. Dermed er $0 < a < 1$.
Dernæst sættes $y = a^{-1}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)$.
Hypotesen giver, at $y \in X$ da

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 1 \iff a_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} a_j = 1 \iff \sum_{j=1}^{n} a_j = 1 - a_{n+1}.$$

Summen af koefficienterne i y bliver

$$a^{-1}\sum_{j=1}^{n} a_j = a^{-1}(1 - a_{n+1}) = \frac{1}{1 - a_{n+1}}(1 - a_{n+1}) = 1.$$

Altså vil $y \in X$.

Nu kan $\sum_{j=1}^{n+1} a_jx_j$ skrives på følgende bekvemme form

$$\begin{aligned}(1 - a)x_{n+1} + ay &= (1 - a)x_{n+1} + aa^{-1}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) \\ &= a_{n+1}x_{n+1} + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.\end{aligned}$$

Dvs. $\sum_{j=1}^{n+1} a_jx_j \in X$ da X er konveks. □

LEMMA 2.9. *Hvis F er en side i X og $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \in F$, hvor $x_1, \dots, x_n \in X$ og $a_1, \dots, a_n$ er ikke-negative reelle tal med sum 1, da vil $x_j \in F$ for $1 \leq j \leq n$.*

BEVIS. Det er tilstrækkeligt, at vise at $x_1 \in F$ for $a_1 > 0$, idet vi herefter kan vise, at det gælder for et vilkårligt x_j ved ombytning af rækkefølgen i den konvekse kombination.

For $a_1 = 1$ fås at $a_2 = \cdots = a_n = 0$. Heraf er $x_1 = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \in F$.

Hvis $0 < a_1 < 1$ sættes $a = 1 - a_1$ og $y = a^{-1}(a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)$. Da $0 < a_1 < 1$ er $0 < a < 1$ og $y \in X$, da y er en konveks kombination af $x_2, \dots, x_n$. Dette ses, idet

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 1 \iff a_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j = 1 \iff \sum_{j=2}^{n} a_j = 1 - a_1.$$

Heraf er
$$\sum_{j=2}^{n} a^{-1}a_j = a^{-1}\sum_{j=2}^{n} a_j = a^{-1}(1-a_1) = \frac{1}{1-a_1}(1-a_1) = 1.$$
Men
$$(1-a)x_1 + ay = (1-a)x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \in F.$$
Så $x_1, y \in F$ da F er en side i X og $0 < a < 1$. $\square$

LEMMA 2.10. *Hvis X er en ikke-tom kompakt konveks mængde i et lokalt konvekst vektorrum V, ρ er en kontinuert lineær funktional på V og*
$$c = \sup\{\operatorname{Re}\rho(x) : x \in X\}$$
så er mængden $F = \{x \in X : \operatorname{Re}\rho(x) = c\}$ en kompakt side i X.

BEVIS. Da ρ er kontinuert er Reρ også kontinuert, og vil dermed antage sin maksimumsværdi på den kompakte mængde X. Dette giver, at F er ikke-tom.

Fra [**Han95**, Sætning 12.3] er enhver afsluttet delmængde i X kompakt. Det ses at $F = (\mathrm{Re}\rho)^{-1}(\{c\})$ er urbilledet af en en afsluttet mængde ved en kontinuert funktion, og dermed er F afsluttet og altså kompakt.

Mængden F er konveks, for tag $x_1, x_2 \in F$ og $0 < t < 1$. Nu bliver
$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\rho((1-t)x_1 + tx_2) &= (1-t)\mathrm{Re}\rho(x_1) + t\mathrm{Re}\rho(x_2)\\ &= (1-t)c + tc\\ &= c\end{aligned}$$

Dvs. $(1-t)x_1 + tx_2 \in F$.

Tilbage står at bevise, at $x_1, x_2 \in F$ hvis $(1-t)x_1 + tx_2 \in F$ for $x_1, x_2 \in X$ og $0 < t < 1$.

Vi har $\mathrm{Re}\rho(x_1) \leq c$ og $\mathrm{Re}\rho(x_2) \leq c$ men samtidig er
$$(1-t)\mathrm{Re}\rho(x_1) + t\mathrm{Re}\rho(x_2) = \mathrm{Re}\rho((1-t)x_1 + tx_2) = c$$
da $(1-t)x_1 + tx_2 \in F$.

Det betyder, at enten er $\mathrm{Re}\rho(x_1) \geq c$ eller $\mathrm{Re}\rho(x_2) \geq c$. Dvs. at $\mathrm{Re}\rho(x_1) = \mathrm{Re}\rho(x_2) = c$ og dermed må $x_1, x_2 \in F$.

Altså er F en side i X. $\square$

3. Krein-Milmans sætning

Vi er nu nået frem til at kunne bevise hovedsætningen i første del af projektet.[4]

SÆTNING 3.1 (Krein-Milman). *Hvis X er en ikke-tom kompakt konveks delmængde af et lokalt konvekst vektorrum V, så har X ekstremal punkter. Endvidere er $X = \overline{\text{co}}E$ hvor E er mængden af alle ekstremal punkter i X.*

BEVIS. Lad $\mathbb{F}$ være familien af alle kompakte sider i X, og lad $\mathbb{F}$ være partielt ordnet mht. inklusion. Da $X \in \mathbb{F}$ er $\mathbb{F} \neq \emptyset$. Vi vil vise, at $\mathbb{F}$ har et mindste element, som består af et enkelt punkt.

Lad $\mathbb{F}_0$ være en delfamilie af $\mathbb{F}$, der er totalt ordnet mht. inklusion, dvs. for hvert par $F_1, F_2 \in \mathbb{F}_0$ gælder at $F_1 \subseteq F_2$ eller $F_2 \subseteq F_1$.

Hvis $F_1, \ldots, F_n \in \mathbb{F}_0$, vil $\bigcap_{k=1}^n F_k \in \mathbb{F}_0$, idet $\bigcap_{k=1}^n F_k$ er den mindste af mængderne $F_1, \ldots, F_n$. Hermed er $\mathbb{F}_0$ stabil overfor endelig fællesmængde. Eftersom $\mathbb{F}_0$ består af kompakte mængder er mængden $F_0 = \bigcap_{F \in \mathbb{F}_0} F$ kompakt og ikke-tom. For hvis $F_0 = \emptyset$ vil der pga. kompaktheden findes endeligt mange $F_1, \ldots, F_n \in \mathbb{F}_0$ så $F_1 \cap \cdots \cap F_n = \emptyset$, men det er i modstrid med totalordningen af $\mathbb{F}_0$. Så F_0 er en kompakt side i X jvnf. 2.6, og da der for alle $F \in \mathbb{F}_0$ gælder $F_0 \subseteq F$ er F_0 en nedre grænse for $\mathbb{F}_0$ i $\mathbb{F}$.
Vi har hermed vist, at enhver totalt ordnet delmængde af $\mathbb{F}$ har en nedre grænse i $\mathbb{F}$. Da $\mathbb{F} \neq \emptyset$ følger det af Zorns lemma, at $\mathbb{F}$ har et mindste-element F. Dvs. hvis $\widetilde{F} \subseteq F$, så er $\widetilde{F} = F$, for $\widetilde{F} \in \mathbb{F}$.

Vi vil nu vise, at F består af et enkelt punkt x.
Antag til modstrid, at x_1, x_2 er forskellige punkter i F. Da V er et lokalt konvekst vektorrum, har det Hausdorff egenskaben, og der findes en basis for topologien, som består af konvekse mængder. Der findes altså åbne konvekse omegne A om x_1 og B om x_2, så $A \cap B = \emptyset$. Iflg. 1.11 findes en kontinuert lineær funktional φ på V og et $t \in \mathbb{R}$ så

$$\operatorname{Re} \varphi(x_1) < t \leq \operatorname{Re} \varphi(x_2).$$

Der findes altså $\varphi \in V^*$ så Re $\varphi(x_1) \neq$ Re $\varphi(x_2)$. Fra 2.10 findes et $c \in \mathbb{R}$ så

$$F_0 = \{x \in F : \operatorname{Re} \varphi(x) = c\}$$

er en kompakt side i F. Men F er en kompakt side i X, så F_0 er også en kompakt side i X jvnf. 2.7, hvoraf $F_0 \in \mathbb{F}$. Eftersom Re $\varphi(x_1) \neq$ Re $\varphi(x_2)$ kan x_1 og x_2 ikke begge tilhøre F_0, så $F_0 \subset F$. Dette er en modstrid, idet F er et mindste element i $\mathbb{F}$.
Altså består F af et enkelt punkt x. Dvs. $F = \{x\}$, og x er hermed et ekstremalpunkt i X jvnf. 2.5.

Vi har nu vist, at enhver ikke-tom kompakt konveks delmængde af V har et ekstremalpunkt.

Hvis E er mængden af alle ekstremalpunkter i X, skal vi vise, at $X = \overline{\text{co}}E$. Da $E \subseteq X$ og X er en kompakt konveks mængde er $\overline{\text{co}}E \subseteq X$, så vi skal vise, at lighedstegnet gælder. Antag til modstrid, at der findes et $x_0 \in X \backslash \overline{\text{co}}E$.

Da V er et topologisk vektorrum findes en åben omegn $\widetilde{C}$ om 0 så $\widetilde{C} \subseteq V$ og $(x_0 + \widetilde{C}) \cap (\overline{\text{co}}E + \widetilde{C}) = \emptyset$ jvnf. [**Rud73**, Theorem 1.10]. Da V er lokalt konvekst findes en åben

[4]Dette afsnit tager udgangspunkt i [**KR97**, Kap. 1.4] og [**Ped95**, Kap. 2.5].

konveks omegn C om 0 så $C \subseteq \widetilde{C}$. Dermed er $A = \overline{\text{co}}E + C$ og $B = x_0 + C$ åbne konvekse mængder, der opfylder at $A \cap B = \emptyset$.

Fra 1.11 findes $\varphi \in V^*$ og et $a \in \mathbb{R}$ så

$$\operatorname{Re}\varphi(y) < a \leq \operatorname{Re}\varphi(x_0) \text{ for } y \in \overline{\text{co}}E. \tag{8}$$

Sæt $c_1 = \sup\{\operatorname{Re}\varphi(x) : x \in X\}$. Dermed er $c_1 \geq a$ og mængden

$$F_1 = \{x \in X : \operatorname{Re}\varphi(x) = c_1\}$$

er en kompakt side i X jvnf. 2.10. Så F_1 er en ikke-tom kompakt konveks delmængde af V, og har dermed et ekstremalpunkt x_1. Når x_1 er et ekstremalpunkt i F_1 medfører det, at $\{x_1\}$ er en side i F_1. Men F_1 er en side i X, så $\{x_1\}$ er en side i X, og dermed er x_1 et ekstremalpunkt i X. Dvs. $x_1 \in E \subseteq \overline{\text{co}}E$. Men $x_1 \in F_1$, hvorved $\operatorname{Re}\varphi(x_1) = c_1 \geq a$. Dette er i modstrid med (8), da $\operatorname{Re}\,\varphi(y) < a$ for alle $y \in \overline{\text{co}}E$.

Vi har hermed vist at $X = \overline{\text{co}}E$. □

Krein-Milmans sætning giver informationer om ekstremalpunkterne i en kompakt konveks mængde. Nedenfor vil vi give et eksempel på en mængde, der ikke er kompakt i normtopologien, men som har ekstremalpunkter.

EKSEMPEL 3.2. Betragt $C(K)$ hvor K er et kompakt Hausdorff rum. Ekstremalpunkterne i enhedskuglen $(C(K))_1$ er de funktioner $f \in C(K)$, som opfylder at $|f(x)| = 1$ for alle $x \in K$.

BEVIS. Vi vil først vise, at den konstante funktion 1 er et ekstremalpunkt i enhedskuglen $(C(K))_1$. Antag $1 = \frac{1}{2}(h+g)$ for $h, g \in (C(K))_1$. Sæt

$$h_1 = \operatorname{Re} h, \quad h_2 = \operatorname{Im} h$$
$$g_1 = \operatorname{Re} g, \quad g_2 = \operatorname{Im} g$$

De fire funktioner er kontinuerte og

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2}(h_1 + ih_2 + g_1 + ig_2) \\ &= \frac{1}{2}(h_1 + g_1) + \frac{1}{2}i(h_2 + g_2). \end{aligned}$$

Dermed er $1 = \frac{1}{2}(h_1(x) + g_1(x))$ og $0 = h_2(x) + g_2(x)$ for alle $x \in K$.

Antag at der findes et punkt $x_0 \in K$ så $h_1(x_0) < 1$. Dvs. at $g_1(x_0) > 1$. Dette er en modstrid, da $g = g_1 + ig_2 \in (C(K))_1$. Så $h_1(x) = 1$ for alle $x \in K$, hvoraf $g_1 = h_1 = 1$.

Antag nu at der findes et punkt $x_0 \in K$ så $h_2(x_0) \neq 0$.
Dvs. $h(x_0) = h_1(x_0) + ih_2(x_0) = 1 + ih_2(x_0)$. Men $|h(x_0)|^2 = 1 + (h_2(x_0))^2 > 1$, da $h_2(x_0) \neq 0$. Heraf har vi igen en modstrid da $h \in (C(K))_1$. Vi har hermed vist at $h_2(x) = 0$ for alle $x \in K$.

Altså er $h_2(x) = g_2(x) = 0$ for alle $x \in K$. Så $1 = h = g$ hvilket giver, at den konstant funktion 1 er ekstremal.

Herefter vil vi vise at hvis $|f(x)| = 1$ for alle $x \in K$, er f et ekstremalpunkt i $(C(K))_1$.

Antag $f = \frac{1}{2}(h+g)$ for $h, g \in (C(K))_1$.

Dvs.

$$\frac{1}{2}(\overline{f}h + \overline{f}g) = \overline{f}f = |f|^2 = 1.$$

Funktionerne $\overline{f}h, \overline{f}g$ er kontinuerte og $\overline{f}h, \overline{f}g \in (C(K))_1$ da $\|\overline{f}h\|_\infty \leq \|\overline{f}\|_\infty \|h\|_\infty \leq 1 \cdot 1 = 1$. Tilsvarende er $\|\overline{f}g\|_\infty \leq 1$.

Da 1 er et ekstremalpunkt for $(C(K))_1$ fås $\overline{f}h = \overline{f}g = 1$. Dvs. $\overline{f}h - \overline{f}g = \overline{f}(h-g) = 0$.
Da $\overline{f}(x) \neq 0$ for alle $x \in K$ er $h - g = 0$. Vi har således vist at $h = g$, og da $f = \frac{1}{2}(h+g)$ er $h = g = f$. Dermed er f et ekstremalpunkt.

Vi mangler at vise, at hvis $f \in (C(K))_1$ er ekstremal, så er $|f(x)| = 1$ for alle $x \in K$.

Antag at der findes en åben og lukket delmængde $K_0 \subseteq K$, hvor $K_0 \neq \emptyset$, så $f|_{K_0} \equiv 0$. Definer funktionerne

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_0 \\ f(x), & x \in K \setminus K_0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} -1, & x \in K_0 \\ f(x), & x \in K \setminus K_0 \end{cases}$$

som er kontinuerte, da K_0 er åben og lukket. Funktionerne $f, g \in (C(K))_1$ da
$\|h\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$. Men da $f = \frac{1}{2}(h+g)$ og f er ekstremal er $h = g$, hvilket er en modstrid.

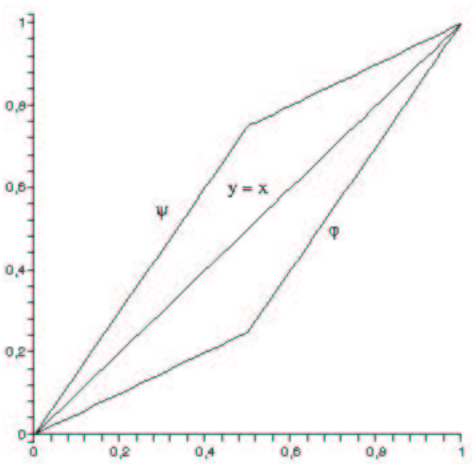
Altså eksisterer ingen åben og lukket delmængde $K_0 \subseteq K$ så $f|_{K_0} \equiv 0$.

Man kan skrive f som $f(x) = \alpha(x)|f(x)|$ for $x \in K$. Hvis $f(x) \neq 0$ er α defineret ved $\alpha(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$, og for de $x \in K$ hvor $f(x) = 0$ sættes $\alpha(x) = 1$. Det ses ud fra definitionen, at α ikke nødvendigvis er kontinuert.

Lad nu $\varphi, \psi : [0,1] \mapsto [0,1]$ være kontinuerte funktioner som opfylder

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \psi(0) = 0, \\ \varphi(1) &= \psi(1) = 1, \\ \varphi + \psi &= 2\iota, \end{aligned}$$

hvor $\iota : [0,1] \mapsto [0,1]$ er defineret ved $\iota(x) = x$. Antag endvidere at 0 og 1 er de eneste fixpunkter for φ og ψ.



Funktionen g defineret ved $g(x) = \alpha(x)\varphi(|f(x)|)$ for $x \in K$ er veldefineret, da $|f(x)| \leq 1$ for alle $x \in K$. Endvidere er g kontinuert, da der eksisterer en følge af polynomier $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C([0,1])$, så $p_n \to \varphi$ mht. $\|\cdot\|_\infty$. Idet $\varphi(0) = 0$ kan polynomierne justeres så $p_n(0) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dvs. polynomierne er på formen $p_n(t) = tq_n(t)$, hvor q_n også er et polynomium.
Dermed er

$$\alpha(x)p_n(|f(x)|) = \alpha(x)|f(x)|q_n(|f(x)|) = f(x)q_n(|f(x)|).$$

Da f, q_n er kontinuerte fås at $\alpha(x)p_n(|f(x)|) \in C(K)$. Pga. fuldstændigheden af $C(K)$ vil $\alpha\varphi(|f|) \in C(K)$ da $\alpha p_n(|f|) \to \alpha\varphi(|f|)$ mht. $\|\cdot\|_\infty$.

Tilsvarende vil funktionen h givet ved $h(x) = \alpha(x)\psi(|f(x)|)$ være veldefineret og kontinuert.

Funktionerne $h, g \in (C(K))_1$, da

$$\begin{aligned}\|h\|_\infty &= \|\alpha\psi(|f|)\|_\infty \\ &\leq \|\alpha\|_\infty\|\psi\|_\infty \\ &= 1.\end{aligned}$$

Analogt fås at $\|g\|_\infty \leq 1$.

Nu bliver

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(g+h) &= \frac{1}{2}(\alpha\varphi(|f|) + \alpha\psi(|f|)) \\ &= \frac{1}{2}\alpha(\varphi+\psi)(|f|) \\ &= \frac{1}{2}\alpha 2|f| \\ &= f.\end{aligned}$$

Men f er et ekstremalpunkt, så $g = h = f$. Dvs.

$$\alpha\varphi(|f|) = \alpha\psi(|f|) = f = \alpha|f|.$$

Det giver specielt at $\varphi(|f(x)|) = |f(x)|$ for alle $x \in K$. Altså er $\varphi(t) = t$ for alle $t \in \sigma(|f|)$ jvnf. [**Zhu93**, Thm. 10.3], og da φ kun har 0 og 1 som fixpunkter er $\sigma(|f|) \subseteq \{0,1\}$.

Da $|f|$ er kontinuert er $|f| = 0|_{K_0} + 1|_{K\setminus K_0}$, hvor K_0 er en åben og lukket delmængde af K. Men iflg. ovenstående er $K_0 = \emptyset$, så $|f| \equiv 1$ på K. $\square$

4. C^*-algebraer

Den sidste del af projektet er resultater fra operatoralgebra teori. Vi vil derfor give en kort introduktion til C^*-algebraer, hvor vi blandt andet viser en vigtig klassifikationssætning for kommutative C^*-algebraer.[5]

Definition 4.1. *En C^*-algebra er en Banach algebra $\mathcal{A}$ med en afbildning $A \mapsto A^*$ fra $\mathcal{A}$ ind i $\mathcal{A}$, der opfylder følgende betingelser*

(*i*) $(A^*)^* = A$ *for alle* $A \in \mathcal{A}$
(*ii*) $(aA + bB)^* = \bar{a}A^* + \bar{b}B^*$ *for alle* $A, B \in \mathcal{A}$ *og alle* $a, b \in \mathbb{C}$
(*iii*) $(AB)^* = B^*A^*$ *for alle* $A, B \in \mathcal{A}$
(*iv*) $\|A^*A\| = \|A\|^2$ *for alle* $A \in \mathcal{A}$

Elementet A^* kaldes den adjungerede til A.

Lemma 4.2. *Lad $\mathcal{A}$ være en C^*-algebra og $A \in \mathcal{A}$. Afbildningen $A \mapsto A^*$ er en isometri.*

Bevis. For ethvert $A \in \mathcal{A}$ gælder

$$\|A\|^2 = \|A^*A\| \leq \|A^*\|\|A\|.$$

Dvs. $\|A\| \leq \|A^*\|$.
Omvendt har vi

$$\|A^*\|^2 = \|(A^*)^*A^*\| = \|AA^*\| \leq \|A\|\|A^*\|.$$

Heraf fås $\|A^*\| \leq \|A\|$. Dermed er $\|A\| = \|A^*\|$. □

Bemærk, at hvis I er identiteten i en C^*-algebra $\mathcal{A}$, da gælder at

$$I^* = I^*I = I^*(I^*)^* = (I^*I)^* = (I^*)^* = I$$

I definitionen for en C^*-algebra $\mathcal{A}$ er det ikke noget krav, at $\mathcal{A}$ er unital, dvs. at $\mathcal{A}$ indeholder en identitet. I de følgende afsnit vil enhver C^*-algebra være unital pr. antagelse.

Et eksempel på en C^*-algebra er $B(H) = \{T : H \mapsto H \mid T \text{ er lineær og begrænset}\}$ hvor H er et Hilbertrum.[6]

Definition 4.3. *Antag $\mathcal{A}$ er en C^*-algebra og $A \in \mathcal{A}$. Elementet A kaldes*

(*i*) *selvadjungeret hvis* $A^* = A$
(*ii*) *unitær hvis* $A^*A = I = AA^*$, *eller ækvivalent* $A^* = A^{-1}$
(*iii*) *normal hvis* $A^*A = AA^*$
(*iv*) *positiv hvis* $A = B^*B$ *for et* $B \in \mathcal{A}$
(*v*) *en projektion hvis* $A^* = A = A^2$

[5] Dette afsnit tager udgangspunkt i [**Zhu93**, Kap. 8-9].
[6] Bygger på resultaterne fra [**Ste00**, Thm. VI.4 og Prop. VI.5]

SÆTNING 4.4. *Hvis A er normal i en C^*-algebra $\mathcal{A}$, da er $r(A) = \|A\|$.*

BEVIS. Sæt $B = A^*A$. Elementet B er selvadjungeret idet $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$, så

$$\|B^2\| = \|BB\| = \|B^*B\| = \|B\|^2.$$

Ved at benytte B er selvadjungeret ses, at $B^n = (B^n)^*$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$, og ved induktion efter k skridt fås $\|B^{2^k}\| = \|B\|^{2^k}$.
Dette giver

$$\|(A^*A)^p\| = \|A^*A\|^p = (\|A\|^2)^p \text{ for } p = 1, 2, 4, 8, 16\ldots$$

Hvis vi benytter, at A er normal fås

$$\|(A^*A)^p\| = \|A^*A \ldots A^*A\| = \|(A^*)^p A^p\| = \|(A^p)^* A^p\| = \|A^p\|^2.$$

Hermed er vist, at $\|A^p\|^2 = \|A\|^{2p}$ for $p = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$. Dvs.

$$\|A^p\|^{\frac{1}{p}} = \|A\| \text{ for } p = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

Spektralradiusformlen ([**Zhu93**, Thm. 5.5]) giver nu

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k\to\infty} \|A^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \|A\| = \|A\|.$$

□

LEMMA 4.5. *Antag $\mathcal{A}$ er en C^*-algebra og lad $A \in \mathcal{A}$ være selvadjungeret. Da er $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

BEVIS. Antag $c = a + ib \in \sigma(A)$ hvor $a, b \in \mathbb{R}$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ sættes

$$A_n = A - aI + inbI.$$

Det ses at $i(n+1)b = inb + ib = a + ib - a + inb \in \sigma(A_n)$, idet

$$\begin{aligned} A_n - i(n+1)bI &= A_n - (a+ib)I + aI - inbI \\ &= A - aI + inbI - (a+ib)I + aI - inbI \\ &= A - (a+ib)I. \end{aligned}$$

Da $c = a + ib \in \sigma(A)$ fås at $i(n+1)b \in \sigma(A_n)$. Dvs. $|i(n+1)b| \leq r(A_n)$.
Heraf er

$$\begin{aligned} \left(n^2 + 2n + 1\right) b^2 &= (n+1)^2 b^2 \\ &= |i(n+1)b|^2 \\ &\leq (r(A_n))^2 \\ &\leq \|A_n\|^2 \\ &= \|A_n^* A_n\| \\ &= \|(A - aI - inbI)(A - aI + inbI)\| \\ &= \left\|(A - aI)^2 + n^2 b^2 I\right\| \\ &\leq \|A - aI\|^2 + \left\|n^2 b^2 I\right\| \\ &= \|A - aI\|^2 + n^2 b^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Da $(2n+1)b^2 \leq \|A - aI\|^2$ for alle $n \in \mathbb{N}$, er uligheden kun opfyldt for $b = 0$. Dermed er $c = a \in \mathbb{R}$ og $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. □

DEFINITION 4.6. *Antag $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ er C^*-algebraer. En afbildning $\Phi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ kaldes en *-homomorfi hvis*

(i) $\Phi(aA + bB) = a\Phi(A) + b\Phi(B)$ *for alle* $a, b \in \mathbb{C}$ *og* $A, B \in \mathcal{A}$
(ii) $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$ *for alle* $A, B \in \mathcal{A}$
(iii) $\Phi(A^*) = \Phi(A)^*$ *for alle* $A \in \mathcal{A}$
(iv) $\Phi(I_\mathcal{A}) = I_\mathcal{B}$ *hvor* $I_\mathcal{A}$ *og* $I_\mathcal{B}$ *er identiteten i hhv.* $\mathcal{A}$ *og* $\mathcal{B}$

Hvis Φ er injektiv og surjektiv kaldes Φ en *-isomorfi. C^*-algebraerne $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ kaldes *-isomorfe, hvis der findes en *-isomorfi $\Phi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$.

Nedenstående sætning giver os mulighed for at repræsentere en kommuativ C^*-algebra med $C(K)$ for et kompakt Hausdorffrum K. Det er specielt nyttigt, når sætningen om ekstremalpunkter i enhedskuglen for en C^*-algebra skal vises.

Vi betragter også mængden $\Omega(A)$, der er mængden af multiplikative lineære funktionaler på $\mathcal{A}$, som udstyres med svag*-topologi.

SÆTNING 4.7. *Enhver kommutativ C^*-algebra er *-isomorf med $C(K)$ for et kompakt Hausdorff rum K. Specielt er Gelfandtransformationen $\Gamma : \mathcal{A} \mapsto C(\Omega(\mathcal{A}))$ givet ved*

$$\Gamma(A)(\varphi) = \varphi(A), \; A \in \mathcal{A}, \varphi \in \Omega(\mathcal{A})$$

en *-isomorfi når $\mathcal{A}$ er en kommutativ C^*-algebra.

BEVIS. Funktionen Γ er en homomorfi, da φ er en karakter, dvs. en multiplikativ lineær funktional. Endvidere er

$$\Gamma(I_\mathcal{A})(\varphi) = \varphi(I_A) = 1.$$

For at vise at Gelfandtransformationen er en *-isomorfi, mangler vi at vise, at funktionen er injektiv, surjektiv og at $\Gamma(A^*) = \overline{\Gamma(A)}$.
For ethvert $A \in \mathcal{A}$ sættes

$$A_1 = \frac{A + A^*}{2} \text{ og } A_2 = \frac{A - A^*}{2i}.$$

Heraf fås

$$\begin{aligned} A_1^* &= \frac{A^* + A^{**}}{2} = \frac{A^* + A}{2} = A_1, \\ A_2^* &= \frac{A^* - A^{**}}{\overline{2i}} = \frac{A^* - A}{-2i} = A_2. \end{aligned}$$

Så A_1 og A_2 er selvadjungerede. Dvs.

$$\begin{aligned} &A_1 + iA_2 = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*) = A, \\ &A^* = A_1 - iA_2. \end{aligned}$$

Fra [**Zhu93**, Korollar 5.2] gælder, at når $A \in \mathcal{A}$, hvor $\mathcal{A}$ er en kommutativ Banach algebra, så er $\sigma_{\mathcal{A}}(A) = \operatorname{Ran}\Gamma(A)$. For et selvadjungeret element B i en C^*-algebra gælder $\sigma(B) \subseteq \mathbb{R}$. Elementerne A_1, A_2 er selvadjungerede, så for $k = 1, 2$ er $\Gamma(A_k) \subseteq \mathbb{R}$. Heraf følger

$$\begin{aligned}\Gamma(A^*) &= \Gamma(A_1 - iA_2)\\ &= \Gamma(A_1) - i\Gamma(A_2)\\ &= \overline{\Gamma(A_1) + i\Gamma(A_2)}\\ &= \overline{\Gamma(A_1 + iA_2)}\\ &= \overline{\Gamma(A)}.\end{aligned}$$

Hermed er den tredje egenskab for en *-isomorfi vist. Vi vil nu vise, at Γ er en isometri.

$$\begin{aligned}\|\Gamma(A)\|_\infty^2 &= \|\Gamma(A)^*\Gamma(A)\|_\infty\\ &= \|\Gamma(A^*)\Gamma(A)\|_\infty\\ &= \|\Gamma(A^*A)\|_\infty\\ &\stackrel{7}{=} r(A^*A)\\ &\stackrel{8}{=} \|A^*A\|\\ &= \|A\|^2\end{aligned}$$

Heraf følger også, at Γ er injektiv. For hvis $\Gamma(A_1) = \Gamma(A_2)$ har vi

$$0 = \|\Gamma(A_1) - \Gamma(A_2)\|_\infty = \|\Gamma(A_1 - A_2)\|_\infty = \|A_1 - A_2\|.$$

Altså er $A_1 = A_2$.
At Γ er surjektiv vises ved at anvende Stone-Weierstrass' sætning, idet vi først viser, at $\operatorname{Ran}\Gamma$ er lukket i $C(\Omega(\mathcal{A}))$.
Lad $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{Ran}\Gamma$ være en Cauchy-følge. Der eksisterer altså en følge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ så $\Gamma(A_n) = y_n$. Da $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge findes for et givet $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ så $\|y_n - y_m\|_\infty < \varepsilon$ for $n, m \geq n_0$. Dvs.

$$\begin{aligned}\|\Gamma(A_n) - \Gamma(A_m)\|_\infty < \varepsilon &\iff\\ \|\Gamma(A_n - A_m)\|_\infty < \varepsilon &\iff\\ \|A_n - A_m\| < \varepsilon &\end{aligned}$$

for $n, m > n_0$. Altså er $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Cauchy-følge i $\mathcal{A}$. Da $\mathcal{A}$ er fuldstændingt, findes et $A \in \mathcal{A}$, så $\lim_{n\mapsto\infty} A_n = A$. Betragt nu

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|y_n - \Gamma(A)\|_\infty &= \lim_{n\to\infty} \|\Gamma(A_n) - \Gamma(A)\|_\infty\\ &= \lim_{n\to\infty} \|\Gamma(A_n - A)\|_\infty\\ &= \lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|\\ &= 0.\end{aligned}$$

---

[7] [**Zhu93**, Korollar 5.2]
[8] Da A^*A er normal

Følgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er hermed konvergent, hvilket betyder, at $\operatorname{Ran}\Gamma$ er fuldstændigt og dermed afsluttet.

Mængden $\operatorname{Ran}\Gamma$ er klart en delalgebra af $C(\Omega(\mathcal{A}))$, da Γ er lineær og multiplikativ.

Billedet af Γ er endvidere selvadjungeret. For tag et $y \in \operatorname{Ran}\Gamma$, så eksisterer $A \in \mathcal{A}$, så $y = \Gamma(A)$. Men $\Gamma(A^*) = \overline{\Gamma(A)} = \overline{y}$. Elementet $\overline{y}$ er altså billedet af A^* ved Γ, så $\overline{y} \in \operatorname{Ran}\Gamma$.

Idet $\Gamma(1_{\mathcal{A}}) = 1$ vil $1 \in \operatorname{Ran}\Gamma$.

Endvidere skiller $\operatorname{Ran}\Gamma$ punkter i $\Omega(\mathcal{A})$. For antag φ, $\psi \in \Omega(\mathcal{A})$ så $\varphi \neq \psi$. Da findes et $A \in \mathcal{A}$ så $\varphi(A) \neq \psi(A)$. Dvs. $\Gamma(A)(\varphi) \neq \Gamma(A)(\psi)$, og $\operatorname{Ran}\Gamma$ skiller hermed punkter i $\Omega(\mathcal{A})$.

Da $\operatorname{Ran}\Gamma$ er en selvadjungeret delalgebra af $C(\Omega(\mathcal{A}))$, $\operatorname{Ran}\Gamma$ skiller punkter i $\Omega(\mathcal{A})$ og $1 \in \operatorname{Ran}\Gamma$, giver Stone-Weierstrass' sætning [**not**, Thm. 5.6], at $\overline{\operatorname{Ran}\Gamma} = C(\Omega(\mathcal{A}))$, idet $\Omega(\mathcal{A})$ er kompakt[9]. Vi har tidligere vist, at $\operatorname{Ran}\Gamma$ er afsluttet, så $\operatorname{Ran}\Gamma = C(\Omega(\mathcal{A}))$. Hermed er Γ en *-isomorfi fra $\mathcal{A}$ på $C(\Omega(\mathcal{A}))$. $\square$

Endvidere gælder følgende klassifikationssætning for en generel C^*-algebra.[10]

SÆTNING 4.8 (GNS). *For enhver C^*-algebra $\mathcal{A}$ eksisterer et Hilbertrum H, så $\mathcal{A}$ er *-isomorf med en del-C^*-algebra af $B(H)$.*

[9] [**Zhu93**, Prop. 4.2]

[10] Et bevis ses i [**Zhu93**, Sætning 14.4]

5. Polardekomposition

Følgende afsnit er alene resultater om C^*-algebraen $B(H)$. Men da en vilkårlig C^*-algebra kan repræsenteres ved en del-C^*-algebra af $B(H)$ for et Hilbertrum H, vil nogle af resultaterne senere anvendes i det generelle tilfælde.[11]

LEMMA 5.1. *For ethvert $T \in B(H)$ gælder*

$$\ker T = (\operatorname{Ran} T^*)^\perp$$

$$\overline{\operatorname{Ran} T} = (\ker T^*)^\perp$$

Dette samt nedenstående lemma er standard resultater fra funktional analysen.[12]

LEMMA 5.2. *Lad $T \in B(H)$. Operatoren T er positiv hvis og kun hvis $(Tx, x) \geq 0$ for alle $x \in H$.*

DEFINITION 5.3. *Hvis $T \in B(H)$ opfylder, at $\|Tx\| = \|x\|$ for alle $x \perp \ker T$ kaldes T en partiel isometri.*
For en partiel isometri T kaldes $\ker T$ initialrummet og $\operatorname{Ran} T$ kaldes billedrummet.

Det ses umiddelbart, at alle isometrier og projektioner er partielle isometrier. For isometrier er det åbenlyst, og vi vil senere vise, at T er en projektion hvis og kun hvis $Tx = x$ for $x \in (\ker T)^\perp$.

For en partiel isometri T er $\operatorname{Ran} T$ lukket.
Det ses, da $\operatorname{Ran} T = \{y \in H \mid \exists x \in H : Tx = y\} = \{Tx : x \in H\} = \{Tx : x \in (\ker T)^\perp\}$, hvor det sidste lighedstegn er opfyldt pga. projektionssætningen.
Problemet er altså reduceret til at vise, at $\{Tx : x \in (\ker T)^\perp\} \subseteq H$ er lukket.
Hvis $y \in \overline{\{Tx : x \in (\ker T)^\perp\}}$, skal vi vise, at der findes $x \in (\ker T)^\perp$ så $Tx = y$. Der findes en følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (\ker T)^\perp$ så $Tx_n \to y$ for $n \to \infty$. Men

$$\|x_n - x_m\| = \|T(x_n - x_m)\| = \|Tx_n - Tx_m\|,$$

da T er en lineær partiel isometri.
Dermed bliver $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Cauchy-følge, idet

$$\|x_n - x_m\| = \|Tx_n - Tx_m\| \leq \|Tx_n - y\| + \|y - Tx_m\|.$$

Da $Tx_n \to y$ for $n \to \infty$ kan afstanden mellem x_n og x_m gøres vilkårlig lille, når bare $n, m \in \mathbb{N}$ vælges store nok. Hilbertrummet H er fuldstændigt og $(\ker T)^\perp$ er et lukket underrum af H [**Rud87**, p. 78], så der findes et $x \in (\ker T)^\perp$ så $x_n \to x$ for $n \to \infty$. Af kontinuiteten af T fås

$$y = \lim_{n\to\infty}(Tx_n) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = Tx.$$

Dvs. $\{Tx : x \in (\ker T)^\perp\}$ er lukket og dermed er $\operatorname{Ran} T$ lukket.

[11] Dette afsnit tager udgangspunkt i [**Zhu93**, Kap. 12].
[12] Et bevis ses i [**Ste00**, Sætning VI.12]

Endvidere er enhver partiel isometri en kontraktion, da $\|Tx\| = \|x\|$ for $x \in (\ker T)^{\perp}$ og $\|Tx\| = \|0\| = 0$ for $x \in (\ker T)$. Så for $x \in H$ findes $x_1 \in \ker T$ og $x_2 \in (\ker T)^{\perp}$ så $x = x_1 + x_2$ jvnf. projektionssætningen. Dermed bliver

$$\|Tx\| = \|T(x_1 + x_2)\| = \|Tx_1 + Tx_2\| \leq \|Tx_1\| + \|Tx_2\| = \|Tx_2\| = \|x_2\| \leq \|x\|.$$

Vi får senere brug for følgende mere intuitive karakteriseringer af projektioner og unitære operatorer.

Eksempel 5.4. For en operator $T \in B(H)$ gælder

(i) T er en projektion, hvis og kun hvis $Tx = x$ for alle $x \in (\ker T)^{\perp}$
(ii) T er unitær, hvis og kun hvis T er en surjektiv isometri

Bevis. Vi vil først vise, at T er en projektion hvis og kun hvis $Tx = x$ for alle $x \in (\ker T)^{\perp}$.

Antag $Tx = x$ for alle $x \in (\ker T)^{\perp}$. Da $\ker T$ er afsluttet, er $H = \ker T \oplus (\ker T)^{\perp}$. Altså kan $x \in H$ skrives som $x = x_1 + x_2$, hvor $x_1 \in \ker T$ og $x_2 \in (\ker T)^{\perp}$.

Da T er lineær er $Tx = Tx_1 + Tx_2 = Tx_2 = x_2$. Dermed fås $T^2x = T(Tx_2) = Tx_2 = Tx$ så $T^2 = T$.

Vi mangler således, at vise at $T^* = T$.

Lad $y \in H$ være valgt vilkårligt. Vi kan skrive $y = y_1 + y_2$ hvor $y_1 \in \ker T$ og $y_2 \in (\ker T)^{\perp}$. Man får nu

$$\begin{aligned}(Tx, y) &= (x_2, y_1 + y_2) = (x_2, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_2) = (x, y_2) = (x, Ty).\end{aligned}$$

Da T^* er entydig fås $T = T^*$, og T er altså en projektion.

Hvis T er en projektion, skal vi vise at $Tx = x$ for $x \in (\ker T)^{\perp}$.
Bemærk at $(\ker T)^{\perp} = (\ker T^*)^{\perp} = \overline{\operatorname{Ran} T}$. Så tag først et $x \in \operatorname{Ran} T$. Der findes altså et $y \in H$ så $x = Ty$, og dermed bliver

$$Tx = T(Ty) = T^2y = Ty = x.$$

For et $x \in \overline{\operatorname{Ran} T}$ findes en følge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \operatorname{Ran} T$ så $x_n \to x$ for $n \to \infty$. Da T er kontinuert, er

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = Tx.$$

Hermed er $Tx = x$ for $x \in (\ker T)^{\perp}$.

Vi vil nu vise, at T er unitær, hvis og kun hvis T er en surjektiv isometri.

Antag først at $T \in B(H)$ er unitær, så fås

$$\|x\|^2 = \|Ix\|^2 = \|T^*Tx\|^2 = (T^*Tx, T^*Tx) = (Tx, T(T^*T)x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2.$$

Så T er altså en isometri, og det ses let, at T er surjektiv. For tag $y \in H$ og sæt $x = T^*y$, så er $Tx = TT^*y = y$.

Antag nu at T er en surjektiv isometri. Dermed er

$$
\begin{aligned}
&\|Tx\|^2 = \|x\|^2 \iff \\
&(Tx,Tx) - (x,x) = 0 \iff \\
&(T^*Tx,x) - (x,x) = 0 \iff \qquad (10)\\
&((T^*T - I)x,x) = 0 \iff \\
&T^*T = I.
\end{aligned}
$$

Da T er en surjektiv isometri, er T invertibel. Fra (10) ses, at $T^* = T^{-1}$ da T^{-1} er entydig, og dermed er T unitær. □

PROPOSITION 5.5. *En operator $T \in B(H)$ er en partiel isometri, hvis og kun hvis T^*T er projektionen på initialrummet for T.*

BEVIS. Antag først, at T er en partiel isometri. Dermed gælder for $x \in H$ at

$$((I - T^*T)x,x) = (x,x) - (T^*Tx,x) = \|x\|^2 - (Tx,Tx) = \|x\|^2 - \|Tx\|^2 \geq 0,$$

da T er en kontraktion.

Nu giver 5.2 at $I - T^*T$ er positiv, og kvadratroden er dermed defineret.
For $x \in (\ker T)^{\perp}$ er $\|Tx\| = \|x\|$ og

$$
\begin{aligned}
\left\|\sqrt{I - T^*T}x\right\|^2 &= \left(\sqrt{I - T^*T}x, \sqrt{I - T^*T}x\right)\\
&= \left(\left(\sqrt{I - T^*T}\right)^* \sqrt{I - T^*T}x, x\right)\\
&= \left(\sqrt{I - T^*T}^2 x, x\right)\\
&= ((I - T^*T)x,x)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Stadig for $x \in (\ker T)^{\perp}$ fås

$$\|(I - T^*T)x\| = \left\|\sqrt{I - T^*T}\sqrt{I - T^*T}x\right\| \leq \left\|\sqrt{I - T^*T}\right\| \left\|\sqrt{I - T^*T}x\right\| = 0.$$

Dvs. $\|(I - T^*T)x\| = 0$ hvilket er ækvivalent med at $(I - T^*T)x = 0$.
Så $T^*Tx = x$ for $x \in (\ker T)^{\perp}$.

Dermed er T^*T en projektion, og T^*T er klart på $(\ker T)^{\perp}$.

Antag omvendt at T^*T er en projektion. Eksempel 5.4 giver at $T^*Tx = x$ for alle $x \in (\ker(T^*T))^{\perp}$ og $T^*Tx = 0$ for alle $x \in \ker(T^*T)$. Dvs.

$$
\begin{aligned}
\|Tx\|^2 = (Tx,Tx) = (T^*Tx,x) &= \begin{cases} (x,x), & x \in (\ker(T^*T))^{\perp} \\ (0,x), & x \in \ker(T^*T) \end{cases}\\
&= \begin{cases} \|x\|^2, & x \in (\ker(T^*T))^{\perp} \\ 0, & x \in \ker(T^*T) \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Projektionssætningen giver, at ethvert element $x \in H$ kan skrives som $x = x_1 + x_2$, hvor $x_1 \in (\ker(T^*T))^{\perp}$ og $x_2 \in \ker(T^*T)$. Men $Tx = Tx_1 + Tx_2$, så $\ker T = \ker(T^*T)$ da $Tx_2 = 0$. Dvs. $(\ker T)^{\perp} = (\ker(T^*T))^{\perp}$. Det ses altså, at T er en partiel isometri med initialrum $(\ker T)^{\perp}$. □

KOROLLAR 5.6. *En operator $T \in B(H)$ er en partiel isometri, hvis og kun hvis T^* er en partiel isometri.*

BEVIS. Antag først at T er en partiel isometri. Af 5.5 fås, at T^*T er en projektion på $(\ker T)^\perp$. Så alle $x \in H$ kan entydigt opsplittes i et element fra $(\ker T)^\perp$ og et element fra $\ker T$, jvnf. projektionssætningen. Heraf fås

$$T(T^*T)x = \begin{cases} Tx, & x \in (\ker T)^\perp \\ T0, & x \in \ker T \end{cases} = \begin{cases} Tx, & x \in (\ker T)^\perp \\ 0, & x \in \ker T \end{cases} = Tx.$$

Dermed er $T(T^*T) = T$.

Dvs. $(TT^*)^2 = T(T^*T)T^* = TT^*$ og $(TT^*)^* = TT^*$.
Så TT^* er en projektion. Af 5.5 fås at T^* er en partiel isometri.

På tilsvarende måde ses, at T er en partiel isometri, hvis T^* er en partiel isometri. □

Vi er nu nået frem til hovedsætningen i dette afsnit.

SÆTNING 5.7 (Polardekomposition). *For alle $T \in B(H)$ findes en positiv operator $P \in B(H)$ og en partiel isometri $V \in B(H)$, så $T = VP$.*
Endvidere er V og P entydige hvis $\ker P = \ker V$.[13]

BEVIS. Sæt $P = |T| = \sqrt{T^*T}$ som er positiv, idet T^*T er positiv.

Dermed fås

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (P^*Px, x) = (P^2x, x) = (T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2$$

for $x \in H$. Så $\|Px\| = \|Tx\|$.

Definer nu $\widetilde{V} : \operatorname{Ran} P \to H$ ved $\widetilde{V}(Px) = Tx$ for $x \in H$. Bemærk, at $\operatorname{Ran} P$ ikke nødvendigvis er lukket, så målet er at udvide $\widetilde{V}$ til $\overline{\operatorname{Ran} P}$.

Det ses først at $\widetilde{V}$ er en isometri, da $\|\widetilde{V}(Px)\| = \|Tx\| = \|Px\|$ for $x \in H$. Bemærk også, at $\widetilde{V}$ både er lineær og begrænset, da

$$\|\widetilde{V}\| = \sup\{\|\widetilde{V}(Px)\| : \|Px\| \le 1\} = \sup\{\|Px\| : \|Px\| \le 1\} = 1 < \infty$$

og

$$\begin{aligned} \widetilde{V}(\alpha Px_1 + \beta Px_2) &= \widetilde{V}(P(\alpha x_1 + \beta x_2)) \\ &= T(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 \\ &= \alpha\widetilde{V}(Px_1) + \beta\widetilde{V}(Px_2). \end{aligned}$$

Nu kan $\widetilde{V}$ udvides ved uniform kontinuitet til en lineær og begrænset operator $V : \overline{\operatorname{Ran} P} \to H$, så $V|_{\operatorname{Ran} P} = \widetilde{V}$.

[13] Resultatet kan ikke direkte føres tilbage til en generel C^*-algebra, da V ikke nødvendigvis vil tilhøre C^*-algebraen.

Bemærk, at V også er en isometri, for når $y \in \overline{\operatorname{Ran} P}$, findes en følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ så $P(x_n) \to y$ for $n \to \infty$. Dvs.

$$\|Vy\| = \|\lim_{n\to\infty} \widetilde{V}(Px_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|\widetilde{V}(Px_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|Px_n\| = \|\lim_{n\to\infty} Px_n\| = \|y\|,$$

da $\|\cdot\|$ er kontinuert og $\widetilde{V}$ er en isometri.

Sæt nu $Vx = 0$ for $x \in (\overline{\operatorname{Ran} P})^\perp$, så V bliver en partiel isometri med initialrum $\overline{\operatorname{Ran} P}$.

For $x \in H$ har vi altså $Tx = \widetilde{V}Px = VPx$, og dermed er $T = VP$.

For at se at $\ker V = \ker P$ bruges følgende

$$\ker V = (\overline{\operatorname{Ran} P})^\perp = ((\ker P^*)^\perp)^\perp = (\overline{\ker P^*}) = \ker P^* = \ker P.$$

For at vise entydigheden, antages at der findes $W, Q \in B(H)$ så $T = WQ$, hvor $Q \geq 0$ og W er en partiel isometri, som opfylder $\ker W = \ker Q$.

Af 5.5 fås at W^*W er en projektion på $(\ker W)^\perp = (\ker Q)^\perp = (\ker Q^*)^\perp = \overline{\operatorname{Ran} Q}$, så

$$P^2 = \left(\sqrt{T^*T}\right)^2 = T^*T = (WQ)^*(WQ) = Q^*W^*WQ = QW^*WQ.$$

Men W^*W er en projektion på $\operatorname{Ran} Q$, og hermed er $QW^*WQ = Q^2$ jvnf. 5.4. Dermed er $P^2 = Q^2$, og da $P \geq 0$, $Q \geq 0$ og $\sqrt{\cdot}$ er entydig, er $P = Q$.

Vi har altså $WP = VP$, så $W = V$ på $\operatorname{Ran} P$.
Da

$$(\ker P)^\perp = \left((\operatorname{Ran} P^*)^\perp\right)^\perp = \left((\operatorname{Ran} P)^\perp\right)^\perp = \overline{\operatorname{Ran} P}$$

er $W = V$ på $(\ker P)^\perp$.
For hvis $y \in \overline{\operatorname{Ran} P}$ findes en følge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{Ran} P$ så $y_n \to y$ for $n \to \infty$. Dermed fås

$$Wy = W(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty}(Wy_n) = \lim_{n\to\infty}(Vy_n) = V(\lim_{n\to\infty} y_n) = Vy,$$

da W og V er kontinuerte og $W = V$ på $\operatorname{Ran} P$.

Altså er $W = V$ på $(\ker P)^\perp = (\overline{\operatorname{Ran} P})$.

Fra før har vi at

$$(\operatorname{Ran} P)^\perp = \ker P^* = \ker P = \ker V$$

og

$$\ker P = \ker Q = \ker W,$$

da $P = Q$ og $\ker Q = \ker W$ pr. antagelse.
Dermed er $\ker W = \ker V = (\operatorname{Ran} P)^\perp$ hvoraf $W = V = 0$ på $(\operatorname{Ran} P)^\perp$.

Vi har altså vist, at $W = V$ på $(\operatorname{Ran} P)^\perp$ og $W = V$ på $\overline{\operatorname{Ran} P} = \left((\operatorname{Ran} P)^\perp\right)^\perp$.
Fra projektionssætningen fås at $W = V$ på H, da $H = (\operatorname{Ran} P)^\perp \oplus \overline{\operatorname{Ran} P}$.

Polardekompositionen er således entydig under antagelse af at $\ker P = \ker V$. $\square$

6. Ekstremalpunkter i enhedskuglen for en C^*-algebra

Ved at benytte de to klassifikationssætninger for C^*-algebraer og resultaterne vedr. partielle isometrier kan hovedsætningen om ekstremalpunkter i enhedskuglen for en C^*-algebra vises.[14]

I beviset får vi brug for følgende lemma.

LEMMA 6.1. *I enhver C^*-algebra $\mathcal{A}$ med identitet I, er I et ekstremalpunkt i enhedskuglen* $(\mathcal{A})_1$.

BEVIS. Antag, at I kan skrives som et middel af to elementer fra $(\mathcal{A})_1$, altså $I = \frac{1}{2}(A+B)$, hvor $A, B \in (\mathcal{A})_1$. Målet er at vise $A = B = I$, og dermed at I er et ekstremalpunkt.

Vi får først følgende identiteter

$$I^* = \left(\frac{1}{2}(A+B)\right)^* = \frac{1}{2}(A^* + B^*),$$

$$I = I^* = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}(A^* + B^*)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(B + B^*)\right).$$

Sæt $C = \frac{1}{2}(A + A^*)$ og $D = \frac{1}{2}(B + B^*)$, så $I = \frac{1}{2}(C + D)$.

Da vil C og D ligge i enhedkuglen og tilmed være selvadjungerede, idet

$$\|C\| = \left\|\frac{1}{2}(A + A^*)\right\| = \frac{1}{2}\|A + A^*\| \le \frac{1}{2}(\|A\| + \|A^*\|) = \frac{1}{2}(\|A\| + \|A\|) \le \frac{1}{2}(1+1) = 1,$$

$$C^* = \left(\frac{1}{2}(A + A^*)\right)^* = \frac{1}{2}(A^* + (A^*)^*) = \frac{1}{2}(A^* + A) = C.$$

Tilsvarende fås at $D^* = D$ og $\|D\| \le 1$.

Eftersom $D = 2I - C$ vil D og C kommutere, fordi

$$DC = (2I - C)C = 2IC - C^2 = 2CI - C^2 = C(2I - C) = CD.$$

Dermed er C^*-algebraen genereret af I, C og D kommutativ, da $\{I, C, D\}$ er kommutativ og selvadjungeret. Derfor kan den repræsenteres som $C(K)$, hvor K er et passende valgt kompakt Hausdorffrum jvnf. 4.7.

Fra 3.2 fås at $I = C = D$, da I kan repræsenteres ved den konstante funktion 1 som er ekstremal i $(C(K))_1$.

Dvs. $\frac{1}{2}(A + A^*) = \frac{1}{2}(B + B^*) = I$.
Derfor må A være normal, da $A^* = 2I - A$ og dermed

$$A^*A = (2I - A)A = 2IA - A^2 = 2AI - A^2 = A(2I - A) = AA^*.$$

C^*-algebraen $C^*(A, A^*, I)$ er kommutativ, da $\{A, A^*, I\}$ er kommutativ. C^*-algebraen kan derfor repræsenteres ved $C(K)$ for et kompakt Hausdorffrum K. Da $I = \frac{1}{2}(A + A^*)$ giver 3.2 som før at $I = A = A^*$.

Så $A = B = I$ og derfor er I et ekstremalpunkt i $(\mathcal{A})_1$. □

[14]Dette afsnit tager udgangspunkt i **[Kad51]**

SÆTNING 6.2. *Mængden af ekstremalpunkter i enhedshedskuglen $(\mathcal{A})_1$ for en C^*-algebra består præcis af de partielle isometrier $U \in \mathcal{A}$, hvor $U^*U = E$, $UU^* = F$ og $(I-F)\mathcal{A}(I-E) = (0)$. De eneste normale ekstremalpunkter er de unitære operatorer i $\mathcal{A}$, og de er også de eneste invertible ekstremalpunkter.*

BEVIS. Bemærk, at vi kan bruge resultaterne fra afsnit 5, da vi kan betragte $\mathcal{A}$ som en del-C^*-algebra af $B(H)$ for et Hilbertrum H.

Vi starter med at vise, at hvis $U \in \mathcal{A}$ er en partiel isometri, med initialrum $\operatorname{Ran} E$ og billedrum $\operatorname{Ran} F$, som opfylder $(I-F)\mathcal{A}(I-E) = (0)$ hvor $F = UU^*$ og $E = U^*U$, da er U et ekstremalpunkt i enhedskuglen for $\mathcal{A}$.

Antag $U = \frac{1}{2}(A+B)$ hvor A, B ligger i enhedskuglen for $\mathcal{A}$. Vi vil vise at $U = A = B$.

Vi har altså $E = U^*U = U^*(\frac{1}{2}(A+B)) = \frac{1}{2}(U^*A + U^*B)$.
Fra 5.5 er U^*U en projektion på $\operatorname{Ran} E$. Dermed er

$$E = U^*U = (U^*U)^2 = (U^*U)E = \frac{1}{2}(U^*AE + U^*BE). \tag{11}$$

Men da $E = U^*U$ er en projektion på $\operatorname{Ran} E = (\ker U)^{\perp}$ og $\operatorname{Ran} U^* \subseteq (\ker U)^{\perp}$ er $EU^* = U^*$, jvnf. 5.4.

Betragt nu C^*-algebraen $E\mathcal{A}E$, som har identitet E. Det ses da et $C \in E\mathcal{A}E$ er på formen $C = EDE$, hvor $D \in \mathcal{A}$. Dermed er

$$EC = E^2DE = EDE = C,$$
$$CE = EDE^2 = EDE = C.$$

Da $EU^* = U^*$ er det klart, at $U^*AE, U^*BE \in E\mathcal{A}E$, idet $U^*AE = EU^*AE$ og $U^*BE = EU^*BE$.

Nu giver 6.1 og (11) at $U^*AE = U^*BE = E$.

Da E er projektionen på $\operatorname{Ran} E$ og $U^*AE = E$, er $U^*AEx = Ex = x$ for $x \in \operatorname{Ran} E$. Så

$$U^*AEx = U^*Ax = Ex = x$$

for $x \in \operatorname{Ran} E$.

Da A ligger i enhedskuglen for $\mathcal{A}$ er $\|Ax\| \leq \|x\|$. Men eftersom U er en partiel isometri, er U^* en partiel isometri med initialrum $\operatorname{Ran} F$, og derfor er $\|U^*\| = 1$.
Så

$$\|x\| = \|U^*Ax\| \leq \|U^*\|\|Ax\| = \|Ax\|,$$

og derfor bliver $\|Ax\| = \|x\|$ for $x \in \operatorname{Ran} E$.

Eftersom U^* har initialrum $\operatorname{Ran} F$, er U^* kun normbevarende på $\operatorname{Ran} F$. Så da $\|U^*Ax\| = \|x\| = \|Ax\|$, vil $Ax \in \operatorname{Ran} F$.

Vi har nu $U^*Ux = Ex = x$ for $x \in \operatorname{Ran} E$. Operatoren U^* er en isometri på $\operatorname{Ran} F$ og er dermed injektiv på $\operatorname{Ran} F$, så da $U^*Ux = x = U^*Ax$ er $Ux = Ax$ for $x \in \operatorname{Ran} E$.

Så

$$AEx = \begin{cases} A0, & x \perp \operatorname{Ran} E \\ Ax, & x \in \operatorname{Ran} E \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \perp \operatorname{Ran} E \\ Ax, & x \in \operatorname{Ran} E \end{cases} = Ux$$

og hermed er $AE = U$.

Analogt fås at $BE = U$, og da $U^* = \frac{1}{2}(A^* + B^*)$ fås tilsvarende at $A^*F = B^*F = U^*$.
Dvs.

$$U = (U^*)^* = (A^*F)^* = F^*A = FA,$$
$$U = (U^*)^* = (B^*F)^* = F^*B = FB$$

da $F^* = F$. Så $FA = FB = U$.

Antagelsen var at $(I - F)\mathcal{A}(I - E) = (0)$ så

$$\begin{aligned} 0 &= (I - F)A(I - E) \\ &= (A - FA)(I - E) \\ &= A - AE + FAE - FA \\ &= A - AE - FA(I - E), \end{aligned}$$

dvs. $A = FA(I - E) + AE$.
Der gælder også

$$FA(I - E) + AE = FB(I - E) + BE,$$

og ved brug af antagelsen endnu en gang, fås $FB(I - E) + BE = B$.

Vi har altså vist at $B = A$, og dermed er U ekstremal.

Antag nu, at T er et ekstremalpunkt på $(\mathcal{A})_1$. Vi vil vise, at T er en partiel isometri ved at gøre rede for at T^*T er en projektion.

Betragt C^*-algebraen $C^*(I, T^*T)$, der er frembragt af I og T^*T. Da $\{I, T^*T\}$ er kommutativ, er $C^*(I, T^*T)$ kommutativ, og kan dermed repræsenteres ved $C(K)$ for et kompakt Hausdorff rum K. Men T^*T er pr. definition positiv og

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 = 1,$$

idet $T \in (\mathcal{A})_1$ og T er ekstremal.

Vi repræsenterer T^*T med $h \in C(K)$, hvor $\|h\|_\infty = 1$. Da T^*T er positiv er $\sigma(T^*T) \subseteq \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, så h er en reel funktion. Endvidere er $0 \leq h(x) \leq 1$ for alle $x \in K$. Vi vil vise at $h(x) = 1$ eller $h(x) = 0$ for alle $x \in K$. Antag, der findes $x_0 \in K$, så $0 < h(x_0) < 1$. Da $h(x_0) \neq 0$ og h er kontinuert, kan vi finde åbne mængder $U, V \subseteq K$, der opfylder

$$x_0 \in V \subseteq K,\ \overline{V} \subseteq U \text{ og } 0 < h(x) < 1 \text{ for alle } x \in U.$$

Ifølge Urysohns lemma eksisterer en kontinuert funktion $\varphi : K \mapsto [0,1]$, så $\varphi(x_0) = 1$ og $\varphi|_{V^c} = 0$.
Sæt

$$f(x) = \begin{cases} i\sqrt{\frac{1-h(x)}{h(x)}}\varphi(x), & x \in U \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$

Da $h(x) \neq 0$ for alle $x \in U$ er f veldefineret. Mængderne U og $(\overline{V})^c$ er en åben overdækning af K, og da f er kontinuert på både U og $(\overline{V})^c$ er f kontinuert på hele K.

For $x \in U$ gælder

$$\begin{aligned} h(x)\,|1+f(x)|^2 &= h(x)\left|1+i\sqrt{\frac{1-h(x)}{h(x)}}\varphi(x)\right|^2 \\ &= h(x)\left(1+\frac{1-h(x)}{h(x)}\varphi(x)^2\right) \\ &= h(x)\left(\frac{h(x)+1-h(x)}{h(x)}\varphi(x)^2\right) \\ &= \varphi(x)^2. \end{aligned}$$

For $x \in U^c$ er $h(x)\,|1+f(x)|^2 = h(x)$, da $f(x) = 0$. Eftersom $\|h\|_\infty = 1$ og $\|\varphi\|_\infty = 1$ fås $\|h\,|1+f|^2\,\|_\infty = 1$. Analogt er $\|h\,|1-f|^2\,\|_\infty = 1$.

Repræsenter nu f med $C \in C^*(I, T^*T)$. Iflg. ovenstående gælder

$$\begin{aligned} \|T(I+C)\|^2 &= \|(T(I+C))^*T(I+C)\| \\ &= \|(I+C)^*T^*T(I+C)\| \\ &= \left\|\overline{(1+f)}h(1+f)\right\|_\infty \\ &= \left\|h|1+f|^2\right\|_\infty \\ &= 1. \end{aligned}$$

Tilsvarende er $\|T(I-C)\| = 1$. Dvs. $T(I+C), T(I-C) \in (\mathcal{A})_1$ men

$$T = \frac{1}{2}(T(I+C) + T(I-C))$$

Da T er et ekstremalpunkt i $(\mathcal{A})_1$ er $T(I+C) = T(I-C) = T$. Heraf er $TC = 0$ så $C^*T^*TC = 0$, og dermed er $h|f|^2 \equiv 0$. Dette er en modstrid da $h(x_0)|f(x_0)|^2 \neq 0$.

Vi har hermed vist, at der for alle $x \in K$ gælder, at $h(x) = 0$ eller $h(x) = 1$, hvilket betyder, at $\sigma(h) \subseteq \{0, 1\}$.
Elementet T^*T er repræsenteret ved h, så $\sigma(T^*T) \subseteq \{0, 1\}$, og T^*T er dermed en projektion jvnf. [**Zhu93**, Sætning 10.4], da T^*T er normal. Af 5.5 fås således, at T er en partiel isometri.

Vi mangler at vise, at

$$(I-F)\mathcal{A}(I-E) = (0) \text{ for } F = TT^* \text{ og } E = T^*T.$$

Antag $A \in (I-F)\mathcal{A}(I-E)$ og at $\|A\| \leq 1$, dvs. der findes et $B \in \mathcal{A}$ så $A = (I-F)B(I-E)$. Lad $z = x + y$ være en enhedsvektor med $x \in \operatorname{Ran} E$ og $y \in \operatorname{Ran}(I-E)$. Heraf fås

$$(T \pm A)z = (T \pm A)(x+y) = Tx + Ty \pm Ax \pm Ay.$$

Men $y \in \ker E$ så

$$Ey = 0 \iff T^*Ty = 0 \iff Ty = 0,$$

da T^* er en partiel isometri med initialrum $\operatorname{Ran} T$.
Da $Ex = x$ for $x \in \operatorname{Ran} E$ er

$$Ax = AEx = (I-F)B(I-E)Ex = 0,$$

da $E = E^2$.
Altså er $(T \pm A)z = Tx \pm Ay$. For $x \in \operatorname{Ran} E$ gælder yderligere

$$T^*Tx = x \iff T(T^*Tx) = Tx \iff (TT^*)Tx = Tx \iff FTx = Tx$$

Da F er en projektion er $F = F^2$, så $FA = F(I - F)B(I - E) = 0$.

Vi kan derfor skrive

$$(T \pm A)z = FTx \pm (Ay - FAy) = FTx \pm (I - F)Ay.$$

Eftersom $\operatorname{Ran} F \perp \operatorname{Ran}(I - F)$ har vi

$$\begin{aligned}\|(T \pm A)z\|^2 &= \|FTx \pm (I - F)Ay\|^2 \\ &= \|FTx\|^2 + \|(I - F)Ay\|^2 \\ &= \|Tx\|^2 + \|Ay\|^2 \\ &\leq \|T\|^2\|x\|^2 + \|A\|^2\|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ &= \|z\|^2.\end{aligned}$$

da $z = x + y$, hvor $x \perp y$.
Vi har hermed vist, at $\|T \pm A\| \leq 1$, så $T + A$, $T - A \in (\mathcal{A})_1$. Men

$$T = \tfrac{1}{2}((T + A) + (T - A))$$

og da T er et ekstremalpunkt, er $T + A = T - A = T$, dvs. $A = 0$.
Vi har altså vist, at for et element $A \in (I - F)\mathcal{A}(I - E)$ med $\|A\| \leq 1$ er $A = 0$. Men for et vilkårligt element i $C \in (I - F)\mathcal{A}(I - E)$ findes et $k > 0$, og et $A \in (I - F)\mathcal{A}(I - E)$ med $\|A\| \leq 1$, så $C = kA$. Det giver således, at C = 0, og dermed er

$$(I - F)\mathcal{A}(I - E) = (0).$$

Vi skal nu vise, at de invertible ekstremalpunkter er de unitære operatorer i $(\mathcal{A})_1$.

Hvis enten $F = I$ eller $E = I$ er $(I - F)\mathcal{A}(I - E) = 0$, dvs. at en isometri U $(U^*U = I)$ eller en co-isometri U $(UU^* = I)$ er et ekstremalpunkt i $(\mathcal{A})_1$.

En unitær operator $U \in \mathcal{A}$ er et ekstremalpunkt, idet U er en isometri.

Hvis U er normal og et ekstremalpunkt på $(\mathcal{A})_1$, er U unitær. For når U er normal fås $U^*U = UU^* = E$, men da U er ekstremal er $(I - E)\mathcal{A}(I - E) = (0)$. Heraf ses at $I - E = 0$, dvs. $I = E$. Dermed er $U^*U = UU^* = I$, så U er unitær.

Vi mangler at vise, at hvis T er et invertibelt ekstremalpunkt i $(\mathcal{A})_1$, da er T unitær.

Når T er ekstremal er T en partiel isometri. Så $TT^*x = x$ for $x \in (\ker T)^\perp$. Men T er invertibel så $\ker T = \{0\}$, dvs. $T^*T = I$. Da T^{-1} er entydig er $T^* = T^{-1}$, og dermed er $T^*T = TT^* = I$.

Vi har altså vist, at de invertible ekstremalpunkter er de unitære operatorer i $(\mathcal{A})_1$. $\square$

7. Konveks kombination af unitære elementer

I dette afsnit vil vi vise, at ethvert element i den åbne enhedskugle $(\mathcal{A})_1^0$ i en C^*-algebra $\mathcal{A}$ kan skrives som et middel af endeligt mange unitære elementer fra $\mathcal{A}$. Herefter skal resultatet bruges til at vise, at ethvert element i $\mathcal{A}$ er et positivt multiplum af summen af tre unitære elementer.

Ligeledes vil vi med et eksempel illustrere, at sætningen kan benyttes til at beskrive normen af lineær afbildning mellem to C^*-algebraer. Endvidere gives et eksempel på et element i en C^*-algebra, der ikke kan skrives som en konveks kombination af unitære elementer.[15]

SÆTNING 7.1. *Hvis S er et element i en C^*-algebra $\mathcal{A}$ med $\|S\| < 1 - 2n^{-1}$ for et helt tal $n \geq 3$, eksisterer n unitære elementer $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{A}$ så $S = n^{-1}(U_1 + U_2 + \cdots + U_n)$.*

BEVIS. Lad $T \in (\mathcal{A})_1^0$ og lad $V \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$, hvor $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ er mængden af unitære elementer i $\mathcal{A}$. Der gælder

$$\frac{V+T}{2} = \frac{V(I+V^{-1}T)}{2} = \frac{V(I+V^*T)}{2}.$$

Elementet V^* er ligeledes et unitært element i $\mathcal{A}$ og er dermed en isometri,
så $\|V^*T\| = \|T\| < 1$.
Dvs. $I + V^*T$ er invertibel jvnf. [**Zhu93**, Proposition 2.1].

$$\left\|\frac{V+T}{2}\right\| = \frac{1}{2}\|V+T\| \leq \frac{1}{2}(\|V\| + \|T\|) < \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Da V er invertibel, er $\frac{V+T}{2} = \frac{V(I+V^*T)}{2}$ et invertibelt element i $(\mathcal{A})_1^0$, da det er produktet af to invertible elementer og $\left\|\frac{V+T}{2}\right\| < 1$.

Vi kan derfor finde $U \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ og et positivt element $P \in (\mathcal{A})_1^0$ så $\frac{V+T}{2} = UP$.

For sæt $P = \left|\frac{V+T}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{V+T}{2}\right)^* \frac{V+T}{2}}$. Da er P klart positiv og invertibel, da $\left(\frac{V+T}{2}\right)^* \frac{V+T}{2}$ er invertibel som produktet af invertible elementer. Dvs. $0 \notin \sigma\left(\left(\frac{V+T}{2}\right)^* \frac{V+T}{2}\right)$ og dermed vil $0 \notin \sqrt{\sigma\left(\left(\frac{V+T}{2}\right)^* \frac{V+T}{2}\right)}$. Bemærk, at $\sigma\left(\left(\frac{V+P}{2}\right)^* \frac{V+P}{2}\right) \subseteq \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ da $\left(\frac{V+P}{2}\right)^* \frac{V+P}{2}$ er normal.

Fra Spectral Mapping [**Zhu93**, Thm. 10.3] fås at $0 \notin \sigma\left(\sqrt{\left(\frac{V+T}{2}\right)^* \frac{V+T}{2}}\right) = \sigma(P)$. Dermed er P invertibel.
Ligeledes er $\|P\| < 1$, da $\left\|\frac{V+T}{2}\right\| < 1$.

Sæt $U = \frac{V+T}{2}P^{-1}$, dvs. $\frac{V+T}{2} = UP$. Det ses, at U er invertibel, da det er produktet af to invertible elementer.

[15]Dette afsnit tager udgangspunkt i [**KP85**]

Vi kan vise, at U er unitær ved at benytte, at P er selvadjungeret.

$$\begin{aligned}
UU^* &= \frac{V+T}{2}P^{-1}\left(\frac{V+T}{2}P^{-1}\right)^* \\
&= \frac{V+T}{2}P^{-1}\left(P^{-1}\right)^*\left(\frac{V+T}{2}\right)^* \\
&= \frac{V+T}{2}P^{-1}\left(P^*\right)^{-1}\left(\frac{V+T}{2}\right)^* \\
&= \frac{V+T}{2}P^{-1}\left(P^{-1}\right)\left(\frac{V+T}{2}\right)^* \\
&= \frac{V+T}{2}P^{-2}\left(\frac{V+T}{2}\right)^* \\
&= \frac{V+T}{2}\left(\left(\frac{V+T}{2}\right)^*\frac{V+T}{2}\right)^{-1}\left(\frac{V+T}{2}\right)^* \\
&= \frac{V+T}{2}\left(\frac{V+T}{2}\right)^{-1}\left(\left(\frac{V+T}{2}\right)^*\right)^{-1}\left(\frac{V+T}{2}\right)^* \\
&= I\cdot I \\
&= I.
\end{aligned}$$

Da U^{-1} entydig, er $U^* = U^{-1}$. Så U er unitær.

Sæt $W_1 = P + i\sqrt{I-P^2}$ og $W_2 = P - i\sqrt{I-P^2}$. Ved at betragte $\mathcal{A}$ som en del-C^*-algebra af $B(H)$ ses, at $I - P^2$ er positiv. For tag et vilkårligt $x \in H$ og

$$\begin{aligned}
((I-P^2)x, x) &= (Ix, x) - (P^2x, x) \\
&= (x, x) - (P^*Px, x) \\
&= \|x\|^2 - (Px, Px) \\
&= \|x\|^2 - \|Px\|^2 \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

da $\|P\| < 1$. Dvs. $I - P^2$ er positiv og W_1, W_2 er dermed veldefinerede.
Heraf fås

$$\frac{W_1+W_2}{2} = \frac{P + i\sqrt{I-P^2} + P - i\sqrt{I-P^2}}{2} = P,$$

og W_1, W_2 er unitære, da

$$\begin{aligned}
W_1W_1^* &= \left(P + i\sqrt{I-P^2}\right)\left(P - i\sqrt{I-P^2}\right) \\
&= P^2 - Pi\sqrt{I-P^2} + i\sqrt{I-P^2}P + \left(I-P^2\right) \\
&= P^2 - i\sqrt{I-P^2}P + i\sqrt{I-P^2}P + \left(I-P^2\right) \\
&= I,
\end{aligned}$$

hvor $Pi\sqrt{I-P^2} = i\sqrt{I-P^2}P$, da P kommuterer med $I - P^2$ og dermed også med $\sqrt{I-P^2}$.

Tilsvarende fås $W_1^*W_1 = I$ og $W_2W_2^* = I = W_2^*W_2$.

Vi har altså vist at

$$\frac{V+T}{2} = UP = U\frac{W_1+W_2}{2}.$$

Dvs. $V + T = UW_1 + UW_2$.

Sæt $U_1 = UW_1$ og $V_1 = UW_2$. Produktet af unitære elementer er igen unitært, så

$$V + T = U_1 + V_1$$

for $U_1, V_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$.

Dette giver

$$\begin{aligned} V + (n-1)T &= V + T + (n-2)T \\ &= U_1 + V_1 + (n-2)T. \end{aligned}$$

Heraf fås

$$\begin{aligned} &V_1 + (n-2)T = U_2 + V_2 + (n-3)T, \\ &V_2 + (n-3)T = U_3 + V_3 + (n-4)T, \\ &\dots \\ &V_{n-2} + (n-(n-1))T = V_{n-2} + T = U_{n-1} + V_{n-1} \end{aligned}$$

for $U_2, \dots, U_{n-1} \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ og $V_1, \dots, V_{n-1} \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$.

Hvis vi sætter $U_n = V_{n-1}$, har vi vist, at der findes unitære elementer $U_1, \dots, U_n$ så

$$V + (n-1)T = U_1 + U_2 + \dots + U_n. \tag{12}$$

Af antagelsen $\|S\| < 1 - 2n^{-1}$ og $n \geq 3$ fås

$$\begin{aligned} \|(n-1)^{-1}(nS - I)\| &= (n-1)^{-1}\|nS - I\| \\ &\leq (n-1)^{-1}(\|nS\| + 1) \\ &= (n-1)^{-1}(n\|S\| + 1) \\ &< (n-1)^{-1}(n(1-2n^{-1}) + 1) \\ &= (n-1)^{-1}(n - 2 + 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dvs. $(n-1)^{-1}(nS - I) \in (\mathcal{A})_1^0$. Identiteten I er unitær, så (12) er opfyldt med $T = (n-1)^{-1}(nS - I)$ og $V = I$. Heraf fås

$$\begin{aligned} I + (n-1)(n-1)^{-1}(nS - I) = U_1 + U_2 + \dots + U_n &\iff \\ I + nS - I = U_1 + U_2 + \dots + U_n &\iff \\ nS = U_1 + U_2 + \dots + U_n &\iff \\ S = n^{-1}(U_1 + U_2 + \dots + U_n)& \end{aligned}$$

hvor $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$. □

Vi har hermed vist, at ethvert element S i den åbne enhedskugle $(\mathcal{A})_1^0$ kan skrives som et middel af n unitære elementer fra $\mathcal{A}$. Tallet n afhænger af afstanden fra S til randen af enhedskuglen. Resultatet kan nu benyttes til at bevise følgende korollar.

KOROLLAR 7.2. *Ethvert element i en C^*-algebra er et positivt multiplum af summen af tre unitære elementer.*

BEVIS. Lad $\mathcal{A}$ være en C^*-algebra, og betragt først tilfældet hvor $A \in \mathcal{A}$ med $\|A\| < \frac{1}{3}$, dvs. $\|A\| < 1 - 2 \cdot 3^{-1}$.

Af 7.1 fås $A = \frac{1}{3}(U_1 + U_2 + U_3)$, hvor $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$.

Antag nu, at A er et vilkårligt element i $\mathcal{A}$. For ethvert $\varepsilon > 0$ fås

$$\frac{\|A\|}{3\|A\| + 3\varepsilon} = \frac{1}{3 + 3\frac{\varepsilon}{\|A\|}} = \frac{1}{3(1 + \frac{\varepsilon}{\|A\|})} < \frac{1}{3}.$$

Dvs. normen af $\frac{A}{3\|A\|+3\varepsilon}$ er mindre end $\frac{1}{3}$, så 7.1 giver, at der findes unitære elementer U_1, U_2, U_3 så

$$\begin{aligned} \frac{A}{3\|A\| + 3\varepsilon} &= \frac{1}{3}(U_1 + U_2 + U_3) \iff \\ \frac{A}{\|A\| + \varepsilon} &= U_1 + U_2 + U_3 \iff \\ A &= (\|A\| + \varepsilon)(U_1 + U_2 + U_3). \end{aligned}$$

□

Vi vil nu vise et eksempel på et element i en C^*-algebra, der ikke opfylder kravene i 7.1, og som ikke kan skrives som en konveks kombination af unitære elementer.

EKSEMPEL 7.3. Lad $\mathcal{A}$ være C^*-algebraen $C(\overline{\mathbb{D}})$, hvor $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.
Da kan elementet $f \in \mathcal{A}$ givet ved $f(z) = z$ ikke skrives som en konveks kombination af unitære elementer fra $\mathcal{A}$.

BEVIS. Antag til modstrid, at der findes $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1]$ med $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ så $f = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$, hvor $u_1, \ldots, u_n$ er unitære elementer i $C(\overline{\mathbb{D}})$.

Lad $\mathcal{B}$ være C^*-algebraen $C(\mathbb{T})$ og $\varphi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ være restriktionsafbildningen. Det ses, at $\varphi(f)$ er unitær, idet

$$f(z)\overline{f(z)} = \overline{f(z)}f(z) = \overline{z}z = |z|^2 = 1$$

for alle $z \in \mathbb{T}$.

Ligeledes er elementet $v \in C(\mathbb{T})$ givet ved $v(z) = z$ for $z \in \mathbb{T}$ unitært og $\varphi(f) = v$. Men pr. antagelse er

$$\varphi(f) = \varphi(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n) = a_1\varphi(u_1) + a_2\varphi(u_2) + \cdots + a_n\varphi(a_n).$$

Da $\varphi(f)$ er unitær, er $\varphi(f)$ et ekstremalpunkt. Dvs. $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \cdots = \varphi(u_n) = \varphi(f)$. Altså er

$$\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \cdots = \varphi(u_n) = v.$$

Specielt er $u_1 : \overline{\mathbb{D}} \mapsto \mathbb{T}$ kontinuert, med $u_1(z) = v(z) = z$ for alle $z \in \mathbb{T}$.

Sæt $g = -u_1$. Så er $g : \overline{\mathbb{D}} \mapsto \mathbb{T} \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ kontinuert og Brouwers fixpunktsætning[16] giver, at der findes $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ så $g(z_0) = z_0$. Altså vil $z_0 \in \mathbb{T}$ idet

$$|z_0| = |g(z_0)| = |-u_1(z_0)| = |u_1(z_0)| = 1.$$

Heraf fås $z_0 = g(z_0) = -u_1(z_0) = -z_0$. Ligningen er kun opfyldt for $z_0 = 0$, hvilket er en modstrid da $0 \notin \mathbb{T}$. Så der findes ikke noget unitært element $u \in C(\overline{\mathbb{D}})$ så $\varphi(u) = v$.

Vi har hermed vist, at f ikke kan skrives som en konveks kombination af unitære elementer. □

Det er klart, at resultatet fra 7.1 ikke kan benyttes da $\|f\|_\infty = 1$.
Derimod kan sætningen bruges til at vise følgende resultat.

Eksempel 7.4. Lad $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ være C^*-algebraer og $\varphi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ en lineær afbildning.
Da er

$$\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(U)\| : U \in \mathcal{U}(\mathcal{A})\}.$$

Bevis. Hvis $U \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ er $\|U\|^2 = \|U^*U\| = \|I_{\mathcal{A}}\| = 1$. Dvs.

$$\begin{aligned}\|\varphi\| &= \sup\{\|\varphi(A)\| : A \in \mathcal{A}, \|A\| \leq 1\} \\ &\geq \sup\{\|\varphi(U)\| : U \in \mathcal{U}(\mathcal{A})\}.\end{aligned}$$

Når den modsatte ulighed skal vises, er det nok at betragte $A \in \mathcal{A}$, med $\|A\| < 1$. Der findes unitære elementer $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{A}$ med $n \geq 3$ så $A = n^{-1}(U_1 + \cdots + U_n)$.

$$\begin{aligned}\|\varphi(A)\| &= \|\varphi(n^{-1}(U_1 + \cdots + U_n))\| \\ &= n^{-1}\|\varphi(U_1) + \cdots + \varphi(U_n)\| \\ &\leq n^{-1}(\|\varphi(U_1)\| + \cdots + \|\varphi(U_n)\|) \\ &\leq n^{-1} n \max_{1\leq i\leq n}(\|\varphi(U_i)\|) \\ &= \max_{1\leq i\leq n}(\|\varphi(U_i)\|)\end{aligned}$$

Da $A \in \mathcal{A}$ er valgt vilkårligt med $\|A\| < 1$ fås

$$\begin{aligned}\|\varphi\| &= \sup\{\|\varphi(A)\| : A \in \mathcal{A}, \|A\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|\varphi(A)\| : A \in \mathcal{A}, \|A\| < 1\} \\ &\leq \sup\{\|\varphi(U)\| : U \in \mathcal{U}(\mathcal{A})\}.\end{aligned}$$

Hermed er $\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(U)\| : U \in \mathcal{U}(\mathcal{A})\}$. □

[16][**Arm83**, Thm. 8.14]

Litteratur

[Arm83] Mark A. Armstrong, *Basic topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1983.

[Han95] Vagn L. Hansen, *Grundbegreber i den moderne analyse*, 4 ed., Matematisk Institut, Danmarks Tekniske Universitet, 1995.

[Kad51] Richard V. Kadison, *Isometries of operator algebras*, The Annals Of Mathematics **54** (1951), no. 2, 325–338.

[KP85] Richard V. Kadison and Gert K. Pedersen, *Means and convex combinations of unitary operators*, Mathematica Scandinavica **57** (1985), 249–266.

[KR97] Richard V. Kadison and John R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras*, vol. 1, Oxford University Press, 1997.

[not] *Supplerende noter til punktmængdetopologi.*

[Ped95] Gert K. Pedersen, *Analysis now*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1995.

[Rud73] Walter Rudin, *Functional analysis*, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1973.

[Rud87] ———, *Real and complex analysis*, Mathematics Series, McGraw-Hill Book Company, 1987.

[Ste00] Henrik Stetkær, *Notes for analysis ii*, 2000.

[Zhu93] Kehe Zhu, *An introduction to operator algebras*, Studies In Advanced Mathematics, CRC Press, 1993.