BACHELOR

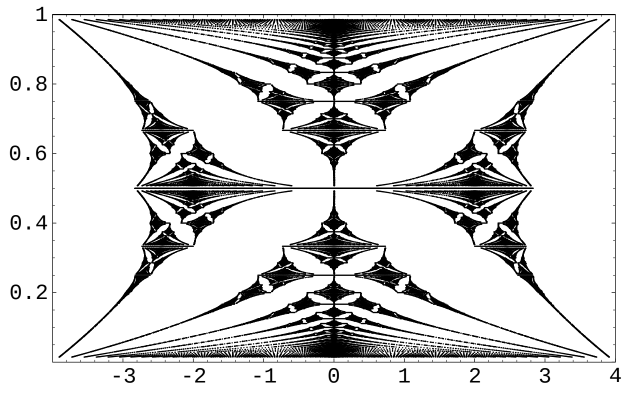
Irrationale og rationale rotations C^*-algebraer

Adam Sierakowski
IMADA
Syddansk Universistet
Odense, Danmark

Troels Steenstrup Jensen
IMADA
Syddansk Universistet
Odense, Danmark

Resumé

Projektet omhandler konstruktionen af rotations C^*-algebraen, generelle egenskaber for denne, samt specifikke egenskaber i det irrationale henholdsvis det rationale tilfælde. Heriblandt behandles især spor og projektioner i den generelle rotations C^*-algebra, hvor det vises hvornår der findes ikke-trivielle projektioner. I det irrationale tilfælde vises, at rotations C^*-algebraen er simpel, har entydigt spor og er essentielt unik. I det rationale tilfælde vises egenskaber relateret til irreducible unitale repræsentationer med vægt på identifikation af spektret for elementer i rotations C^*-algebraen. I forlængelse af dette introduceres Harper operatoren, som finder anvendelse inden for beskrivelsen af elektroner i faste stoffer påvirket af et ydre magnetfelt. Slutteligt bestemmes Harper operatorens spektrum, dels analytisk for en bestemt rational rotations C^*-algebra, dels numerisk for en række rationale rotations C^*-algebraer, hvormed Hofstadters sommerfugl fremkommer - se nedenstående figur.



Vejleder: Mikael Rørdam

Afleveret 5. januar 2004

Revideret 7. maj 2004

Indhold

1 Forord

Dette Bachelorprojekt er udarbejdet under vejledning af Mikael Rørdam i efteråret 2003. Projektet omhandler rotations C^*-algebraer.

Projektet er primært baseret på noter udleveret af vores vejleder Mikael Rørdam. Disse dækker afsnit 2 til afsnit 7. Afsnit 8 er baseret på forelæsninger givet af samme, mens noget af materialet præsenteret i afsnit 9 er inspireret af [1] og [3]. Appendix A er forfattet af Mikael Rørdam, og Appendix B er kildekoden til konstruktionen af nogle af figurene, heriblandt Hofstadters sommerfugl. Kildekoden er konstrueret ved hjælp af Mathematica.

Læseren antages bekendt med den grundlæggende teori for C^*-algebraer. Derudover kræves der et vist kendskab til analyse samt mål- og integralteori.

Henvisninger internt i dokumentet refererer nummeret på den pågældende sætning eller definition, og de indikeres med ( ). Henvisninger til litteraturlisten indikeres med [ ].

Vi håber projektet vil være til inspiration for læseren. God fornøjelse.

Adam Sierakowski   Troels Steenstrup Jensen

2 Rotations *-algebraen $\mathcal{A}_\theta^0$

I dette afsnit konstrueres rotations *-algebraen, hvilket gøres ud fra den universelle *-albegra. Derudover vises nogle simple relationer, og der gives en karakteristik af elementerne i rotations *-algebraen.

Givet $\theta \in [0,1)$ lader vi $\mathcal{A}_\theta^0$ være *-algebraen over $\mathbb{C}$ frembragt af generatorerne U og V under relationerne

$$U^*U = \mathbf{1} = UU^*, \quad V^*V = \mathbf{1} = VV^*,$$

$$UV = \rho VU, \quad \text{hvor } \rho = e^{2\pi i\theta},$$

hvor $\mathbf{1}$ her (og i det følgende) betegner identititselementet. Altså er $\mathcal{A}_\theta^0$ kvotienten mellem den universelle *-algebra over U, V, og idealet frembragt af de givne relationer.

Man kan nu vise relationerne

$$U^*V^* = \rho V^*U^*, \quad U^*V = \bar{\rho}VU^*, \quad UV^* = \bar{\rho}V^*U,$$

hvor $\bar{\rho} = e^{-2\pi i\theta}$ betegner den kompleks konjugerede af ρ. Den midterste af relationerne verificeres ved udregningen

$$U^*V = \bar{\rho}U^*(\rho VU)U^* = \bar{\rho}U^*(UV)U^* = \bar{\rho}VU^*,$$

de andre to vises analogt.

Følgende notation indføres

$$U^{-n} = (U^*)^n = (U^n)^*, \quad V^{-n} = (V^*)^n = (V^n)^*, \quad n \in \mathbb{N},$$

hvor det sidste lighedstegn i hvert udtryk følger fra kravene til en involution. Med denne notation gælder at

$$U^nV^m = \rho^{nm}V^mU^n, \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

hvilket fås ved simpel anvendelse af ovenstående relationer. Vi kan nu anvende dette resultat til at vise at ethvert element i $\mathcal{A}_\theta^0$ kan skrives som

$$\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m}U^nV^m, \quad c_{n,m} \in \mathbb{C},$$

hvor $c_{n,m} \neq 0$ for kun endelig mange $n, m \in \mathbb{Z}$, hvilket indikeres med $\sum^{\text{endelig}}$. Begrundelsen ses i det følgende.

Et $ord\{U, U^*, V, V^*\}$ defineres som en endelig streng af de pågældende elementer. Efter et passende (endeligt) antal omrokeringer af elementerne, med dertil opsamling af ρ henholdsvis $\bar{\rho}$ eller anihilering af UU^* og lignende, ses at ethvert $ord\{U, U^*, V, V^*\}$ altid kan skrives som

$$cU^nV^m, \quad c \in \mathbb{C}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Et element i *-algebraen frembragt af U og V er en kompleks linearkombination af $ord\{U, U^*, V, V^*\}$, hvilket netop kan skrives på den angivne form, da en linearkombination er endelig.

Opskrivning af et element i $\mathcal{A}_\theta^0$ som $\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m}U^nV^m$ er entydig, hvilket vil blive vist i et eksempel i næste afsnit. Derfor kan vi til ethvert element $T \in \mathcal{A}_\theta^0$ tilknytte en entydig (endelig) Laurentrække i U, V.

Det følger, at $\mathcal{A}_\theta^0$ pr. konstruktion er en unital *-algebra indeholdende mindst to unitære elementer, nemlig U og V, som opfylder $UV = \rho VU$. Vi kalder $\mathcal{A}_\theta^0$ for rotations *-algebraen. I det følgende afsnit fuldstændiggøres denne, hvorved rotations C^*-algebraen $\mathcal{A}_\theta$ fremkommer. I de følgende afsnit vil U, V, U^*, V^*, θ og ρ udelukkende have den i dette afsnit tillagte betydning.

3 Rotations C^*-algebraen $\mathcal{A}_\theta$

I dette afsnit konstrueres rotations C^*-algebraen, ved at fuldstændiggøre rotations *-algebraen, når denne først er udstyret med en C^*-norm. En stor del af afsnittet er tilegnet et eksempel, hvori mange vigtige egenskaber vises (ikke udelukkende relateret til rotations *-algebraen).

En repræsentation af $\mathcal{A}_\theta^0$ på et Hilbertrum $\mathscr{H}$, er en *-homomorfi fra $\mathcal{A}_\theta^0$ ind i $\mathcal{B}(\mathscr{H})$, hvor $\mathcal{B}(\mathscr{H}) = \mathcal{B}(\mathscr{H}, \mathscr{H})$ er mængden af begrænsede lineære afbildninger fra $\mathscr{H}$ ind i $\mathscr{H}$. Givet et Hilbertrum $\mathscr{H}$ samt unitære operatorer $U_0, V_0 \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ opfyldende den fundamentale relation $U_0V_0 = \rho V_0 U_0$ ($\rho = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in [0,1)$) defineres *-homomorfien $\pi : \mathcal{A}_\theta^0 \to \mathcal{B}(\mathscr{H})$ ved

$$\pi(U) = U_0, \quad \pi(V) = V_0,$$

hvor kravene til en *-homomorfi

(i) $\pi(aT + S) = a\pi(T) + \pi(S), \quad T, S \in \mathcal{A}_\theta^0, \quad a \in \mathbb{C}$

(ii) $\pi(TS) = \pi(T)\pi(S), \quad T, S \in \mathcal{A}_\theta^0$

(iii) $\pi(T^*) = (\pi(T))^*, \quad T \in \mathcal{A}_\theta^0,$

sammen med det faktum at ethvert element $T \in \mathcal{A}_\theta^0$ er entydigt givet ved en (endelig) Laurentrække i U, V, tilsammen fastlægger $\pi(T)$. Dermed er π en repræsentation af $\mathcal{A}_\theta^0$ på $\mathscr{H}$, og udregningen

$$\pi(\mathbf{1}) = \pi(U^*U) = \pi(U)^*\pi(U) = \mathbf{1}$$

viser at π er en unital repræsentation.

Hvis omvendt en unital repræsentation π af $\mathcal{A}_\theta^0$ på et Hilbertrum $\mathscr{H}$ er givet, ses det nemt at $\pi(U)$ og $\pi(V)$ er unitære elementer i $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ opfyldende $\pi(U)\pi(V) = \rho\pi(V)\pi(U)$.

Eksempel Eksistensen af et Hilbertrum $\mathscr{H}$ og unitære operatorer U_0 og V_0 på $\mathscr{H}$ opfyldende $U_0V_0 = \rho V_0 U_0$ for $\rho \in \mathbb{T}$ ses i det følgende.

Lad Hilbertrummet $\mathscr{H} = L_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{B}(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{B}(\mathbb{T}), \mu \otimes \mu)$, hvor $\mu = \frac{1}{2\pi}\kappa(m)$ er Haar målet defineret ud fra Lebesguemålet m og den målelige afbildning $\kappa : [0, 2\pi) \to \mathbb{T}$ givet ved $\kappa(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$. Husk

$$\mu(E) = \frac{1}{2\pi}\kappa(m)(E) = \frac{1}{2\pi}m(\kappa^{-1}(E))$$

for $E \in \mathbb{B}(\mathbb{T})$ og dermed specielt at $\mu(\mathbb{T}) = 1$, hvorfor $\int_{\mathbb{T}} d\mu = 1$.

Det er nyttigt at skrive integralet af $f \in L_2(\mathbb{T}, \mathbb{B}(\mathbb{T}), \mu)$ som

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} f(z)d\mu(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\kappa^{-1}(\mathbb{T})}(f\circ\kappa)(t)dm(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi)} f(e^{it})(t)dm(t)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})dt = \int_0^1 f(e^{2\pi it})dt.\end{aligned}$$

Det bemærkes specielt at

$$\int_{\mathbb{T}} z^n d\mu(z) = \int_0^1 e^{2\pi int}dt = \delta_n,[1]$$

for $n \in \mathbb{Z}$, hvilket vil blive brugt adskillige gange i det følgende.

Lad $\rho \in \mathbb{T}$ være givet og $\Phi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ være afbildningen $\Phi(z) = \rho z$. Da gælder at $\Phi(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$, samt at Haar målet er invariant over for rotationen Φ, da

$$\Phi(\mu)(E) = \mu(\Phi^{-1}(E)) = \frac{1}{2\pi}m(\kappa^{-1}(\Phi^{-1}(E))) = \frac{1}{2\pi}m(\kappa^{-1}(E)) = \mu(E),$$

for $E \in \mathbb{B}(\mathbb{T})$, idet Lesbesgue-målet er translationsinvariant. Det ses nu at

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)d\mu(z) = \int_{\Phi(\mathbb{T})}(f\circ\Phi^{-1})(z)d\Phi(\mu)(z) = \int_{\mathbb{T}} f(\bar{\rho}z)d\mu(z),$$

for vilkårlig $f \in L_2(\mathbb{T}, \mathbb{B}(\mathbb{T}), \mu)$. Eftersom $(\mathbb{T}, \mathbb{B}(\mathbb{T}), \mu)$ er σ-endeligt, følger det ved benyttelse af Fubinis (eller Tonellis) sætning, at vi kan opsplitte integralet over $\mathbb{T}^2$ med hensyn til $\mu \otimes \mu$, og dermed vise dettes normalisering. I de efterfølgende afsnit vil Fubinis sætning løbende benyttes, uden det dog eksplicit vil blive kommenteret.

Vi har nu de nødvendige værktøjer til at finde U_0, V_0 som ønsket. Lad $f \in \mathscr{H}$ være vilkårlig, og definér

$$(U_0 f)(z_1, z_2) = z_1 f(z_1, z_2), \quad (V_0 f)(z_1, z_2) = z_2 f(\bar{\rho}z_1, z_2),$$

for $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$. Det er oplagt at $U_0 f, V_0 f$ er målelige afbildninger, men for at vise $U_0, V_0 \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ skal der desuden gøres rede for, at integralet af $|U_0 f|^2$ og $|V_0 f|^2$ er endeligt, samt at U_0, V_0 er lineære og begrænsede. Ved anvendelse af de allerede nævnte resultater vedrørende integralet over $\mathbb{T}$ med hensyn til μ fås

$$\begin{aligned}\|U_0 f\|^2 &= \int_{\mathbb{T}^2} |z_1 f(z_1, z_2)\overline{z_1}\overline{f(z_1, z_2)}| d(\mu\otimes\mu)(z_1, z_2) = \|f\|_2^2\\ \|V_0 f\|^2 &= \int_{\mathbb{T}^2} |z_2 f(\bar{\rho}z_1, z_2)\overline{z_2}\overline{f(\bar{\rho}z_1, z_2)}| d(\mu\otimes\mu)(z_1, z_2) = \|f\|_2^2,\end{aligned}$$

[1]Symbolet δ_n er Kroeneckers delta.

hvilket sammen med lineariteten af U_0 og V_0

$$\begin{aligned}(U_0(af+g))(z_1,z_2) &= z_1(af+g)(z_1,z_2) = a(U_0f)(z_1,z_2)+(U_0g)(z_1,z_2)\\ (V_0(af+g))(z_1,z_2) &= z_2(af+g)(\bar\rho z_1,z_2) = a(V_0f)(z_1,z_2)+(V_0g)(z_1,z_2),\end{aligned}$$

for $f,g\in\mathscr{H}$ og $a\in\mathbb{C}$, viser at $U_0,V_0\in\mathcal{B}(\mathscr{H})$. Sæt

$$(Tf)(z_1,z_2)=\overline{z_1}f(z_1,z_2),\quad (Sf)(z_1,z_2)=\overline{z_2}f(\rho z_1,z_2),$$

for $z_1,z_2\in\mathbb{T}$ og $f\in\mathscr{H}$. Ligesom for U_0 og V_0 ses det at $T,S\in\mathcal{B}(\mathscr{H})$. Nu følger at

$$\begin{aligned}\langle U_0f,g\rangle &= \int_{\mathbb{T}^2} z_1f(z_1,z_2)\overline{g(z_1,z_2)}d(\mu\otimes\mu)(z_1,z_2)\\ &= \int_{\mathbb{T}^2} f(z_1,z_2)\overline{\overline{z_1}g(z_1,z_2)}d(\mu\otimes\mu)(z_1,z_2)=\langle f,Tg\rangle\\ \langle V_0f,g\rangle &= \int_{\mathbb{T}^2} z_2f(\bar\rho z_1,z_2)\overline{g(z_1,z_2)}d(\mu\otimes\mu)(z_1,z_2)\\ &= \int_{\mathbb{T}^2} f(z_1,z_2)\overline{\overline{z_2}g(\rho z_1,z_2)}d(\mu\otimes\mu)(z_1,z_2)=\langle f,Sg\rangle,\end{aligned}$$

for $z_1,z_2\in\mathbb{T}$ og $f,g\in\mathscr{H}$, hvilket viser $T=U_0^*$ og $S=V_0^*$. Vi har derfor relationerne

$$(U_0U_0^*f)(z_1,z_2)=z_1\overline{z_1}f(z_1,z_2)=(U_0^*U_0f)(z_1,z_2)$$

$$(V_0V_0^*f)(z_1,z_2)=z_2\overline{z_2}f(\bar\rho\rho z_1,z_2)=(V_0^*V_0f)(z_1,z_2)$$

$$\begin{aligned}(U_0V_0f)(z_1,z_2) &= z_1(V_0f)(z_1,z_2)=z_1z_2f(\bar\rho z_1,z_2)\\ &= \rho z_2\bar\rho z_1f(\bar\rho z_1,z_2)=\rho z_2(U_0f)(\bar\rho z_1,z_2)=(\rho V_0U_0f)(z_1,z_2),\end{aligned}$$

for $z_1,z_2\in\mathbb{T}$ og $f\in\mathscr{H}$, hvilket viser at U_0 og V_0 er unitære operatorer i $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ opfyldende $U_0V_0=\rho V_0U_0$, hvormed den ønskede eksistens er begrundet.

Vi kan bruge dette eksempel til at vise eksistensen af en injektiv repræsentation π af $\mathcal{A}_\theta^0$ på $\mathscr{H}$ (også refereret til som en tro repræsentation). For at gøre dette lader vi π være den unitale repræsentation givet ved $\pi(U)=U_0$, $\pi(V)=V_0$ (som beskrevet i begyndelsen af afsnittet) og sætter $f_0(z_1,z_2)=1$ for $z_1,z_2\in\mathbb{T}$. Det er klart at $f_0\in\mathscr{H}$ samt at $\|f_0\|_2=1$. Det er oplagt at

$$(U_0f_0)(z_1,z_2)=z_1,\quad (V_0f_0)(z_1,z_2)=z_2.$$

Vi definerer nu $\tau:\mathcal{A}_\theta^0\to\mathbb{C}$ ved

$$\tau(T)=\langle\pi(T)f_0,f_0\rangle.$$

Eftersom ethvert element i $\mathcal{A}_\theta^0$ er givet ved en endelige Laurentrække i U, V, er det nok at undersøge τ på $\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m} U^n V^m$, hvor $c_{n,m} \in \mathbb{C}$. I dette tilfælde fås

$$\tau\left(\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m} U^n V^m\right) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m}\langle z_1^n z_2^m, \mathbf{1}\rangle = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m}\delta_n\delta_m = c_{0,0},$$

hvor det er underforstået at $z_1^n z_2^m$ står for afbildningen $(z_1, z_2) \to z_1^n z_2^m$, mens $\mathbf{1}$ står for afbildningen $(z_1, z_2) \to 1$. Dermed kan koefficienterne til Laurentrækken, hørende til et element $T \in \mathcal{A}_\theta^0$, findes som

$$c_{n,m} = \tau(TV^{-m}U^{-n}),$$

hvilket viser den i afsnit 2 postulerede entydighed af Laurentrækken hørende til et element i $\mathcal{A}_\theta^0$.

Det ses nu, at hvis $\pi(T) = \pi(S)$ for $T, S \in \mathcal{A}_\theta^0$, da vil koefficienterne $a_{n,m}$ og $b_{n,m}$, hørende til henholdsvis T og S, opfylde

$$a_{n,m} - b_{n,m} = \tau(TV^{-m}U^{-n}) - \tau(SV^{-m}U^{-n}) = \langle \pi(T) - \pi(S) f_0, f_0\rangle = 0,$$

hvorfor $T = S$. Dette viser at π er tro.

Bemærkning Ovenstående eksempel viser (som lovet i forrige afsnit) entydigheden af Laurentrækken hørende til et element i $\mathcal{A}_\theta^0$. Derudover viser det eksistensen af en tro unital repræsentation af $\mathcal{A}_\theta^0$, hvilket senere benyttes.

Definition 3.1 *For $T \in \mathcal{A}_\theta^0$ definerer vi*

$$\|T\| = \sup\{\|\pi(T)\|_{\mathcal{B}(\mathscr{H})} : \pi \text{ er en unital repræsentation af } \mathcal{A}_\theta^0 \text{ på } \mathscr{H}\},$$

hvor $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathscr{H})}$ er den velkendte C^*-norm på $\mathcal{B}(\mathscr{H})$. Mængden af unitale repræsentationer af $\mathcal{A}_\theta^0$ på $\mathscr{H}$ vil efterfølgende blive refereret til som $\mathfrak{F}_\theta$.

Lemma 3.2 *Normen $\|\cdot\|$ defineret i (3.1) er en C^*-norm på $\mathcal{A}_\theta^0$.*

Bevis: Det skal vises at følgende er opfyldt

(i) $\|T\| \geq 0$

(ii) $\|aT\| = |a|\|T\|$

(iii) $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$

(iv) $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$

(v) $\|T^*T\| = \|T\|^2$

(vi) $\|T\| = 0 \Rightarrow T = \mathbf{0}$

(vii) $\|\mathbf{1}\| = 1$

$(viii)$ $\|T\| < +\infty$,

for alle $T, S \in \mathcal{A}_\theta^0$ og $a \in \mathbb{C}$.

Ifølge vores eksempel, findes en unital repræsentation af $\mathcal{A}_\theta^0$, hvilket viser at $\mathfrak{F}_\theta \neq \emptyset$. Lad derfor $\pi \in \mathfrak{F}_\theta$ være en vilkårlig unital repræsentation af $\mathcal{A}_\theta^0$ på et Hilbertrum $\mathscr{H}$. Eftersom $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathscr{H})}$ er en C^*-norm, er (i)-(v) samt (vii) og $(viii)$ oplagt opfyldt for afbildningen defineret på $\mathcal{A}_\theta^0$ ved $T \to \|\pi(T)\|_{\mathcal{B}(\mathscr{H})}$, da π er en unital *-homomorfi. Dette gør afbildningen $T \to \|\pi(T)\|_{\mathcal{B}(\mathscr{H})}$ til en C^*-seminorm.

Supremum af C^*-seminormer (en supseminorm) er igen en C^*-seminorm, eksempelvis ses gyldigheden af (iii) for supseminormen ved

$$\begin{aligned}
\|T+S\| &= \sup\{\|\pi(T+S)\|_{\mathcal{B}(\mathscr{H})} : \pi \in \mathfrak{F}_\theta\} \\
&= \sup\{\|\pi(T)+\pi(S)\|_{\mathcal{B}(\mathscr{H})} : \pi \in \mathfrak{F}_\theta\} \\
&\leq \sup\{\|\pi(T)\|_{\mathcal{B}(\mathscr{H})} + \|\pi(S)\|_{\mathcal{B}(\mathscr{H})} : \pi \in \mathfrak{F}_\theta\} \\
&\leq \sup\{\|\pi(T)\|_{\mathcal{B}(\mathscr{H})} : \pi \in \mathfrak{F}_\theta\} + \sup\{\|\pi(S)\|_{\mathcal{B}(\mathscr{H})} : \pi \in \mathfrak{F}_\theta\} \\
&= \|T\| + \|S\|.
\end{aligned}$$

På helt tilsvarende måde følger (ii) for supseminormen af

$$\sup\{ax_i : i \in \mathfrak{I}\} = a\sup\{x_i : i \in \mathfrak{I}\}, \quad a, x_i \in \mathbb{R}^+, \quad i \in \mathfrak{I},$$

(iv) af

$$\sup\{x_i y_i : i \in \mathfrak{I}\} \leq \sup\{x_i : i \in \mathfrak{I}\}\sup\{y_i : i \in \mathfrak{I}\}, \quad x_i, y_i \in \mathbb{R}^+, \quad i \in \mathfrak{I}$$

og (v) af

$$\sup\{x_i^2 : i \in \mathfrak{I}\} = \sup\{x_i : i \in \mathfrak{I}\}^2, \quad x_i \in \mathbb{R}^+, \quad i \in \mathfrak{I},$$

for en indexmængde $\mathfrak{I}$, mens (i) og (vii) er oplagte.

For at vise $(viii)$, benyttes Laurentrækken hørende til et vilkårligt element $T \in \mathcal{A}_\theta^0$

$$\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m} U^n V^m, \quad c_{n,m} \in \mathbb{C}.$$

For en vilkårlig repræsentation $\pi \in \mathfrak{F}_\theta$ er

$$\pi(T) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m} U_0^n V_0^m,$$

hvor $U_0 = \pi(U)$ og $V_0 = \pi(V)$. Men U_0, V_0 er begge unitære elementer i $\mathcal{B}(\mathscr{H})$, så

$$\|\pi(T)\|_{\mathcal{B}(\mathscr{H})} \leq \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} |c_{n,m}|,$$

hvoraf det ses at $\|T\| \leq \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} |c_{n,m}| < +\infty$.

Vi mangler nu blot at vise at denne C^*-seminorm opfylder (vi) og dermed er en C^*-norm. Lad T tilhøre $\mathcal{A}_\theta^0$ og antag at $\|T\| = 0$. Tidligere er eksistensen af en tro unital repræsetation af $\mathcal{A}_\theta^0$ bevist (endda konstruktivt), så lad π_t betegne denne. Ifølge definitionen af $\|T\|$ vil der specielt gælde at $\|\pi_t(T)\|_{\mathcal{B}(\mathscr{H})} = 0$, hvilket medfører at $\pi_t(T) = \mathbf{0}$, og dermed at $T = \mathbf{0}$, eftersom denne repræsentation netop er tro. Dette viser (vi) og afslutter dermed beviset. □

Nu har vi udstyret $\mathcal{A}_\theta^0$ med en C^*-norm, hvis umiddelbare formål er at fuldstændiggøre $\mathcal{A}_\theta^0$. Dette gøres ved at benytte standardresultatet omhandlende indlejring af metriske rum i fuldstændige metriske rum jf. [6, 7.1.6]. Hvis således $\mathcal{A}_\theta^0$ tænkes indlejret i det fuldstændige metriske rum $\mathscr{X}$, lader vi $\mathcal{A}_\theta$ betegne afslutningen af $\mathcal{A}_\theta^0$ i $\mathscr{X}$. Det kan nu vises at $\mathcal{A}_\theta$ er en unital *-algebra (enheden i $\mathcal{A}_\theta^0$ udvider til en enhed i $\mathcal{A}_\theta$) samt at C^*-normen på $\mathcal{A}_\theta^0$ udvider til en C^*-norm på $\mathcal{A}_\theta$. Dermed bliver $\mathcal{A}_\theta$ til en unital C^*-algebra, og denne kaldes rotations C^*-algebraen. Det er ud fra konstruktionen klart at $\overline{\mathcal{A}_\theta^0} = \mathcal{A}_\theta$, hvilket ofte vil blive brugt i det følgende.

Theorem 3.3 (Den universelle egenskab) *Lad $\mathcal{M}$ være en unital C^*-algebra og lad $U_0, V_0 \in \mathcal{M}$ være unitære elementer opfyldende $U_0V_0 = \rho V_0U_0$, hvor $\rho = e^{2\pi i\theta}$ og $\theta \in [0,1)$. Da findes en entydig *-homomorfi*

$$\varphi : \mathcal{A}_\theta \to \mathcal{M},$$

så $\varphi(U) = U_0$ og $\varphi(V) = V_0$, hvor U, V er generatorerne for $\mathcal{A}_\theta$. Denne *-homomorfi er unital og afbilleder surjektivt ind i $C^*(U_0, V_0)$, som er den mindste del-C^*-algebra af $\mathcal{M}$ indeholdende U_0 og V_0.[2]

Bevis: Ifølge GNS (Gelfand, Neumark og Segal) konstruktionen [4, 4.5.6] findes et Hilbertrum $\mathscr{H}$ og en unital *-isomorfi fra $\mathcal{M}$ ind i $\mathcal{B}(\mathscr{H})$. Det ses let, at billedet af U_0 og V_0 er unitære elementer i $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ opfyldende den fundamentale komuteringsrelation. Den inverse til en *-isomorfi (defineret på dennes billede) er igen en *-isomorfi, så vi kan antage at $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathscr{H})$. (Sammensætningen af

[2] Eksistensen af en mindste del-C^*-algebra indeholdende bestemte elementer, kan vises ved at tage fællesmængden af alle del-C^*-algebraer indeholdende disse elementer, og indse at denne fællesmængde er en del-C^*-algebra.

*-homomorfier er en *-homomorfi, så sidst i beviset kan vi bevæge os fra $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ tilbage til $\mathcal{M}$.)

Vi konstruerer nu en repræsentation π af $\mathcal{A}_\theta^0$ på $\mathscr{H}$ opfyldende

$$\pi(U) = U_0, \quad \pi(V) = V_0$$

på samme måde som i de indledende kommentarer til dette afsnit. Dermed vil $\pi \in \mathfrak{F}_\theta$. Fra definitionen af normen på $\mathcal{A}_\theta^0$ følger det at $\|\pi(T)\|_{\mathcal{B}(\mathscr{H})} \leq \|T\|$ for et vilkårligt $T \in \mathcal{A}_\theta^0$, hvorfor π er begrænset. Da π således er en begrænset lineær og unital afbildning defineret på et tæt underrum af $\mathcal{A}_\theta$, følger det af et velkendt resultat [2, Lemma C], at π udvider entydigt ved kontinuitet til en begrænset lineær og unital afbildning φ defineret på hele $\mathcal{A}_\theta$. Udvidelsen opfylder $\varphi(U) = U_0$ og $\varphi(V) = V_0$, og er desuden en *-homomorfi, hvilket nu begrundes. Vælg vilkårligt T, S i $\mathcal{A}_\theta$ og benyt $\overline{\mathcal{A}_\theta^0} = \mathcal{A}_\theta$, til at finde følger $(T_n)_{n=1}^\infty$ og $(S_n)_{n=1}^\infty$ fra $\mathcal{A}_\theta^0$, så

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Kontinuiteten af φ giver nu (da φ udvidder π)

$$\varphi(T) = \lim_{n\to\infty} \varphi(T_n) = \lim_{n\to\infty} \pi(T_n).$$

Vurderingen

$$\|TS - T_nS_n\| \leq \|TS - TS_n\| + \|TS_n - T_nS_n\| \leq \|T\| \cdot \|S - S_n\| + \|T - T_n\| \cdot \|S_n\|$$

viser at $\lim_{n\to\infty} T_nS_n = TS$, hvoraf multiplikativiteten af φ ses af

$$\varphi(TS) = \lim_{n\to\infty} \pi(T_nS_n) = \lim_{n\to\infty} \pi(T_n) \lim_{n\to\infty} \pi(S_n) = \varphi(T)\varphi(S).$$

Den manglende *-egenskab vises tilsvarende, hvor man kan benytte

$$\|T^* - T_n^*\| = \|(T - T_n)^*\| = \|T - T_n\|,$$

for $T \in \mathcal{A}_\theta$ og $T_n \in \mathcal{A}_\theta^0$, hvilket overlades til læseren.

Billedet af $\mathcal{A}_\theta^0$ ved φ er oplagt indeholdt i $\mathcal{C}^*(U_0, V_0)$, eftersom ethvert element i $\mathcal{A}_\theta^0$ er en endelig Laurentrække i U, V og $\pi(U) = U_0$, $\pi(V) = V_0$. Et element i $\mathcal{A}_\theta$ kan skrives som en grænseværdi af elementer i $\mathcal{A}_\theta^0$, så da φ er en *-homomorfi (og dermed kontinuert) og $\mathcal{C}^*(U_0, V_0)$ er fuldstændigt, følger det, at billedet af $\mathcal{A}_\theta$ ved φ er indeholdt i $\mathcal{C}^*(U_0, V_0)$. Men ifølge [4, 4.1.9] er billedet af *-homomorfien φ en C^*-algebra (indeholdende U_0, V_0), hvorfor φ afbilleder surjektivt ind i $\mathcal{C}^*(U_0, V_0)$. $\square$

Bemærk at (3.3) er helt afgørende for definitionen af normen på $\mathcal{A}_\theta^0$. Ved i definitionen kun at bruge en enkelt tro repræsentation, ville man stadig få en C^*-norm, men denne ville ikke give anledning til den universelle egenskab.

Det er interessant at se for hvilker værdier af θ, man altid kan indlejre $\mathcal{A}_\theta$ i C^*-algebraen $\mathcal{M}$ fra (3.3). For $\theta \in [0,1)$ irrational viser det sig, at dette er tilfældet jf. (7.4). I modsætning hertil, kan man for $\theta = \frac{p}{q} \in [0,1)$ rational og primisk finde modeksempler, hvilket ses i det følgende. Lad $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^q)$ og benyt (8.4) og (8.10)[3] til at finde unitære elementer $U_0', V_0' \in \mathcal{M}$ opfyldene

$$U_0'V_0' = \rho V_0'U_0', \quad (U_0')^q = \mathbf{1}, \quad \rho = e^{2\pi i\theta}.$$

Hvis relationen $U^q = \mathbf{1}$ holder for generatoren $U \in \mathcal{A}_\theta$, vil denne faktorisere igennem til alle C^*-algebraer indeholdende to unitære elementer opfylde den fundamentale kommuteringsrelation. Men det ses let, at dette ikke er tilfældet for C^*-algebraen fra det tidliggere eksempel ($((U_0f)(z_1,z_2) = z_1f(z_1,z_2)$ opfylder ikke $U_0^q = \mathbf{1}$). Det ses nu, at $\varphi' : \mathcal{A}_\theta \to \mathcal{M}$ fra (3.3) ikke er injektiv, idet $\varphi'(U^q - \mathbf{1}) = (U_0')^q - \mathbf{1} = \mathbf{0}$, men $U^q - \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$.

[3]Følgende resultat bør i princippet stå i afsnit 8, men for at give et samlet billede af den universelle egenskab, har vi valgt at placere det her.

4 En *-automorfi på $\mathcal{A}_\theta$

Dette er mest et værktøjsafsnit, hvor en meget nyttig unital *-automorfi introduceres, og diverse resultater angående denne vises.

Lad $u, v \in \mathbb{T}$ og sæt $U_0 = uU$, $V_0 = vV$, hvor U, V er frembringerne for $\mathcal{A}_\theta$. Dermed bliver U_0, V_0 unitære i $\mathcal{A}_\theta$ opfyldende $U_0 V_0 = \rho V_0 U_0$, hvor $\rho = e^{2\pi i\theta}$. Da $\mathcal{A}_\theta$ er en C^*-algebra følger det af (3.3), at der findes en entydig *-homomorfi

$$\alpha_{(u,v)} : \mathcal{A}_\theta \to \mathcal{C}^*(U_0, V_0) \subseteq \mathcal{A}_\theta,$$

opfyldende

$$\alpha_{(u,v)}(U) = U_0 = uU, \qquad \alpha_{(u,v)}(V) = V_0 = vV.$$

Lemma 4.1 *For $u, v \in \mathbb{T}$ er afbildningen $\alpha_{(u,v)}$ (defineret ovenfor) en unital *-automorfi på $\mathcal{A}_\theta$.*

Bevis: For $u', v' \in \mathbb{T}$ ses det at

$$(\alpha_{(u,v)} \circ \alpha_{(u',v')})(U) = uu'U = \alpha_{(uu',vv')}(U)$$

$$(\alpha_{(u,v)} \circ \alpha_{(u',v')})(V) = vv'V = \alpha_{(uu',vv')}(V).$$

Da en sammensætning af *-homomorfier igen er en *-homomorfi, følger det af entydigheden af $\alpha_{(u,v)}$, at

$$\alpha_{(u,v)} \circ \alpha_{(u',v')} = \alpha_{(uu',vv')}.$$

Eftersom $u, v \in \mathbb{T}$ fås nu at

$$\alpha_{(\bar{u},\bar{v})} \circ \alpha_{(u,v)} = \alpha_{(1,1)} = \mathbf{1},$$

hvor det sidste lighedstegn fås af entydigheden af $\alpha_{(1,1)}$. Dermed ses at

$$\alpha_{(\bar{u},\bar{v})} = \alpha_{(u,v)}^{-1},$$

hvorfor både $\alpha_{(u,v)}$ og $\alpha_{(u,v)}^{-1}$ er bijektive *-homomorfier fra en $\mathcal{A}_\theta$ ind i $\mathcal{A}_\theta$, hvilket samlet benævnes en *-automorfi på $\mathcal{A}_\theta$. Det følger af (3.3), at $\alpha_{(u,v)}$ er unital. $\square$

Fremover vil $\alpha_{(u,v)}$ for $u, v \in \mathbb{T}$ kun blive brugt i ovenstående betydning.

Bemærkning Eksistensen af *-automorfien $\alpha_{(u,v)}$ opfyldende $\alpha_{(u,v)}(U) = uU$ og $\alpha_{(u,v)}(V) = vV$, for $u, v \in \mathbb{T}$ giver

$$\sigma(U) = \mathbb{T}, \quad \sigma(V) = \mathbb{T}.$$

Begrundelsen for at $\sigma(U) = \mathbb{T}$ ses i det følgende, mens $\sigma(V) = \mathbb{T}$ vises tilsvarende. Inklusionen "$\subseteq$" følger af at U er unitær. Den anden inklusion følger dels af at $\sigma(U)$ ikke er tom, og dels af vurderingen

$$u\sigma(U) = \sigma(uU) = \sigma(\alpha_{(u,v)}(U)) \subseteq \sigma(U), \quad u \in \mathbb{T},$$

som fås idet $\alpha_{(u,v)}$ er en *-homomorfi.

Definition 4.2 *Til et unitært $W \in \mathcal{A}_\theta$ defineres afbildningen $\mathrm{ad}_W : \mathcal{A}_\theta \to \mathcal{A}_\theta$ ved*

$$\mathrm{ad}_W(T) = W^*TW, \quad T \in \mathcal{A}_\theta.$$

Denne afbildning kaldes indre.

Bemærk, at afbildningen ad_W er en *-automorfi på $\mathcal{A}_\theta$, da ad_W er invertibel med $\mathrm{ad}_W^{-1} = \mathrm{ad}_{W^*}$, mens *-homomorfi egenskaberne let vises.

Lemma 4.3 *For $u, v \in \{\rho^n : n \in \mathbb{Z}\}$ er $\alpha_{(u,v)}$ indre, hvor $\rho = e^{2\pi i\theta}$ og $\theta \in [0,1)$.*

Bevis: Antag $u = \rho^n, v = \rho^m$, hvor $n, m \in \mathbb{Z}$ og sæt $W = U^{-m}V^n$. Eftersom ad_W og $\alpha_{(u,v)}$ er *-homomorfier er det ifølge entydigheden i (3.3) nok at vise overensstemmelsen mellem $\alpha_{(u,v)}$ og ad_W på generatorerne U, V. Udregningen

$$\mathrm{ad}_W(U) = V^{-n}U^mUU^{-m}V^n = V^{-n}UV^n = \rho^nU = uU = \alpha_{(u,v)}(U)$$

$$\mathrm{ad}_W(V) = V^{-n}U^mVU^{-m}V^n = \rho^mV^{-n+1}V^n = \rho^mV = vV = \alpha_{(u,v)}(V)$$

giver det ønskede resultat. □

Lemma 4.4 *For ethvert $u, v \in \mathbb{T}$ og $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ gælder at*

$$\alpha_{(u,v)}(f(U)g(V)) = f(uU)g(vV),$$

hvor $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ betegner mængden af kontinuerte funktioner fra det kompakte Hausdorff rum $\mathbb{T}$ ind i $\mathbb{C}$.

Bevis: Da $\sigma(U) = \mathbb{T}$ er $f \in \mathcal{C}(\sigma(U))$. Det følger nu fra funktionskalkylen for normale operatorer [9, 10.3], at

$$\alpha_{(u,v)}(f(U)) = f(\alpha_{(u,v)}(U)),$$

idet $\alpha_{(u,v)}$ er en *-automorfi. Dermed fås fra definitionen af $\alpha_{(u,v)}$, at

$$\alpha_{(u,v)}(f(U)) = f(uU).$$

Tilsvarende ses at $\alpha_{(u,v)}(g(V)) = g(vV)$. Ved at benytte multiplikativiteten af $\alpha_{(u,v)}$ følger det ønskede. □

Lemma 4.5 *Lad T, S være elementer i $\mathcal{A}_\theta$ givet ved*

$$T = \sum_{n=-N}^{N} f_n(V)U^n, \quad S = \sum_{n=-N}^{N} g_n(V)U^n,$$

hvor $f_n, g_n \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Da gælder, at $T = S$ hvis og kun hvis $f_n(V) = g_n(V)$ for $n = -N, \ldots, N$.

Bevis: Bemærk først at T, S er veldefinerede ifølge funktionskalkylen for normale operatorer, idet $f_n, g_n \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ for $n = -N, \ldots, N$.

Hvis $f_n(V) = g_n(V)$ for $n = -N, \ldots, N$ er $S = T$. Lad omvendt $S = T$ og $m \in \{-N, \ldots, N\}$ være givet. Benyttes at

$$\alpha_{(u,1)}(TU^{-m}) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_{(u,1)}(f_n(V)U^{n-m}) = \sum_{n=-N}^{N} u^{n-m} f_n(V)U^{n-m},$$

følger det for ethvert $\chi \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_\theta, \mathbb{C})$ at

$$\int_{\mathbb{T}} \chi(\alpha_{(u,1)}(TU^{-m}))d\mu(u) = \sum_{n=-N}^{N} \chi(f_n(V)U^{n-m}) \int_{\mathbb{T}} u^{n-m} d\mu(u) = \chi(f_m(V)).$$

Men idet $T = S$ er højresiden også lig med $\chi(g_m(V))$, hvorfor

$$\chi(f_m(V)) = \chi(g_m(V)), \quad \chi \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_\theta, \mathbb{C}).$$

Det følger af et korollar til Hahn-Banachs sætning [8, 5.20], at $f_m(V) = g_m(V)$, hvilket giver det ønskede resultat. $\square$

Lemma 4.6 *For ethvert $T \in \mathcal{A}_\theta$ er afbildningen fra $\mathbb{T}^2$ ind i $\mathcal{A}_\theta$ givet ved*

$$(u, v) \to \alpha_{(u,v)}(T)$$

kontinuert.

Bevis: Givet $\epsilon > 0$ ses det for $T' \in \mathcal{A}_\theta$ at

$$\begin{aligned} &\|\alpha_{(u',v')}(T) - \alpha_{(u,v)}(T)\| \leq \\ &\|\alpha_{(u',v')}(T - T')\| + \|\alpha_{(u,v)}(T' - T)\| + \|\alpha_{(u',v')}(T') - \alpha_{(u,v)}(T')\|. \end{aligned}$$

Eftersom $\mathcal{A}_\theta^0$ er tæt i $\mathcal{A}_\theta$ og $T \to \alpha_{(u,v)}(T)$ er normformindskende, kan vi vælge $T' = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m} U^n V^m$, således at de første to led hver er mindre end $\frac{\epsilon}{3}$. Det sidste led kan vi ligeledes gøre mindre end $\frac{\epsilon}{3}$ (for $\|(u', v') - (u, v)\|_{\mathbb{T}^2} < \delta$, $\delta > 0$), da $\alpha_{(u,v)}(T') = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m} (uU)^n (vV)^m$ er en endelig Laurentrække i variablene u, v, og dermed kontinuert. $\square$

5 Et spor på $\mathcal{A}_\theta$

I dette afsnit benyttes integralet over kontinuerte funktioner fra $\mathbb{T}^2$ ind i $\mathcal{A}_\theta$ (introduceres i appendix A), til at konstruere et spor på $\mathcal{A}_\theta$. Derudover gives der forskellige resultater vedrørende dette spor, heriblandt en fuldstændig karakteristik af dets virkning på $\mathcal{A}_\theta^0$.

Definition 5.1 *Afbildningen* $\mathrm{E} : \mathcal{A}_\theta \to \mathcal{A}_\theta$ *defineres ved*

$$\mathrm{E}(T) = \int_{\mathbb{T}^2} \alpha_{(u,v)}(T) d(\mu \otimes \mu)(u,v), \quad T \in \mathcal{A}_\theta,$$

hvor μ *er Haar-målet.*

Det er ikke oplagt, hvordan man definerer integralet af operatorer over et givet rum. Redegørelsen ses i appendix A, idet man husker at $\mathbb{T}^2$ er et kompakt Hausdorff rum, $\mu \otimes \mu$ er et endeligt Borelmål på $\mathbb{T}^2$, og $(u,v) \to \alpha_{(u,v)}(T)$ ifølge (4.6) er kontinuert for et vilkårligt $T \in \mathcal{A}_\theta$.

Lemma 5.2 *Afbildningen* $\mathrm{E} : \mathcal{A}_\theta \to \mathcal{A}_\theta$ *defineret ovenfor opfylder egenskaberne*

(i) *for et vilkårligt lineært begrænset funktional* $\chi \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_\theta, \mathbb{C})$ *og et vilkårligt element* $T \in \mathcal{A}_\theta$ *er*

$$\chi(\mathrm{E}(T)) = \int_{\mathbb{T}^2} \chi(\alpha_{(u,v)}(T)) d(\mu \otimes \mu)(u,v)$$

(ii) $\mathrm{E}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$

(iii) E *er lineært*

(iv) $\|\mathrm{E}\| = 1$

(v) E *er positivt.*

Bevis: Den første påstand følger direkte fra definitionen af $\mathrm{E}(T)$ ved at benytte (A.2). Eftersom $\alpha_{(u,v)}$ er unital og $\int_{\mathbb{T}^2} d(\mu \otimes \mu)(u,v) = 1$, er

$$\chi(E(\mathbf{1})) = \int_{\mathbb{T}^2} \chi(\alpha_{(u,v)}(\mathbf{1})) d(\mu \otimes \mu)(u,v) = \chi(\mathbf{1})$$

for $\chi \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_\theta, \mathbb{C})$. Ifølge entydigheden i (A.2) viser dette (ii).

Lad nu $T, S \in \mathcal{A}_\theta$ og $a \in \mathbb{C}$ være vilkårlige. Da ses det at

$$\begin{aligned}\chi(\mathrm{E}(T + aS)) &= \int_{\mathbb{T}^2} \chi(\alpha_{(u,v)}(T + aS)) d(\mu \otimes \mu)(u, v) \\ &= \chi(\mathrm{E}(T)) + a\chi(\mathrm{E}(S)) = \chi(\mathrm{E}(T) + a\mathrm{E}(S)),\end{aligned}$$

hvor det ved andet lighedstegn blev benyttet, at $\alpha_{(u,v)}$, χ og integralet (af kontinuerte komplekse funktioner) alle er lineære, hvilket viser (iii).

For at se (iv) er det nok at vise at E er en kontraktion, eftersom vi allerede har resultatet (ii). For $T \in \mathcal{A}_\theta$ giver (A.2) vurderingen

$$\|\mathrm{E}(T)\| \leq \int_{\mathbb{T}^2} \|\alpha_{(u,v)}(T)\| d(\mu \otimes \mu)(u, v).$$

Idet *-automorfien $\alpha_{(u,v)}$ er normformindskende vil $\|\alpha_{(u,v)}(T)\| \leq \|T\|$ for $u, v \in \mathbb{T}$, og da $\mu \otimes \mu$ er normaliseret på $\mathbb{T}^2$ følger det at $\|\mathrm{E}(T)\| \leq \|T\|$, hvilket viser at E er en kontraktion og dermed (iv).

For at vise at afbildningen E er positiv, lader vi $T \in \mathcal{A}_\theta$ være positiv. Da $\alpha_{(u,v)}$ er en *-automorfi vil også $\alpha_{(u,v)}(T)$ være positiv. Ifølge [9, 13.9] er det nok at vise $\mathfrak{f}(\mathrm{E}(T))$ er positiv for alle tilstande $\mathfrak{f}$ på $\mathcal{A}_\theta$. Men eftersom tilstande er lineære, begrænsede og positive funktionaler, følger det af (i) at

$$\mathfrak{f}(\mathrm{E}(T)) = \int_{\mathbb{T}^2} \mathfrak{f}(\alpha_{(u,v)}(T)) d(\mu \otimes \mu)(u, v) \geq 0,$$

hvilket viser det ønskede. □

Lemma 5.3

(i) $\mathrm{E}\left(\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m} U^n V^m\right) = c_{0,0} \cdot \mathbf{1}, \quad c_{n,m} \in \mathbb{C}$

(ii) $\mathrm{E}(T) \in \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}, \quad T \in \mathcal{A}_\theta$

(iii) $\mathrm{E}(f(U)g(V)) = \int_{\mathbb{T}} f(z) d\mu(z) \int_{\mathbb{T}} g(z) d\mu(z) \cdot \mathbf{1}, \quad f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Bevis: Ifølge (5.2) er E lineær, så for Laurentrækken $\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m} U^n V^m$ fås

$$\mathrm{E}\left(\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m} U^n V^m\right) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m} \mathrm{E}(U^n V^m).$$

For vilkårligt $\chi \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_\theta, \mathbb{C})$ fås af (5.2)

$$\begin{aligned}\chi(\mathrm{E}(U^n V^m)) &= \int_{\mathbb{T}^2} \chi(\alpha_{(u,v)}(U^n V^m)) d(\mu \otimes \mu)(u, v) \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} \chi(u^n U^n v^m V^m) d(\mu \otimes \mu)(u, v) \\ &= \chi(U^n V^m) \int_{\mathbb{T}^2} u^n v^m d(\mu \otimes \mu)(u, v) = \chi(U^n V^m) \delta_n \delta_m.\end{aligned}$$

Ifølge entydigheden fra (A.2) ses, at $\mathrm{E}(U^n V^m) = U^n V^m \delta_n \delta_m$, hvilket viser (i).

$\mathcal{A}_\theta$ er unital , så $\mathbb{C} \cdot \mathbf{1} \subseteq \mathcal{A}_\theta$. Afbildningen $w \cdot \mathbf{1} \to w$ er en *-isomorfi fra $\mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$ ind i $\mathbb{C}$, og ifølge (3.2) er $\|\mathbf{1}\| = 1$, hvilket gør afbildningen til en isometrisk *-isomorfi. Derfor følger det, at $\mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$ (som $\mathbb{C}$) er fuldstændig, og dermed afsluttet i $\mathcal{A}_\theta$. Da E er kontinuert vil $\mathrm{E}^{-1}(\mathbb{C} \cdot \mathbf{1})$ derfor være afsluttet, og fra (i) ses, at $\mathrm{E}(\mathcal{A}_\theta^0) = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$. Dette viser $\mathrm{E}^{-1}(\mathbb{C} \cdot \mathbf{1}) = \mathcal{A}_\theta$ og dermed (ii).

For at vise (iii) benyttes, at mængden af endelige Laurentrækker på $\mathbb{T}$ er tæt i $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, til at finde følger af endelige Laurentrækker $(p_i)_{i=1}^\infty, (q_j)_{j=1}^\infty$, som konvergerer i supnorm mod henholdsvis $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Ifølge funktionskalkylen for normale operatorer vil $(p_i(U))_{i=1}^\infty, (q_j(V))_{j=1}^\infty$ konvergere i norm mod henholdsvis $f(U), g(V)$, og specielt vil

$$p_i(U) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} a_{n,i} U^n, \quad q_j(V) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} b_{n,j} V^n.$$

Nu følger det af kontinuiteten af E samt af (i), at

$$\mathrm{E}(f(U)g(V)) = \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} \mathrm{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} a_{n,i} U^n \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} b_{n,j} V^n \right) = \mathbf{1} \cdot \lim_{i\to\infty} a_{0,i} \lim_{j\to\infty} b_{0,j}.$$

For f gælder

$$\int_{\mathbb{T}} f(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} \lim_{i\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} a_{n,i} z^n d\mu(z) = \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{T}} \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} a_{n,i} z^n d\mu(z) = \lim_{i\to\infty} a_{0,i},$$

hvor vi undervejs benyttede os af Lebesgues majorant sætning (som majorant kan bruges $\|f\|_\infty + \epsilon$ for vilkårligt $\epsilon > 0$, ved at se bort fra de første led i grænseværdien). Men nu følger det ønskede resultat, da ovenstående også holder for g. □

Vi benytter nu dette til at lave

Definition 5.4 *Afbildningen* $\mathrm{Tr} : \mathcal{A}_\theta \to \mathbb{C}$ *defineres ved*

$$\mathrm{E}(T) = \mathrm{Tr}(T) \cdot \mathbf{1}, \quad T \in \mathcal{A}_\theta.$$

Definition 5.5 *Et lineært begrænset (og dermed uniformt kontinuert) funktional* τ *på* C^**-algebraen* $\mathcal{M}$ *opfyldende sporegenskaben*

$$\tau(TS) = \tau(ST), \qquad T, S \in \mathcal{M}$$

kaldes et spor på $\mathcal{M}$.

Theorem 5.6 *Lad $\theta \in [0,1)$ og U, V være generatorerne for $\mathcal{A}_\theta$. Afbildningen* $\mathrm{Tr} : \mathcal{A}_\theta \to \mathbb{C}$ *opfylder følgende egenskaber (og er derfor specielt et spor på $\mathcal{A}_\theta$)*

(*i*) Tr *er lineær*

(*ii*) Tr *er positiv*

(*iii*) Tr *er tro* $(T \geq \mathbf{0}, T \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{Tr}(T) \neq 0)$

(*iv*) Tr *er normaliseret* $(\mathrm{Tr}(\mathbf{1}) = 1)$

(*v*) Tr *har norm* 1

(*vi*) Tr *opfylder spor-egenskaben* $(\mathrm{Tr}(TS) = \mathrm{Tr}(ST))$

(*vii*) $\mathrm{Tr}\left(\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m} U^n V^m\right) = c_{0,0}, \quad c_{n,m} \in \mathbb{C}$

(*viii*) $\mathrm{Tr}(f(U)g(V)) = \mathrm{Tr}(f(U))\mathrm{Tr}(g(V))$

(*ix*) $\mathrm{Tr}(f(U)) = \int_{\mathbb{T}} f(z) d\mu(z), \quad \mathrm{Tr}(g(V)) = \int_{\mathbb{T}} g(z) d\mu(z),$

for alle $T, S \in \mathcal{A}_\theta$ og $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, hvor μ er Haar målet.

Bevis: Af (5.2) og (5.3) ses det, at Tr er lineær og positiv, da $w \cdot \mathbf{1} \geq \mathbf{0}$ hvis og kun hvis $w \geq 0$, for $w \in \mathbb{C}$.

For at vise (*iii*) vælges et vilkårligt element T i $\mathcal{A}_\theta$, så $T \geq \mathbf{0}$ og $T \neq \mathbf{0}$. Derudover vælges en tilstand $\mathfrak{f}$ på $\mathcal{A}_\theta$, så $\mathfrak{f}(T) \neq 0$. Eksistensen af et sådant $\mathfrak{f}$ er sikret ifølge [9, 13.9]. Nu er

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(T) &= \mathrm{Tr}(T) \cdot \mathfrak{f}(\mathbf{1}) = \mathfrak{f}(\mathrm{Tr}(T) \cdot \mathbf{1}) = \mathfrak{f}(\mathrm{E}(T)) \\ &= \mathfrak{f}\left(\int_{\mathbb{T}^2} \alpha_{(u,v)}(T) d(\mu \otimes \mu)(u,v)\right) = \int_{\mathbb{T}^2} \mathfrak{f}(\alpha_{(u,v)}(T)) d(\mu \otimes \mu)(u,v),\end{aligned}$$

hvor det sidste lighedstegn følger af (5.2). Definér nu $g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ ved

$$g(u,v) = \mathfrak{f}(\alpha_{(u,v)}(T)).$$

Afbildningen g er positiv (da sammensætningen af positive afbildninger er positiv), hvorfor integralet af g over $\mathbb{T}^2$ også er positivt. Men $\mathfrak{f}$ er kontinuert, så ifølge (4.6) er g kontinuert. Da $g(1,1) = \mathfrak{f}(T) \neq 0$ gælder, at

$$\mathrm{Tr}(T) = \int_{\mathbb{T}^2} g(u,v) d(\mu \otimes \mu)(u,v) \neq 0,$$

fordi det er muligt at finde en målelig mængde i $\mathbb{T}^2$ indeholdende $(1,1)$, som har areal forskellig fra 0, og hvor $|g(u,v) - g(1,1)| < \frac{g(1,1)}{2}$ på hele mængden.

Benyttes (5.2) følger (iv) og (v) direkte. Eftersom Tr således er kontinuert, er det nok at vise sporegenskaben (vi) på $\mathcal{A}_\theta^0$. Givet $T = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} a_{n,m}U^nV^m$ og $S = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} b_{n,m}U^nV^m$ i $\mathcal{A}_\theta^0$, har vi

$$TS = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} \sum_{k,l\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} a_{n,m}b_{k,l}U^nV^mU^kV^l = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} \sum_{k,l\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} \rho^{-mk}a_{n,m}b_{k,l}U^{n+k}V^{m+l}.$$

Men $TS, ST \in \mathcal{A}_\theta^0$ og kan derfor skrives (entydigt) som

$$TS = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} c_{n,m}U^nV^m, \quad ST = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} d_{n,m}U^nV^m,$$

hvor specielt

$$c_{0,0} = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} \rho^{nm}a_{n,m}\cdot b_{-n,-m} = d_{0,0}.$$

Nu ses det af (5.3) at $\mathrm{Tr}(TS) = c_{0,0} = d_{0,0} = \mathrm{Tr}(ST)$. Dermed er (vi) vist og (vii), $(viii)$ og (ix) følger af (5.3). $\square$

Bemærkning Ifølge [9, 13.2] er positive lineære funktionaler hermetiske, så Tr opfylder

(x) $\mathrm{Tr}(T^*) = \overline{\mathrm{Tr}(T)}$,

for alle $T \in \mathcal{A}_\theta$.

Egenskaberne ved Tr sætter os i stand til at give nedenstående karakteristik. Givet et $T \in \mathcal{A}_\theta$ sætter vi $c_{n,m} = \mathrm{Tr}(TV^{-m}U^{-n})$. Hvis

$$T = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} a_{k,l}U^kV^l, \quad a_{k,l}\in\mathbb{C}$$

er

$$c_{n,m} = \mathrm{Tr}(TV^{-m}U^{-n}) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{k,l\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} a_{k,l}U^kV^lV^{-m}U^{-n}\right) = a_{n,m}.$$

For $T \in \mathcal{A}_\theta$ får vi således en identifikation af T ved

$$\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} c_{n,m}U^nV^m,$$

uden at kommentere om summen konvergerer i tilfældet $T \in \mathcal{A}_\theta \setminus \mathcal{A}_\theta^0$. For $T \in \mathcal{A}_\theta$ er $T = \mathbf{0}$ hvis og kun hvis $c_{n,m} = 0$ for alle $n, m \in \mathbb{Z}$, hvilket ses i det følgende. Hvis $T = \mathbf{0}$ gælder oplagt at $c_{n,m} = 0$ for alle $n, m \in \mathbb{Z}$, mens det andet udsagn fremkommer ved et se på $\mathrm{Tr}(T^*T)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(T^*T) &= \mathrm{Tr}(TT^*) = \lim_{i\to\infty} \mathrm{Tr}(T(T_i)^*) = \lim_{i\to\infty} \mathrm{Tr}\left(T \sum_{k,l\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} (a_{k,l,i} U^k V^l)^*\right) \\
&= \lim_{i\to\infty} \sum_{k,l\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} \overline{a}_{k,l,i} \mathrm{Tr}(TV^{-l}U^{-k}) = \lim_{i\to\infty} \sum_{k,l\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} \overline{a}_{k,l,i} c_{l,k} = 0,
\end{aligned}$$

hvor $T_i = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} a_{k,l,i} U^k V^l$ og $\lim_{i\to\infty} T_i = T$. Eftersom Tr er tro må $T^*T = 0$ og dermed $T = 0$, hvilket viser det ønskede.

For $T \in \mathcal{A}_\theta$ kan koefficenterne $c_{n,m}$ findes som

$$c_{n,m} = \mathrm{Tr}(TV^{-m}U^{-n}) = \lim_{i\to\infty} \mathrm{Tr}(T_i V^{-m} U^{-n}) = \lim_{i\to\infty} a_{n,m,i},$$

hvor $T_i = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}}^{\text{endelig}} a_{k,l,i} U^k V^l$ og $\lim_{i\to\infty} T_i = T$.

6 Projektioner i $\mathcal{A}_\theta$

Dette afsnit viser eksistensen af ikke-trivielle projektioner i $\mathcal{A}_\theta$, samt egenskaber ved sporet af projektioner. Med sporet menes det i afsnit 5 introducerede spor Tr.

Lemma 6.1 *Lad $\mathcal{N}$ være en C^*-algebra og lad P være en projektion i $\mathcal{N}$ ($P = P^* = P^2$). Da er $P\mathcal{N}P = \{PTP : T \in \mathcal{N}\}$ en unital del-C^*-algebra af $\mathcal{N}$, med identitet P.*

Bevis: Det skal vises, at

(*i*) $T + S,\ aT,\ TS,\ T^* \in P\mathcal{N}P$ for $T, S \in P\mathcal{N}P$ og $a \in \mathbb{C}$

(*ii*) $P\mathcal{N}P$ er normafsluttet.

Bemærk først, at hvis $T \in P\mathcal{N}P$, da findes $T' \in \mathcal{N}$ så $T = PT'P$. Dermed er $T = P^2T'P^2 = P(PT'P)P = PTP$, altså

$$T \in P\mathcal{N}P \Leftrightarrow T = PTP.$$

Ved anvendelse af dette resultat vises (*i*) let, og det ses at $P \in P\mathcal{N}P$ er identiteten.

Med $\|P\|^2 = \|P^*P\| = \|P^2\| = \|P\|$ fås at $\|P\| \leq 1$. Antag at $T \in \overline{P\mathcal{N}P}$, da eksisterer en følge $(T_n)_{n=1}^\infty$ i $P\mathcal{N}P$, som konvergerer mod T med hensyn til normen fra $\mathcal{N}$. Da

$$\|T_n - PTP\| = \|P(T_n - T)P\| \leq \|P\|\|T_n - T\|\|P\| \leq \|T_n - T\|$$

vil $(T_n)_{n=1}^\infty$ også konvergere mod PTP. Idet $\mathcal{N}$ er et Hausdorffrum, er $T = PTP$ og dermed vil $T \in P\mathcal{N}P$, hvormed (*ii*) er vist. $\square$

Lemma 6.2 *Lad $\mathcal{N}$ være en C^*-algebra og lad P, Q være projektioner i $\mathcal{N}$ med $\|P - Q\| < 1$. Da findes $W \in \mathcal{N}$, så $P = WW^*, Q = W^*W$. Specielt gælder, at hvis τ er et spor på $\mathcal{N}$, så er $\tau(P) = \tau(Q)$.*

Bevis: Sæt $X = PQ \in \mathcal{N}$. Da er

$$X^* = QP, \quad XX^* = PQP \in P\mathcal{N}P, \quad X^*X = QPQ \in Q\mathcal{N}Q,$$

$$\|P - XX^*\| = \|P(P - Q)P\| < 1, \quad \|Q - X^*X\| = \|Q(Q - P)Q\| < 1.$$

Fra [9, 2.1] fås, at XX^*, og dermed også $(XX^*)^{\frac{1}{2}}$, er invertibel i C^*-algebraen $P\mathcal{N}P$, samt at X^*X er invertibel i $Q\mathcal{N}Q$. Dermed findes $Y \in P\mathcal{N}P$ og $Z \in Q\mathcal{N}Q$, så $Y(XX^*)^{\frac{1}{2}} = (XX^*)^{\frac{1}{2}}Y = P$ og $ZX^*X = Q$. Bemærk at

$Y = Y^*$, da den inverse til et selvadjungeret element selv er selvadjungeret (husk at $(XX^*)^{\frac{1}{2}}$ er den positive kvadratrod). Sæt nu $W = YX$. Nu følger det ønskede fra

$$WW^* = YX(YX)^* = Y(XX^*)Y = Y(XX^*)^{\frac{1}{2}}(XX^*)^{\frac{1}{2}}Y = P^2 = P$$

$$\begin{aligned} W^*W &= (YX)^*(YX) = X^*Y^2X = QX^*Y^2X \\ &= ZX^*(XX^*Y^2)X = ZX^*PX = ZX^*X = Q, \end{aligned}$$

da Y^2 er invers til XX^* i $P\mathcal{N}P$. Endelig fås at

$$\tau(P) = \tau(WW^*) = \tau(W^*W) = \tau(Q),$$

ved at benytte sporegenskaben (5.5) for τ. □

Definition 6.3 *Billedet af sporet* Tr *over alle projektioner i* $\mathcal{A}_\theta$ *skrives som*

$$\mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta) = \{\mathrm{Tr}(P) : P \in \mathcal{A}_\theta, \quad P = P^* = P^2\}.$$

Theorem 6.4 *Mængden* $\mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$ *er en ikke-tom tællelig delmængde af* $[0, 1]$.

Bevis: De trivielle projektioner $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathcal{A}_\theta$ har spor 0 henholdsvis 1 (jf. 5.6), hvorfor $\mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$ indeholder 0 og 1. Bemærk at $\mathfrak{M} = \{U^nV^m : n, m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{A}_\theta^0$ udspænder $\mathcal{A}_\theta^0$, da ethvert element i $\mathcal{A}_\theta^0$ kan skrives som en linearkombination af elementer fra $\mathfrak{M}$. Med $\mathfrak{N} = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{A}_\theta$ er $\mathfrak{N}$ en tællelig tæt delmængde af $\mathcal{A}_\theta$, hvorfor $\mathcal{A}_\theta$ er separabel. Da $\mathfrak{N}$ er tællelig kan den indexeres ved $\mathfrak{N} = \{T_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sæt nu

$$\mathfrak{S} = \mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta) \quad \mathfrak{T} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\mathrm{Tr}(P) : P \in \mathcal{A}_\theta, \quad P = P^* = P^2, \quad \|P - T_n\| < \frac{1}{2}\}.$$

$\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{S}$ følger oplagt fra definitionen. $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}$ fås idet $\mathfrak{N}$ er tæt i $\mathcal{A}_\theta$, hvormed der til enhver projektion P i $\mathcal{A}_\theta$ findes et $n \in \mathbb{N}$ så $\|P - T_n\| < \frac{1}{2}$.

Bemærk at de mængder, der forenes i definitionen af $\mathfrak{T}$, højst har et element hver, hvilket ses i det følgende. Lad P, Q være projektioner i $\mathcal{A}_\theta$ og $n \in \mathbb{N}$ være givet, så $\|P - T_n\| < \frac{1}{2}$ og $\|Q - T_n\| < \frac{1}{2}$. Nu følger $\mathrm{Tr}(P) = \mathrm{Tr}(Q)$ fra (6.2), idet

$$\|P - Q\| \le \|P - T_n\| + \|Q - T_n\| < 1.$$

Altså er $\mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$ en tællelig mængde.

For en projektion P i $\mathcal{A}_\theta$ er $\|P\| \le 1$, så da $\|\mathrm{Tr}\| = 1$ ifølge (5.6), vil $|\mathrm{Tr}(P)| \le 1$. Idet Tr er positiv og enhver projektion er positiv ($P = P^*P$) er $\mathrm{Tr}(P) \ge 0$. Dette giver at $\mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$ er en tællelig delmængde af $[0, 1]$. □

Bemærkning Ved at benytte $\mathcal{A}_0 \cong \mathcal{C}(\mathbb{T}^2)$ (argumentet overlades til læseren) og at $\mathbb{T}^2$ er sammenhængende, følger det fra [9, 6.2] og [9, opgave 9.3], at $\mathcal{A}_\theta$ kun indeholder de trivielle projektioner for $\theta = 0$. I det følgende vises, at dette ikke er tilfældet for $\theta \in (0, 1)$.

Lemma 6.5 (Powers-Rieffel projektionen) *Lad* $\theta \in [0,1)$, $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, U, V *være generatorerne for* $\mathcal{A}_\theta$ *og* $\Phi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *være homeomorfien* $\Phi(z) = \rho z$, *hvor* $\rho = e^{2\pi i\theta}$. *Da gælder, at*

$$P = U^*\bar{g}(V) + f(V) + g(V)U \in \mathcal{A}_\theta$$

er en projektion, hvis og kun hvis

(i) $((g \circ \Phi^{-1}) \cdot g)(V) = \mathbf{0}$

(ii) $(g \cdot (f + f \circ \Phi))(V) = g(V)$

(iii) $(|f|^2 + |g|^2 + |g \circ \Phi^{-1}|^2)(V) = f(V)$.

Bevis: Bemærk først, at P er veldefineret jf. funktionskalkylen for normale operatorer [9, 10.3], idet $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Da venstresiden i $(i) - (iii)$ ligeledes definerer operatorer ud fra V og kontinuerte funktioner på $\mathbb{T}$ (og deres sammensætning), bliver disse ligeledes veldefinerede elementer i $\mathcal{A}_\theta$.

Der gælder, at $\mathbb{T}$ er et kompakt Hausdorff rum, og at mængden bestående af endelige Laurentrækker defineret på $\mathbb{T}$, er en selvadjungeret del-algebra af $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Idet denne mængde separerer punkter i $\mathbb{T}$, følger det fra Stone-Weierstrass approksimationssætning [9, 1.9], at der for ethvert $h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ eksisterer en følge af endelige Laurentrækker $(p_i)_{i=1}^\infty$, som konvergerer mod h med hensyn til supnormen $\|\cdot\|_\infty$.

For $h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, fås fra funktionskalkylen for nornale operatorer, at $(p_i(V))_{i=1}^\infty$, $(p_i(\rho V))_{i=1}^\infty$ i $\mathcal{A}_\theta$ konvergerer mod henholdsvis $h(V), h(\rho V)$ med hensyn til normen i $\mathcal{A}_\theta$. Dermed følger

$$Uh(V) = \lim_{i\to\infty} Up_i(V) = \lim_{i\to\infty} p_i(\rho V)U = h(\rho V)U,$$

idet $Up_i(V) = p_i(\rho V)U$, som let ses af relationen $UV^n = (\rho V)^n U$ for $n \in \mathbb{Z}$. På tilsvarende måde fås $U^*h(V) = h(\bar{\rho}V)U^*$ ud fra relationen $U^*V^n = (\bar{\rho}V)^n U^*$ for $n \in \mathbb{Z}$. Med $\Phi(V) = \rho V$ og $\Phi^{-1}(V) = \bar{\rho}V$ (veldefineret idet $\Phi, \Phi^{-1} \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$) følger at

$$\begin{aligned} U^*h(V)U &= h(\bar{\rho}V)U^*U = (h \circ \Phi^{-1})(V) \\ Uh(V)U^* &= h(\rho V)UU^* = (h \circ \Phi)(V). \end{aligned}$$

Benyttes regneregler for funktionskalkylen for normale operatorer, fås

$$\begin{aligned}
U^*\bar{g}(V)f(V) &= U^*(\bar{g}\cdot f)(V)\\
f(V)U^*\bar{g}(V) &= U^*Uf(V)U^*\bar{g}(V) = U^*(\bar{g}\cdot(f\circ\Phi))(V)\\
f(V)f(V) &= (f^2)(V)\\
g(V)UU^*\bar{g}(V) &= (|g|^2)(V)\\
U^*\bar{g}(V)g(V)U &= (U^*\bar{g}(V)U)(U^*g(V)U) = (|g\circ\Phi^{-1}|^2)(V)\\
f(V)g(V)U &= (g\cdot f)(V)U\\
g(V)Uf(V) &= g(V)Uf(V)U^*U = (g\cdot(f\circ\Phi))(V)U\\
g(V)Ug(V)U &= UU^*g(V)Ug(V)U = U((g\circ\Phi^{-1})\cdot g)(V)U\\
U^*\bar{g}(V)U^*\bar{g}(V) &= U^*\bar{g}(V)U^*\bar{g}(V)UU^* = U^*((\bar{g}\circ\Phi^{-1})\cdot\bar{g})(V)U^*.
\end{aligned}$$

Summen af ovenstående 9 led giver P^2.

Antag nu $(i)-(iii)$. Fra (i) fås at

$$\mathbf{0} = ((g\circ\Phi^{-1})\cdot g)(V)^* = (U^*g(V)Ug(V))^* = \bar{g}(V)U^*\bar{g}(V)U = ((\bar{g}\circ\Phi^{-1})\cdot\bar{g})(V).$$

Tilsvarende gælder operatorrelationen (ii) for $g(V)^* = \bar{g}(V)$ i stedet for $g(V)$. Af (iii) følger at $f(V) = \bar{f}(V)$ og deraf, at $P = P^*$. Idet

$$|f|^2(V) = \bar{f}(V)f(V) = f^2(V)$$

kan $f^2(V)$ erstattes med $|f|^2(V)$ (i det tredje led) i udtrykket for P^2. Efterfølgende giver $(i)-(iii)$ ved direkte indsættelse, at $P^2 = P$. Altså er P en projektion.

Antag omvendt at P er en projektion,

$$P = \sum_{n=-1}^{1} f_n(V)U^n,$$

hvor $f_{-1} = \bar{g}\circ\Phi^{-1}$, $f_0 = f$ og $f_1 = g$. Benyttes at $P = P^*$ fås, at $f(V) = \bar{f}(V)$. Med dette bliver

$$P^2 = \sum_{n=-2}^{2} g_n(V)U^n,$$

hvor $g_0 = |f|^2 + |g|^2 + |g\circ\Phi^{-1}|^2$, $g_1 = g\cdot(f + f\circ\Phi)$ og $g_2 = ((g\circ\Phi^{-1})\cdot g)\circ\Phi$. Nu følger $(i)-(iii)$ umiddelbart af entydigheden i (4.5), der giver $f_0(V) = g_0(V)$, $f_1(V) = g_1(V)$ og $\mathbf{0} = g_2(V)$. Eksempelvis ses (i) af

$$((g\circ\Phi^{-1})\cdot g)(V) = (g_2\circ\Phi^{-1})(V) = U^*g_2(V)U = \mathbf{0}.$$

□

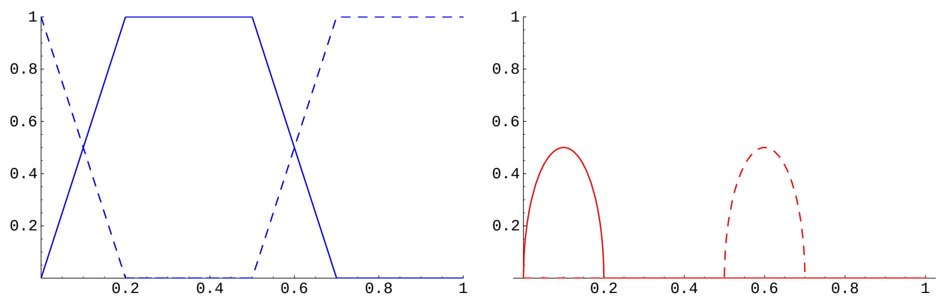
Theorem 6.6 *$\mathcal{A}_\theta$ indeholder ikke-trivielle projektioner for $\theta \in (0,1)$.*

Bevis: Et eksplicit udtryk for $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, som opfylder $(i) - (iii)$ i (6.5) er givet som følger. Vælg $\delta > 0$ så $\delta < \theta$ og $\theta + \delta < 1$, og lad $f(e^{2\pi i t}) = \tilde{f}_\theta(t)$ og $g(e^{2\pi i t}) = \tilde{g}(t)$, hvor $\tilde{f}_\theta$ og $\tilde{g}$ er kontinuerte periodiske funktioner fra $\mathbb{R}$ ind i $[0,1]$ defineret i en periode $[0,1)$ ved

$$\tilde{f}_\theta(t) = \begin{cases} \frac{t}{\delta} & t \in [0,\delta) \\ 1 & t \in [\delta,\theta) \\ 1 - \frac{t-\theta}{\delta} & t \in [\theta, \theta+\delta) \\ 0 & t \in [\theta+\delta, 1) \end{cases}$$

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{t(\delta-t)}}{\delta} & t \in [0,\delta) \\ 0 & t \in [\delta, 1) \end{cases}$$

Det følger at $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ samt at



Figur 1: Skitser af $\tilde{f}_\theta(t)$, $\tilde{f}_\theta(t+\theta)$ (venste figur), $\tilde{g}(t)$, $\tilde{g}(t-\theta)$ (højre figur) for $t \in [0,1]$, $\theta = \frac{1}{2}$ og $\delta = \frac{1}{5}$. De stiplede kurver viser $\tilde{f}_\theta(t+\theta)$ og $\tilde{g}(t-\theta)$.

$$(g \circ \Phi^{-1})(e^{2\pi i t}) = g(\bar{\rho} e^{2\pi i t}) = g(e^{2\pi i (t-\theta)}) = \tilde{g}(t-\theta)$$

$$(f \circ \Phi)(e^{2\pi i t}) = f(\rho e^{2\pi i t}) = f(e^{2\pi i (t+\theta)}) = \tilde{f}_\theta(t+\theta).$$

For at eftervise $(i) - (iii)$ er det nok at vise

(a) $\tilde{g}(t-\theta)\tilde{g}(t) = 0, \quad t \in [0,1)$

(b) $\tilde{g}(t)(\tilde{f}_\theta(t) + \tilde{f}_\theta(t+\theta)) = \tilde{g}(t), \quad t \in [0,1)$

(c) $\tilde{f}_\theta^2(t) + \tilde{g}^2(t) + \tilde{g}^2(t-\theta) = \tilde{f}_\theta(t), \quad t \in [0,1).$

Med $\tilde{g}(t) \neq 0$ kun for $t \in [0,\delta)$ følger (a) ud fra valget af δ ($0 < \delta < \theta$ og $\theta + \delta < 1$). For at vise (b), benyttes at

$$\tilde{f}_\theta(t+\theta) = 1 - \frac{(t+\theta)-\theta}{\delta} = 1 - \frac{t}{\delta} \quad , \quad t \in [\theta-\theta, \theta+\delta-\theta) = [0,\delta),$$

hvilket giver $\tilde{f}_\theta(t) + \tilde{f}_\theta(t+\theta) = 1$ for $t \in [0, \delta)$, hvoraf (b) følger. Sidst ses (c) fra den direkte udregning

$$\begin{aligned}\tilde{f}_\theta^2(t) + \tilde{g}^2(t) + \tilde{g}^2(t-\theta) &= \begin{cases} (\frac{t}{\delta})^2 + \frac{t(\delta - t)}{\delta^2} & t \in [0, \delta) \\ 1 & t \in [\delta, \theta) \\ (1 - \frac{t-\theta}{\delta})^2 + \frac{(t-\theta)(\delta - (t-\theta))}{\delta^2} & t \in [\theta, \theta + \delta) \\ 0 & t \in [\theta + \delta, 1) \end{cases} \\ &= \tilde{f}_\theta(t),\end{aligned}$$

da

$$(1 - \frac{t-\theta}{\delta})^2 + \frac{(t-\theta)(\delta - (t-\theta))}{\delta^2} = (1 - \frac{t-\theta}{\delta})(1 - \frac{t-\theta}{\delta} + \frac{t-\theta}{\delta}) = 1 - \frac{t-\theta}{\delta}.$$

At den fremkomne projektion ikke er triviel, ses let ud fra udtrykkene for f og g samt (4.5). □

Korollar 6.7 *For $\theta \in (0,1)$ vil $\theta \in \mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$.*

Bevis: Lad P være givet ved $P = U^*\bar{g}(V) + f(V) + g(V)U$, hvor $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ er defineret som i (6.6). Da P er en projektion vil $\mathrm{Tr}(P) \in \mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$. Ved at benytte (5.6) $(i), (vii), (viii)$ følger nu

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(P) &= \mathrm{Tr}(U^*\bar{g}(V)) + \mathrm{Tr}(f(V)) + \mathrm{Tr}(g(V)U) \\ &= \mathrm{Tr}(U^*)\mathrm{Tr}(\bar{g}(V)) + \mathrm{Tr}(f(V)) + \mathrm{Tr}(g(V))\mathrm{Tr}(U) = \mathrm{Tr}(f(V)).\end{aligned}$$

Nu giver (5.6) (ix) og egenskaberne ved Haar målet, at

$$\mathrm{Tr}(P) = \int_{\mathbb{T}} f(z) d\mu(z) = \int_0^1 f(e^{2\pi i t}) dt = \int_0^1 \tilde{f}_\theta(t) dt = \theta.$$

Dermed fås $\theta = \mathrm{Tr}(P) \in \mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$, hvilket viser sætningen. □

7 Den irrationale rotations C^*-algebra

I dette afsnit behandles den irrationale rotations C^*-algebra. Der gøres rede for at den er simpel, samt at sporet defineret i afsnit 5 er det eneste normaliserede spor på denne. Derudover gives en skærpet karakteristik af sporet af projektioner i den irrationale rotations C^*-algebra og, i denne forbindelse, en fuldstændig beskrivelse af hvilke irrationale rotations C^*-algebraer, der er isomorfe.

Lemma 7.1 *Hvis $\theta \in (0,1)$ er irrational, så er*

$$\{(\rho^n, \rho^m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

en tæt delmængde af $\mathbb{T}^2$.

Bevis: Det er nok at vise, at for hvert $\phi \in [0,1)$ og $\epsilon > 0$ findes $n \in \mathbb{Z}$, så $|e^{2\pi i n\theta} - e^{2\pi i\phi}| < \epsilon$. Men da eksponentialfunktionen er kontinuert og periodisk, med periode $2\pi i$, er det nok at vise, at der findes $n, m \in \mathbb{Z}$ så $|n\theta + m - \phi| < \epsilon'$ for vilkårligt $\epsilon' > 0$. Vælg nu $n_1 \in \mathbb{N}$ til at være det mindste naturlige tal som opfylder $n_1 > \frac{1}{\theta} > 1$. Der gælder nu

$$0 < \theta n_1 - 1 \leq \theta,$$

hvor den første ulighed garanteres af $n_1 > \frac{1}{\theta}$, mens den næste ses ved modstrid, da $\theta n_1 - 1 > \theta \Rightarrow n_1 - 1 > \frac{1}{\theta}$ og n_1 er valgt mindst mulig. Eftersom θ er irrational, kan det ikke ske at $\theta n_1 - 1 = \theta$, altså kan ovenstående skærpes til

$$0 < \theta n_1 - 1 < \theta \Rightarrow \theta(n_1 - 1) - 1 < 0 < \theta n_1 - 1.$$

Sæt nu $\delta_1 = \min\{-(\theta(n_1-1)-1),\ \theta n_1 - 1\}$. Eftersom begge elementer er strengt positive og deres sum giver θ, må $0 < \delta_1 \leq \frac{\theta}{2}$. Bemærk nu at δ_1 er på formen $n\theta + m$, hvor $n, m \in \mathbb{Z}$, hvilket sætter os i stand til at komme inden for $\frac{\theta}{2}$ af det ønskede ϕ. Men eftersom θ er irrational ses det let, at δ_1 også må være irrational, så ovenstående procedure kan benyttes k gange til at finde $\delta_k = n\theta + m \leq \frac{\theta}{2^k}$, for $n, m \in \mathbb{Z}$, hvilket viser det ønskede resultat. $\square$

Definition 7.2 *En normeret ring $\mathcal{R}$ er simpel, hvis $\mathcal{I} \lhd \mathcal{R}$ ($\mathcal{I}$ er et 2-sidet afsluttet ideal i $\mathcal{R}$) medfører at $\mathcal{I} = \{\mathbf{0}\}$ eller $\mathcal{I} = \mathcal{R}$.*

Theorem 7.3 *C^*-algebraen $\mathcal{A}_\theta$ er simpel, hvis $\theta \in (0,1)$ er irrational.*

Bevis: Antag $\mathcal{I} \lhd \mathcal{A}_\theta$ og $\mathcal{I} \neq \{\mathbf{0}\}$. Vælg $T \in \mathcal{I}$, $T \neq \mathbf{0}$. Følgelig er T^*T et positivt element i $\mathcal{I}$ og $T^*T \neq \mathbf{0}$, da $\|T^*T\| = \|T\|^2 \neq 0$. Da Tr er tro fås at $\mathrm{Tr}(T^*T) \neq 0$. Sæt

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \{(\rho^n, \rho^m) \in \mathbb{T}^2 : n, m \in \mathbb{Z}\} \\ \mathbb{W} &= \{(u, v) \in \mathbb{T}^2 : \alpha_{(u,v)}(T^*T) \in \mathcal{I}\}. \end{aligned}$$

Hvis α er en indre *-automorfi på $\mathcal{A}_\theta$ findes et unitært $W \in \mathcal{A}_\theta$, så

$$\alpha(T^*T) = W^*T^*TW \in \mathcal{I}.$$

Specielt gælder fra (4.3), at for $(u,v) \in \mathbb{V}$ er $\alpha_{(u,v)}$ en indre *-automorfi, så $\alpha_{(u,v)}(T^*T) \in \mathcal{I}$, og dermed $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{T}^2$. Da afbildningen $g : \mathbb{T}^2 \to \mathcal{A}_\theta$ givet ved

$$g(u,v) = \alpha_{(u,v)}(T^*T)$$

er kontinuert ifølge (4.6), og $\mathcal{I}$ pr. antagelse er afsluttet, er $\mathbb{W} = g^{-1}(\mathcal{I})$ afsluttet. Endelig er $\mathbb{V}$ tæt i $\mathbb{T}^2$ for $\theta \in (0,1)$ irrational jf. (7.1), hvormed $\mathbb{W} = \mathbb{T}^2$. Ifølge (A.2) vil $\mathrm{E}(T^*T)$ ligge i afslutningen af mængden

$$\{\sum_{i=1}^n a_i \alpha_{(u,v)_i}(T^*T) : n \in \mathbb{N},\ a_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^n a_i = 1,\ (u,v)_i \in \mathbb{T}^2\}.$$

Denne mængde er helt indeholdt i $\mathcal{I}$, da $\mathbb{T}^2 = \mathbb{W}$, og eftersom $\mathcal{I}$ er afsluttet må $\mathrm{E}(T^*T) \in \mathcal{I}$. Idet $\mathrm{Tr}(T^*T) \neq 0$ fås nu at $\mathbf{1} = \mathrm{Tr}(T^*T)^{-1} \cdot \mathrm{E}(T^*T) \in \mathcal{I}$, det vil sige $\mathcal{I} = \mathcal{A}_\theta$. $\square$

Korollar 7.4 *Lad $\mathcal{M}$ være en unital C^*-algebra og lad $U_0, V_0 \in \mathcal{M}$ være unitære elementer opfyldende $U_0V_0 = \rho V_0U_0$, hvor $\rho = e^{2\pi i\theta}$ og $\theta \in [0,1)$. Hvis θ er irrational, da findes entydigt en *-homomorfi*

$$\varphi : \mathcal{A}_\theta \to \mathcal{M},$$

så $\varphi(U) = U_0$ og $\varphi(V) = V_0$, hvor U, V er generatorerne for $\mathcal{A}_\theta$. Denne *-homomorfi er unital, injektiv og afbilder surjektivt ind i $\mathcal{C}^*(U_0, V_0) \subseteq \mathcal{M}$, hvormed $\mathcal{A}_\theta \cong \mathcal{C}^*(U_0, V_0)$.

Bevis: Ifølge (3.3) findes entydigt en *-homomorfi φ, som opfylder det ønskede, hvis vi blot kan vise, at denne er injektiv. Kernen af φ ($\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{\mathbf{0}\})$) er oplagt et 2-sidet ideal i $\mathcal{A}_\theta$, og eftersom φ er kontinuert, er dette ideal afsluttet. Nu følger det af (7.3), at $\mathcal{A}_\theta$ er simpel og dermed at $\ker(\varphi)$ enten er lig $\{\mathbf{0}\}$ eller $\mathcal{A}_\theta$. Men da φ ikke sender alt i $\mathbf{0}$ ($\varphi(U) = U_0 \neq \mathbf{0}$) må $\ker(\varphi)=\{\mathbf{0}\}$, hvormed φ er injektiv. $\square$

Theorem 7.5 *Afbildningen* Tr *er det eneste normaliserede spor på $\mathcal{A}_\theta$, hvis $\theta \in (0,1)$ er irrational.*

Bevis: Lad τ være et normaliseret spor på $\mathcal{A}_\theta$ og lad $T \in \mathcal{A}_\theta$ være givet. Sæt

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \{(\rho^n, \rho^m) \in \mathbb{T}^2 : n, m \in \mathbb{Z}\} \\ \mathbb{W} &= \{(u,v) \in \mathbb{T}^2 : \tau(\alpha_{(u,v)}(T)) = \tau(T)\}. \end{aligned}$$

For enhver indre *-automorfi α på $\mathcal{A}_\theta$ findes et unitært element $W \in A_\theta$ så $\alpha(T) = W^*TW$, hvormed $\tau(T) = \tau(WW^*T) = \tau(W^*TW) = \tau(\alpha(T))$. Specielt fås $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W}$, da $\alpha_{(u,v)}$ er en indre *-automorfi for $(u, v) \in \mathbb{V}$. Da τ er kontinuert, vil $g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ givet ved

$$g(u, v) = \tau(\alpha_{(u,v)}(T))$$

også være det, og da $\{\tau(T)\}$ er afsluttet i $\mathbb{C}$ er $\mathbb{W} = g^{-1}(\{\tau(T)\})$ afsluttet. Endelig er $\mathbb{V}$ tæt i $\mathbb{T}^2$ for $\theta \in (0, 1)$ irrational jf. (7.1), hvormed $\mathbb{W} = \mathbb{T}^2$. Dermed fås (da τ er lineær, begrænset og normaliseret)

$$\begin{aligned}
\tau(T) &= \int_{\mathbb{T}^2} \tau(T) d(\mu \otimes \mu)(u, v) = \int_{\mathbb{T}^2} \tau(\alpha_{(u,v)}(T)) d(\mu \otimes \mu)(u, v) \\
&= \tau(\mathrm{E}(T)) = \tau(\mathrm{Tr}(T) \cdot \mathbf{1}) = \mathrm{Tr}(T)\tau(\mathbf{1}) = \mathrm{Tr}(T),
\end{aligned}$$

ved at benytte (5.2) samt $\int_{\mathbb{T}^2} d(\mu \otimes \mu)(u, v) = 1$ og $\mathbb{W} = \mathbb{T}^2$. □

Lemma 7.6 *Hvis $\theta, \phi \in (0, 1)$, ϕ er irrational og $\varphi : \mathcal{A}_\phi \to \mathcal{A}_\theta$ er en unital *-homomorfi, så er $\mathrm{T}(\mathcal{A}_\phi) \subseteq \mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$.*

Bevis: Lad $\mathrm{Tr}_\theta, \mathrm{Tr}_\phi$ betegne det normaliserede spor Tr for henholdsvis $\mathcal{A}_\theta$ og $\mathcal{A}_\phi$. Følgende giver, at $\mathrm{Tr}_\theta \circ \varphi$ også er et normaliseret spor på $\mathcal{A}_\phi$. Der gælder oplagt, at $\mathrm{Tr}_\theta \circ \varphi$ er et normaliseret, kontinuert og lineært funktional (og dermed begrænset), mens nedenstående viser, at sammensætningen opfylder spor-egenskaben

$$(\mathrm{Tr}_\theta \circ \varphi)(TS) = \mathrm{Tr}_\theta(\varphi(T)\varphi(S)) = \mathrm{Tr}_\theta(\varphi(S)\varphi(T)) = (\mathrm{Tr}_\theta \circ \varphi)(ST), \quad T, S \in \mathcal{A}_\theta.$$

Fra (5.5) følger nu, at $\mathrm{Tr}_\theta \circ \varphi$ er et normaliseret spor på $\mathcal{A}_\phi$. Idet ϕ er irrational fås fra entydigheden i (7.5), at $\mathrm{Tr}_\theta \circ \varphi = \mathrm{Tr}_\phi$.

Lad $z \in \mathrm{T}(\mathcal{A}_\phi)$, da findes en projektion $P \in \mathcal{A}_\phi$ og dermed $\varphi(P) \in \mathcal{A}_\theta$, så $z = \mathrm{Tr}_\phi(P) = (\mathrm{Tr}_\theta \circ \varphi)(P)$. Men $\varphi(P)$ er oplagt en projektion i $\mathcal{A}_\theta$, så $z \in \mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$, hvormed $\mathrm{T}(\mathcal{A}_\phi) \subseteq \mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$. □

Korollar 7.7 *For $\theta \in (0, 1)$ er $\{\phi \in (0, 1) : \phi$ er irrational, $\mathcal{A}_\phi \cong \mathcal{A}_\theta\}$ en højest tællelig mængde.*

Bevis: Tag et vilkårligt irrationalt tal $\phi \in (0, 1)$, så $\mathcal{A}_\theta \cong \mathcal{A}_\phi$. Da $\mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$ jf. (6.4) er tællelig er det nok at vise, at $\phi \in \mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$. Ifølge (7.6) er $\mathrm{T}(\mathcal{A}_\phi) \subseteq \mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$ og fra (6.7) fås, at $\phi \in \mathrm{T}(\mathcal{A}_\phi)$, hvilket viser det ønskede. □

Ovenstående resultat viser, at der er mange ikke-isomorfe irrationale rotations C^*-algebraer. Dette kan skærpes endnu mere ved brug af følgende

Theorem 7.8 *Hvis $\theta \in (0, 1)$ er irrational, så er $\mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta) = (\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}) \cap [0, 1]$.*

Bevis: For at vise "$\subseteq$" kræves K-teori (se evt. [7, opgave 5.8]), hvilket ligger udenfor denne opgave. Bemærk dog, at (6.4) giver, at $\mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$ er en tællelig delmændge af $[0,1]$. Den modsatte inklusion "$\supseteq$" kan bevises ved en mindre modifikation af (6.6).

For $(n+m\theta) \in (\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z}) \cap \{0,1\}$ kan man benytte de to trivielle projektioner ($\mathbf{0}$ og $\mathbf{1}$) til at vise, at $n+m\theta \in \mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$.

Antag derfor at $(n+m\theta) \in (\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z}) \cap (0,1)$. Lad $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ og $\Psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ være homeomorfien

$$\Psi(z) = e^{2\pi i(n+m\theta)} z = \rho^m z,$$

samt $P \in \mathcal{A}_\theta$ være givet ved

$$P = (U^m)^* \bar{g}(V) + f(V) + g(V)(U^m).$$

Nu fås ligesom i (6.5) at P er en projektion, hvis (og kun hvis)

(i) $((g \circ \Psi^{-1}) \cdot g)(V) = \mathbf{0}$

(ii) $(g \cdot (f + f \circ \Psi))(V) = g(V)$

(iii) $(|f|^2 + |g|^2 + |g \circ \Psi^{-1}|^2)(V) = f(V)$.

Med $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ defineret ved $f(e^{2\pi i t}) = \tilde{f}_{n+m\theta}(t)$, $g(e^{2\pi i t}) = \tilde{g}(t)$ følger det fra beviset for (6.6) at f, g opfylder $(i) - (iii)$, hvormed P er en projektion. Endelig findes analogt til (6.7) at

$$\mathrm{Tr}(P) = \int_0^1 \tilde{f}_{n+m\theta}(t)dt = n + m\theta \in \mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta).$$

□

Korollar 7.9 *Hvis $\theta, \phi \in (0,1)$ er irrationale, er $\mathcal{A}_\theta \cong \mathcal{A}_\phi$ hvis og kun hvis $\theta = \phi$ eller $\theta = 1 - \phi$.*

Bevis: Hvis $\phi = \theta$ er isomorfien oplagt, så antag $\theta = 1 - \phi$. Lad $\mathcal{A}_\phi$ være rotations C^*-algebraen genereret af U_ϕ, V_ϕ opfyldende relationen $U_\phi V_\phi = e^{2\pi i \phi} V_\phi U_\phi$. Sæt $U_0 = V_\phi$ og $V_0 = U_\phi$. Det ses nu at U_0, V_0 opfylder relationen

$$U_0 V_0 = e^{2\pi i(-\phi)} V_0 U_0 = e^{2\pi i(1-\phi)} V_0 U_0 = e^{2\pi i \theta} V_0 U_0,$$

som er den samme som relationen mellem generatorerne U, V for rotations C^*-algebraen $\mathcal{A}_\theta$. Det er nu oplagt at $\mathcal{A}_\theta \cong \mathcal{A}_\phi$, da afbildningen som sender V_ϕ ind i U_θ og U_ϕ ind i V_θ bliver en surjektiv unital *-isomorfi, jf. (7.4).

Antag omvendt $\mathcal{A}_\theta \cong \mathcal{A}_\phi$. Fra (7.6) fås $\mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta) = \mathrm{T}(\mathcal{A}_\phi)$ og dermed at $\theta \in \mathrm{T}(\mathcal{A}_\phi)$, $\phi \in \mathrm{T}(\mathcal{A}_\theta)$. Nu giver (7.8) at der eksisterer $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$, så

$$\theta = n + m\phi, \quad \phi = k + l\theta.$$

Dermed fås, at

$$\theta = n + m(k + l\theta) = (n + km) + ml\theta \Rightarrow (n + mk) = \theta(ml - 1).$$

Da θ er irrational må begge sider være 0, og dermed $n + km = 0$ og $ml = 1$, hvilket giver $m = 1$ eller $m = -1$ ($m, l \in \mathbb{Z}$). Med $m = 1$ fås $\theta = n + \phi$ og dermed $\theta = \phi$, da $\theta, \phi \in (0, 1)$. Med $m = -1$ fås $\theta = n - \phi$ og dermed $\theta = 1 - \phi$, da $\theta, \phi \in (0, 1)$. $\square$

Det bemærkes, at den oplagte "hvis"-del i ovenstående korollar også gælder for θ, φ rationale.

8 Den rationale rotations C^*-algebra

I dette afsnit behandles den rationale rotations C^*-algebra, hvor især irreducible unitale repræsentationer spiller en vigtig rolle. Hovedresultatet i afsnittet viser, hvordan netop de irreducible unitale repræsentationer kan benyttes til at finde spektret for et vilkårligt element i den rationale rotations C^*-algebra.

Definition 8.1 *Lad $\mathscr{H}$ være et Hilbertrum og $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathscr{H})$. Centralisatoren for $\mathfrak{S}$ betegnet $\mathfrak{S}'$ er defineret ved*

$$\mathfrak{S}' = \{T \in \mathcal{B}(\mathscr{H}) : TS = ST, \quad S \in \mathfrak{S}\}.$$

Lad $\mathcal{M}$ være en C^*-algebra, og lad π være en repræsentation af $\mathcal{M}$ på $\mathscr{H}$. Repræsentationen π kaldes da irreducibel, hvis $\pi(\mathcal{M})' = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$.

Lemma 8.2 *Lad $\theta = \frac{p}{q}$ være rational ($p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, q \in \mathbb{N}$) i $[0,1)$ med* $\mathrm{GCD}(p,q) = 1$,[4] *og lad U_0, V_0 være unitære elementer i $\mathcal{B}(\mathscr{H})$, hvor $\mathscr{H}$ er et (ikke trivielt) Hilbertrum. Antag U_0, V_0 opfylder*

$$U_0^q = \mathbf{1} = V_0^q, \quad \{U_0, U_0^*, V_0, V_0^*\}' = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}, \quad U_0V_0 = \rho V_0U_0,$$

for $\rho = e^{2\pi i\theta}$. Da eksisterer $W \in \mathcal{B}(\mathscr{H}, \mathbb{C}^q)$ unitær, så $WU_0W^* = \Omega$ og $WV_0W^* = \Lambda^*$, hvor $\Lambda, \Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^q)$ og for $q \geq 2$ er givet ved

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \rho & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \rho^2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & \rho^{q-1} \end{pmatrix},$$

mens de for $q = 1$ begge er $\mathbf{1}$.

Vi vil fremover kun bruge Λ og Ω i ovenstående betydning.

Bevis: Da $\mathscr{H}$ er ikke trivielt, findes $\xi \in \mathscr{H}$, så $\|\xi\| = 1$. Sæt nu

$$\eta_i = \left(\sum_{j=0}^{q-1} (\rho^i U_0)^j\right) \xi, \quad i = 0, \ldots, q-1.$$

[4] GCD står for den største fælles divisor.

Først behandles tilfældet $\theta \in (0,1)$ (og dermed $q \geq 2$). Det ses, at

$$\sum_{i=0}^{q-1} (\rho^j)^i = 0, \quad j = 1, \dots, q-1$$

ved at gange med $(1-\rho^j)$ og benytte at $\rho^q = 1$. Dermed fås

$$\sum_{i=0}^{q-1} \eta_i = \sum_{i=0}^{q-1} \left(\sum_{j=0}^{q-1} (\rho^i U_0)^j \right) \xi = \sum_{j=0}^{q-1} U_0^j \xi \sum_{i=0}^{q-1} (\rho^j)^i = U_0^0 \xi \sum_{i=0}^{q-1} (\rho^0)^i = q\xi$$

Der eksisterer derfor $i_0 \in \{0, \dots, q-1\}$, så $\eta_{i_0} \neq \mathbf{0}$. Det følger, at

$$\rho^{i_0} U_0 \eta_{i_0} = \rho^{i_0} U_0 \left(\sum_{j=0}^{q-1} (\rho^{i_0} U_0)^j \right) \xi = \eta_{i_0},$$

da $(\rho^{i_0} U_0)^0 = \mathbf{1} = (\rho^{i_0} U_0)^q$. Sæt nu

$$\zeta_1 = V_0^{i_0} \eta_{i_0}, \quad \zeta_k = V_0 \zeta_{k-1}, \quad k = 2, \dots, q.$$

Da $\eta_{i_0} \neq \mathbf{0}$, og V_0 er unitær og dermed en isometri, er $\zeta_k \neq \mathbf{0}$ for $k = 1, \dots, q$. Relationerne

$$U_0 \zeta_1 = U_0 V_0^{i_0} \eta_{i_0} = V_0^{i_0} \rho^{i_0} U_0 \eta_{i_0} = V_0^{i_0} \eta_{i_0} = \zeta_1,$$

$$U_0 \zeta_k = U_0 V_0^{k-1} \zeta_1 = \rho^{k-1} V_0^{k-1} U_0 \zeta_1 = \rho^{k-1} \zeta_k, \quad k = 2, \dots, q$$

viser, at ζ_k er egenvektor for U_0 med egenværdien ρ^{k-1} for $k = 1, \dots, q$.

Eftersom $\mathrm{GCD}(p,q) = 1$ er $1, \rho, \dots, \rho^{q-1}$ indbyrdes forskellige rødder til q'te grads polynomiet $z^q - 1$. For antag, med modstrid for øje, at $\rho^n = \rho^m$ for $n \neq m$ og $n, m = 0, \dots, q-1$, eller ækvivalent, at $1 = \rho^k = e^{2\pi i \frac{kp}{q}}$ for $k = 1, \dots, q-1$. Da må $\frac{kp}{q} \in \mathbb{Z}$, men da $k \neq 0$ og $\mathrm{GCD}(p,q) = 1$ må k være lig et helt multiplum af q, hvilket er en modstrid, da $k \leq q-1$.

Da egenvektorer svarende til forskellige egenværdier for en normal operator i $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ er ortogonale, udgør $(\zeta_k)_{k=1}^q$ et ortogonalt sæt i $\mathscr{H}$. Idet en normalisering af disse ζ_k'er ikke ændrer deres egenværdier, antages det uden tab af generalitet, at $(\zeta_k)_{k=1}^q$ er et ortonormalt sæt i $\mathscr{H}$. Definér nu $\mathscr{K} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\zeta_1, \dots, \zeta_q)$, hvormed $\mathscr{K} \cong \mathbb{C}^q$ bliver et ikke-tomt, afsluttet underrum i $\mathscr{H}$. Ifølge [8, 4.11] er $\mathscr{H} = \mathscr{K} \oplus \mathscr{K}^\perp$, og følgende viser at $\mathscr{K} = \mathscr{H}$.

Lad et vilkårligt $\xi \in \mathscr{H}$ være givet ved den entydige opsplitning

$$\xi = P\xi + Q\xi,$$

hvor P og Q er projektionerne på henholdsvis $\mathscr{K}$ og $\mathscr{K}^\perp$. Det ses, at $U_0(\mathscr{K})$, $U_0^*(\mathscr{K})$, $V_0(\mathscr{K})$ og $V_0^*(\mathscr{K})$ er indeholdt i $\mathscr{K}$, eftersom

$$U_0 \zeta_k = \rho^{k-1} \zeta_k, \quad U_0^* \zeta_k = U_0^* \overline{\rho^{k-1}} U_0 \zeta_k = \overline{\rho^{k-1}} \zeta_k, \quad k = 1, \dots, q,$$

$$V_0\zeta_q = V_0^q\zeta_1 = \mathbf{1}\zeta_1 = \zeta_1, \quad V_0\zeta_k = \zeta_{k+1}, \quad k = 1,\ldots,q-1,$$

$$V_0^*\zeta_1 = V_0^*V_0\zeta_q = \zeta_q, \quad V_0^*\zeta_k = V_0^*V_0\zeta_{k-1} = \zeta_{k-1}, \quad k = 2,\ldots,q.$$

For $\xi \in \mathscr{H}$ vil $P\xi \in \mathscr{K}$ og dermed $U_0P\xi \in \mathscr{K}$, så $PU_0P = U_0P$. Et tilsvarende argument giver

$$PU_0^*P = U_0^*P, \; PV_0P = V_0P, \; PV_0^*P = V_0^*P.$$

Benyttes desuden at $P = P^*$ (da P er en projektion) følger, at

$$U_0P = PU_0P = (PU_0^*P)^* = (U_0^*P)^* = PU_0,$$

$$U_0^*P = (PU_0)^* = (U_0P)^* = PU_0^*,$$

og tilsvarende $V_0P = PV_0$, $V_0^*P = PV_0^*$. Nu vil $P \in \{U_0, U_0^*, V_0, V_0^*\}' = \mathbb{C}\cdot\mathbf{1}$, så $P = \mathbf{1}$ eller $P = \mathbf{0}$, da P er en projektion. Men da $\mathscr{K} \neq \{\mathbf{0}\}$ bortfalder den sidste mulighed, hvormed $\mathscr{K} = \mathscr{H}$.

Definér nu $W \in \mathcal{B}(\mathscr{H}, \mathbb{C}^q)$ ved $W\zeta_k = \upsilon_k$ for $k = 1,\ldots,q$, hvor $(\upsilon_k)_{k=1}^q$ er standardbasen for $\mathbb{C}^q$. Det er oplagt at W er surjektiv, så W er unitær, hvis blot den også er normbevarende - altså hvis $\langle W\xi, W\xi\rangle = \langle\xi,\xi\rangle$, for vilkårligt $\xi \in \mathscr{H}$. Men dette ses let, da $(\zeta_k)_{k=1}^q$ er et ortonomalt sæt udspændende $\mathscr{H}$, så W er unitær og derfor er $W^*\upsilon_k = \zeta_k$ for $k = 1,\ldots,q$.

Ifølge definition af Λ og Ω er

$$\Lambda^*\upsilon_q = \upsilon_1, \quad \Lambda^*\upsilon_k = \upsilon_{k+1}, \quad k = 1,\ldots,q-1$$

$$\Omega\upsilon_k = \rho^{k-1}\upsilon_k, \quad k = 1,\ldots,q.$$

Nu følger de ønskede relationer $WU_0W^* = \Omega$, $WV_0W^* = \Lambda^*$ fra

$$WU_0W^*\upsilon_k = WU_0\zeta_k = \rho^{k-1}W\zeta_k = \rho^{k-1}\upsilon_k = \Omega\upsilon_k, \quad k = 1,\ldots,q,$$

$$WV_0W^*\upsilon_q = WV_0\zeta_q = W\zeta_1 = \upsilon_1 = \Lambda^*\upsilon_q,$$

$$WV_0W^*\upsilon_k = WV_0\zeta_k = W\zeta_{k+1} = \upsilon_{k+1} = \Lambda^*\upsilon_k, \quad k = 1,\ldots,q-1.$$

Tilfældet $\theta = 0$ (og dermed $q = 1$ thi $\mathrm{GCD}(p,q) = 1$) kan behandles tilsvarende, hvis man sætter $\mathscr{K} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\eta_0)$ og bemærker at projektionen P af $\mathscr{H}$ på $\mathscr{K}$ tilhører $\mathcal{B}(\mathscr{H}) = \{\mathbf{1}\}' = \{U_0, U_0^*, V_0, V_0^*\}' = \mathbb{C}\cdot\mathbf{1}$. □

Lemma 8.3 *Lad $\mathcal{M}$ være en C^*-algebra og π en irreducibel unital repræsentation af $\mathcal{M}$ på et Hilbertrum $\mathscr{H}$. Hvis $T \in \mathcal{M}$ kommuterer med alle elementer i $\mathcal{M}$, da vil $\pi(T) \in \mathbb{C}\cdot\mathbf{1}$.*

Bevis: Lad $R = \pi(S)$ være et vilkårligt element i $\pi(\mathcal{M})$, da vil

$$R\pi(T) = \pi(S)\pi(T) = \pi(ST) = \pi(TS) = \pi(T)R,$$

hvorfor $\pi(T) \in \pi(\mathcal{M})' = \mathbb{C}\cdot\mathbf{1}$, hvor den sidste lighed følger af, at π pr. antagelse er irreducibel. $\square$

Lemma 8.4 *Lad $\theta = \frac{p}{q}$ være rational i $[0,1)$, $\mathrm{GCD}(p,q) = 1$ og π en irreducibel unital repræsentation af $\mathcal{A}_\theta$ på et Hilbertrum $\mathscr{H}$. Da findes $u, v \in \mathbb{T}$, så $(\bar{u}\pi(U))^q = \mathbf{1}$ og $(\bar{v}\pi(V))^q = \mathbf{1}$.*

Bevis: Det bemærkes først, at U^q og V^q begge kommuterer med U, U^*, V, V^*, eksempelvis ses det, at $U^qV = \rho^q VU^q = VU^q$. Hvis $T \in \mathcal{A}_\theta$ kommuterer med U, U^*, V, V^*, vil T også kommutere med enhver endelig Laurentrække i U, V. Men eftersom $\mathcal{A}_\theta = \overline{\mathcal{A}_\theta^0}$, findes for ethvert element $S \in \mathcal{A}_\theta$ en følge $(S_n)_{n=1}^\infty$ i $\mathcal{A}_\theta^0$, så $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Nu ses det, at

$$TS = T\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} TS_n = \lim_{n\to\infty} S_nT = ST,$$

hvilket viser, at T kommuterer med alle elementer i $\mathcal{A}_\theta$, hvormed $\pi(T) \in \mathbb{C}\cdot\mathbf{1}$, jf. (8.3). Specielt fås, at

$$\pi(U^q) = w_u\mathbf{1}, \quad \pi(V^q) = w_v\mathbf{1}$$

for $w_u, w_v \in \mathbb{C}$. Det følger nu, at

$$|w_u|^2\mathbf{1} = \pi(U^q(U^q)^*) = \pi(U^q(U^*)^q) = \pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1},$$

da π er antaget unital, hvilket viser $w_u, w_v \in \mathbb{T}$. Vælges nu $u, v \in \mathbb{C}$ så $u^q = w_u$ og $v^q = w_v$, er det oplagt at $u, v \in \mathbb{T}$ og $(\bar{u}\pi(U))^q = \overline{u^q}w_u\mathbf{1} = \mathbf{1}$ samt $(\bar{v}\pi(V))^q = \overline{v^q}w_v\mathbf{1} = \mathbf{1}$. $\square$

Theorem 8.5 *Lad $\theta = \frac{p}{q}$ være rational i $[0,1)$, $\mathrm{GCD}(p,q) = 1$ og π en irreducibel unital repræsentation af $\mathcal{A}_\theta$ på et Hilbertrum $\mathscr{H}$. Da findes $u, v \in \mathbb{T}$ og $W \in \mathcal{B}(\mathscr{H}, \mathbb{C}^q)$ unitær, så*

$$W\pi(U)W^* = u\Omega, \quad W\pi(V)W^* = v\Lambda^*.$$

Bevis: Sæt $U_0 = \bar{u}\pi(U)$ og $V_0 = \bar{v}\pi(V)$, hvor $u, v \in \mathbb{T}$ er valgt ifølge (8.4), så $U_0^q = \mathbf{1} = V_0^q$. Det ses, at $U_0U_0^* = \bar{u}\pi(U)u\pi(U^*) = \pi(UU^*) = \mathbf{1}$. Helt tilsvarende vises resten af de relationer, der skal gælde for at U_0 og V_0 er unitære. Derudover gælder $U_0V_0 = \bar{u}\pi(U)\bar{v}\pi(V) = \bar{u}\bar{v}\pi(\rho VU) = \rho V_0U_0$.

Da π er irreducibel er $\pi(\mathcal{A}_\theta)' = \mathbb{C}\cdot\mathbf{1}$. Eftersom $\{U_0, U_0^*, V_0, V_0^*\} \subseteq \pi(\mathcal{A}_\theta)$ vil $\{U_0, U_0^*, V_0, V_0^*\}' \supseteq \pi(\mathcal{A}_\theta)'$. Hvis omvendt et element $T \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ kommuterer med U_0, V_0, U_0^*, V_0^*, da viser et simpelt følge-argument (jf. beviset for (8.4)), at T kommuterer med alt i $\pi(\mathcal{A}_\theta)$, da π er kontinuert. Dette viser $\{U_0, U_0^*, V_0, V_0^*\}' = \pi(\mathcal{A}_\theta)' = \mathbb{C}\cdot\mathbf{1}$, hvilket i lyset af (8.2) giver det ønskede. $\square$

Korollar 8.6 *Lad $\theta = \frac{p}{q}$ være rational i $[0,1)$, $\mathrm{GCD}(p,q) = 1$ og π en irreducibel unital repræsentation af $\mathcal{A}_\theta$ på et Hilbertrum $\mathscr{H}$. Da findes $u, v \in \mathbb{T}$ og en irreducibel unital repræsentation $\pi_{u,v}$ af $\mathcal{A}_\theta$ på $\mathbb{C}^q$, opfyldende $\pi_{u,v}(U) = u\Omega$, $\pi_{u,v}(V) = v\Lambda^*$ og*

$$\sigma(\pi(T)) = \sigma(\pi_{u,v}(T)), \quad T \in \mathcal{A}_\theta.$$

Bevis: Ifølge (8.5) findes $u, v \in \mathbb{T}$ og $W \in \mathcal{B}(\mathscr{H}, \mathbb{C}^q)$ unitær, så

$$W\pi(U)W^* = u\Omega, \quad W\pi(V)W^* = v\Lambda^*.$$

Definér nu $\pi_{u,v} : \mathcal{A}_\theta \to \mathcal{B}(\mathbb{C}^q)$ ved

$$\pi_{u,v}(T) = W\pi(T)W^*.$$

Eftersom π pr. antagelse er en *-homomorfi, og afbildningen $T \to WTW^*$ er en *-homomorfi, følger det at $\pi_{u,v}$ er en *-homomorfi. Dermed er $\pi_{u,v}$ en repræsentation af $\mathcal{A}_\theta$ på $\mathbb{C}^q$ opfyldende $\pi_{u,v}(U) = u\Omega$ og $\pi_{u,v}(V) = v\Lambda^*$. At $\pi_{u,v}$ også er irreducibel ses af følgende argument. Bemærk først, at $S \in W\pi(\mathcal{A}_\theta)W^*$ hvis og kun hvis der findes et $R_S \in \pi(\mathcal{A}_\theta)$, så $S = WR_SW^*$. Tilsvarende vil $T \in W\mathcal{B}(\mathscr{H})W^*$ hvis og kun hvis der findes et $R_T \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$, så $T = WR_TW^*$. Nu ses det, idet W er unitær, at

$$\begin{aligned}
\pi_{u,v}(\mathcal{A}_\theta)' &= (W\pi(\mathcal{A}_\theta)W^*)' \\
&= \{T \in W\mathcal{B}(\mathscr{H})W^* : TS = ST, \quad S \in W\pi(\mathcal{A}_\theta)W^*\} \\
&= W\{R_T \in \mathcal{B}(\mathscr{H}) : R_TR_S = R_SR_T, \quad R_S \in \pi(\mathcal{A}_\theta)\}W^* \\
&= W\pi(\mathcal{A}_\theta)'W^* = W(\mathbb{C} \cdot \mathbf{1})W^* = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1},
\end{aligned}$$

hvor det blev benyttet, at $W\mathcal{B}(\mathscr{H})W^*$ er en Banach algebra $(\mathcal{B}(\mathbb{C}^q))$. Det ses nu at $\pi_{u,v}$ er irreducibel, og der gælder oplagt, at $\pi_{u,v}$ er unital, da π er det. Desuden ses for vilkårligt $T \in \mathcal{A}_\theta$, at $\pi(T)$ er invertivel i $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ hvis og kun hvis $\pi_{u,v}(T)$ er invertibel i $\mathcal{B}(\mathbb{C}^q)$, hvilket viser at $\sigma(\pi(T)) = \sigma(\pi_{u,v}(T))$, og dermed afslutter beviset. □

Theorem 8.7 *Lad $\mathcal{M}$ være en unital C^*-algebra og T et element i $\mathcal{M}$. Da er T ikke invertibel hvis og kun hvis der findes et Hilbertrum $\mathscr{H}$ samt en irreducibel unital repræsentation π af $\mathcal{M}$ på $\mathscr{H}$, så $\pi(T)$ ikke er invertibel.*

Bevis: Hvis T er invertibel i $\mathcal{M}$ og π er en vilkårlig unital repræsentation af $\mathcal{M}$ på et Hilbertrum $\mathscr{H}$, da er det klart, at også $\pi(T)$ vil være invertibel i $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ med invers $\pi(T^{-1})$.

Antag omvendt, at T ikke er invertibel. Et modstridsbevis viser, at enten T^*T eller TT^* er ikke-invertibel.

Antag, at T^*T ikke er invertibel, og dermed at 0 ligger i spektret for T^*T. Ifølge [4, 4.4.4] findes en ren tilstand $\mathfrak{r}$ på $\mathcal{M}$, så $\mathfrak{r}(T^*T) = 0$. Ifølge [5, 10.2.3] giver GNS-repræsentationen en irreducibel unital repræsentation $\pi_{\mathfrak{r}}$ på et Hilbertrum $\mathscr{H}_{\mathfrak{r}}$ samt en enhedsvektor $\xi_{\mathfrak{r}} \in \mathscr{H}_{\mathfrak{r}}$, så

$$\langle \pi_{\mathfrak{r}}(W)\xi_{\mathfrak{r}}, \xi_{\mathfrak{r}} \rangle = \mathfrak{r}(W), \quad W \in \mathcal{M}.$$

Da er specielt

$$0 = \mathfrak{r}(T^*T) = \langle \pi_{\mathfrak{r}}(T^*T)\xi_{\mathfrak{r}}, \xi_{\mathfrak{r}} \rangle = \langle \pi_{\mathfrak{r}}(T)\xi_{\mathfrak{r}}, \pi_{\mathfrak{r}}(T)\xi_{\mathfrak{r}} \rangle = \|\pi_{\mathfrak{r}}(T)\xi_{\mathfrak{r}}\|^2,$$

så $\pi_{\mathfrak{r}}(T)\xi_{\mathfrak{r}} = \mathbf{0}$. Men eftersom $\xi_{\mathfrak{r}}$ har norm 1, er kernen for $\pi_{\mathfrak{r}}(T)$ forskellig fra $\{\mathbf{0}\}$, hvorfor denne ikke er invertibel.

Hvis omvendt TT^* ikke er invertibel vises tilsvarende, at $\pi_{\mathfrak{r}}(T)^*$ og dermed $\pi_{\mathfrak{r}}(T)$ ikke er invertibel, hvilket afslutter beviset. □

Theorem 8.8 *Hvis $\mathcal{M}$ er en unital C^*-algebra og T et element i $\mathcal{M}$, da kan spektret for T findes som*

$$\sigma(T) = \bigcup_{\pi \text{ irr. unital repr. af } \mathcal{M}} \sigma(\pi(T)).$$

Bevis: Eftersom π specielt er en *-homomorfi er $\sigma(T) \supseteq \sigma(\pi(T))$, hvilket viser "$\supseteq$". Antag $\lambda \in \sigma(T)$, eller ækvivalent at $T - \lambda\mathbf{1}$ ikke er invertibel. Da findes ifølge (8.7) en irreducibel unital repræsentation π af $\mathcal{M}$ på et Hilbertrum $\mathscr{H}$, så $\pi(T - \lambda\mathbf{1})$ ikke er invertibel, eller ækvivalent $\lambda \in \sigma(\pi(T))$, hvilket viser den manglende inklusion. □

Fra (8.8) og (8.6) ses (for $\theta = \frac{p}{q}$ rational i $[0, 1)$ og $\mathrm{GCD}(p, q) = 1$), at spektret for et element $T \in \mathcal{A}_\theta$ kan findes som

$$\sigma(T) = \bigcup_{\substack{u, v \in \mathbb{T} \\ \pi_{u,v} \text{ irr. unital repr. af } \mathcal{M} \\ \pi_{u,v}(U) = u\Omega, \pi_{u,v}(V) = v\Lambda^*}} \sigma(\pi_{u,v}(T)).$$

Vi vil nu simplicifere denne karakterisering ved at vise, at kravet "irr. unital" kan fjernes fra ovenstående.

Lemma 8.9 *Hvis $\theta = \frac{p}{q}$ er rational i $[0, 1)$ og $\mathrm{GCD}(p, q) = 1$, da gælder for $\Lambda^*, \Omega \in M_q(\mathbb{C})$ givet tidligere og $\rho = e^{2\pi i\theta}$, at*

(i) Λ^* *og* Ω *er unitære*

(ii) $\Omega\Lambda^* = \rho\Lambda^*\Omega$

(iii) $\{\Lambda^*, \Omega\}' = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$.

Bevis: Virkningen af Λ^* og Ω på standardbasen $(\upsilon_k)_{k=1}^q$ i $\mathbb{C}^q$ er

$$\Lambda^* \upsilon_q = \upsilon_1, \quad \Lambda^* \upsilon_k = \upsilon_{k+1}, \quad k = 1, \dots, q-1$$

$$\Omega \upsilon_k = \rho^{k-1} \upsilon_k, \quad k = 1, \dots, q,$$

så det ses let, at Λ^* og Ω begge er surjektive, normbevarende (husk at $\rho \in \mathbb{T}$) og dermed unitære, hvoraf (i). Derudover ses det, at sammensætningen opfylder relationen

$$\Omega \Lambda^* = \rho \Lambda^* \Omega,$$

ved at se på standardbasen (husk at $\rho^q = 1$), hvilket viser (ii).

Det er oplagt, at $\mathbb{C} \cdot \mathbf{1} \subseteq \{\Lambda, \Omega\}'$. Den anden inklusion følger ved at se på en vilkårlig operator $T \in M_q(\mathbb{C}^q)$. Hvis $T \in \{\Lambda^*, \Omega\}'$, da gælder

$$T\Lambda^* = \Lambda^* T, \quad T\Omega = \Omega T$$

eller ækvivalent

$$T = \Lambda T \Lambda^*, \quad T = \Omega^* T \Omega.$$

Virkningen af Λ^* og Ω er allerede opskrevet, og tilsvarende gælder, at

$$\upsilon_q^T \Lambda = \upsilon_1^T, \quad \upsilon_k^T \Lambda = \upsilon_{k+1}^T, \quad k = 1, \dots, q-1$$

$$\upsilon_k^T \Omega^* = \overline{\rho^{k-1}} \upsilon_k^T, \quad k = 1, \dots, q,$$

hvor ^{T} betyder transponering af den pågældende vektor. Hvis således T kommuterer med både Λ^* og Ω, da opfylder komponenterne for T

$$T_{n,m} = \upsilon_n^T T \upsilon_m = \upsilon_n^T \Omega^* T \Omega \upsilon_m = \overline{\rho^{n-1}} \upsilon_n^T T \rho^{m-1} \upsilon_m = \rho^{m-n} T_{n,m},$$

$$T_{n,m} = \upsilon_n^T T \upsilon_m = \upsilon_n^T \Lambda T \Lambda^* \upsilon_m = \upsilon_{n+1 \bmod q}^T T \upsilon_{m+1 \bmod q} = T_{n+1 \bmod q, m+1 \bmod q},$$

for alle $n, m = 1, \dots, q$. Nu ses det af det øverste udtryk, at T må være diagonal, og dernæst af det nederste udtryk, at alle diagonalelementerne må være ens, hvorfor $T \in \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$. $\square$

Lemma 8.10 *Hvis $\theta = \frac{p}{q}$ er rational i $[0,1)$, $\mathrm{GCD}(p,q) = 1$ og $u, v \in \mathbb{T}$, da findes en entydig repræsentation $\pi_{u,v}$ af $\mathcal{A}_\theta$ på $\mathbb{C}^q$ opfyldende*

$$\pi_{u,v}(U) = u\Omega, \quad \pi_{u,v}(V) = v\Lambda^*.$$

Denne repræsentation er irreducibel og unital.

Bevis: For $u, v \in \mathbb{T}$ ses det af (8.9), at $u\Omega, v\Lambda^*$ er unitære operatorer i $\mathcal{B}(\mathbb{C}^q)$ opfyldende relationen

$$(u\Omega)(v\Lambda^*) = \rho(v\Lambda^*)(u\Omega).$$

Ifølge (3.3) findes en entydig *-homomorfi

$$\pi_{u,v} : \mathcal{A}_\theta \to \mathcal{C}^*(u\Omega, v\Lambda^*) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{C}^q),$$

som er unital og opfylder $\pi_{u,v}(U) = u\Omega$, $\pi_{u,v}(V) = v\Lambda^*$, hvilket netop er en unital repræsentation af $\mathcal{A}_\theta$ på $\mathbb{C}^q$. Der gælder oplagt, at $\pi_{u,v}(\mathcal{A}_\theta) \supseteq \{\Omega, \Lambda\}$, hvilket giver $\pi_{u,v}(\mathcal{A}_\theta)' \subseteq \{\Omega, \Lambda\}' = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$. Dermed fås, at $\pi_{u,v}$ er irreducibel, eftersom $\mathbb{C} \cdot \mathbf{1} \subseteq \pi_{u,v}(\mathcal{A}_\theta)'$. $\square$

Bemærkning Ovenstående resultater giver en simpel karakteristik af spektret for elementer i $\mathcal{A}_\theta$, hvis $\theta = \frac{p}{q}$ er rational i $[0, 1)$ og $\mathrm{GCD}(p, q) = 1$. Lad $T \in \mathcal{A}_\theta$, $u, v \in \mathbb{T}$ være vilkårlige og $\pi_{u,v} : \mathcal{A}_\theta \to M_q(\mathbb{C})$ være den entydige repræsentation fundet i (8.10) opfyldende $\pi_{u,v}(U) = u\Omega$ og $\pi_{u,v}(V) = v\Lambda^*$. Da følger det af (8.8) og (8.6), at

$$\sigma(T) = \bigcup_{u,v \in \mathbb{T}} \sigma(\pi_{u,v}(T)).$$

9 Harper operatoren

Som en anvendelse af teorien for den rationale rotations C^*-algebra, introduceres Harper operatoren, og dens fysiske relevans nævnes kort. Spektret for Harper operatoren findes analytisk i tilfældet $\theta = 0$ og $\theta = \frac{1}{3}$. Ved hjælp af numeriske løsningsmetoder bestemmes spektret for en hel række rationale værdier af θ og præsenteres slutteligt grafisk i form af Hofstadters sommerfugl.

Betragt det fysiske system bestående af en elektron i et to-dimensionalt kvadratisk krystal, hvor atomkernerne i krystallen har indbyrdes afstand a, og hvor hele systemet er påvirket af et uniformt magnetfelt H, vinkelret på planen. Det er ønskeligt at finde egenværdierne hørende til den tids-uafhængige Schrödinger ligning for dette system.

Lad $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ betegne den kanoniske ortonormale basis på det velkendte Hilbertrum $l_2(\mathbb{Z}) = L_2(\mathbb{Z}, \mathbb{B}(\mathbb{Z}), \nu)$, hvor ν er tællemålet. Definér operatorerne $U_0, V_0 \in \mathcal{B}(l_2(\mathbb{Z}))$ ved

$$U_0\xi_n = \xi_{n-1}, \quad V_0\xi_n = \rho^n\xi_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

hvor $\rho = e^{2\pi i\theta}$ og $\theta \in [0,1)$. Det kan vises, at U_0, V_0 er unitære operatorer opfyldende $U_0V_0 = \rho V_0U_0$. Operatoren $h_{\theta,\phi}$, givet ved

$$h_{\theta,\phi} = U_0 + U_0^* + e^{2\pi i\phi}V_0 + e^{-2\pi i\phi}V_0^*, \quad \phi \in [0,1),$$

opfylder

$$h_{\theta,\phi}\xi_n = \xi_{n+1} + \xi_{n-1} + 2\cos 2\pi(\phi + n\theta).$$

Ifølge [3] kan det vises, at egenværdierne (i en bestemt energienhed) hørende til operatoren $h_{\theta,\phi}$, netop er egenværdierne hørende til den tids-uafhængige Schrödinger ligning for det ovenstående fysiske system, hvor

$$\theta = \frac{a^2eH}{hc},$$

og ϕ (relateret til elektronens bølgefunktion i den ene koordinatretning) er fastlagt. Det er primært af interesse, at finde egenværdierne uden at se på specifikke ϕ, hvorfor vi kun vil beskæftige os med $\bigcup_{\phi\in[0,1)} \sigma(h_{\theta,\phi})$. Ifølge [1, 2.1] gælder for vilkårligt $\theta \in \mathbb{R}$, at

$$\bigcup_{\phi\in[0,1)} \sigma(h_{\theta,\phi}) = \sigma(H_\theta),^5$$

[5] Rotations C^*-algebraen $\mathcal{A}_\theta$ er kun blevet defineret for $\theta \in [0,1)$, men det er oplagt, at man kan udvidde definitionen til $\theta \in \mathbb{R}$.

hvor

$$H_\theta = U + U^* + V + V^*,$$

er Harper operatoren (U, V er generatorerne for $\mathcal{A}_\theta$).

Da θ er direkte proportional med magnetfeltet, og derfor eksperimentielt kan varieres kontinuert, tillader den fysiske model både irrationale og rationale værdier af θ. Det er ikke umiddelbart muligt at finde $\sigma(H_\theta)$ i det irrationale tilfælde, hvorfor vi i det følgende antager, at $\theta = \frac{p}{q}$ er rational med $\mathrm{GCD}(p,q) = 1$.

Fra den afsluttende bemærkning i afsnit 8 giver det mening at definere

$$H_{\theta,u,v} = \pi_{u,\bar{v}}(H_\theta)$$

for $u, v \in \mathbb{T}$, hvormed spektret af H_θ kan skrives som

$$\sigma(H_\theta) = \bigcup_{u,v\in\mathbb{T}} \sigma(\pi_{u,v}(H_\theta)) = \bigcup_{u,v\in\mathbb{T}} \sigma(\pi_{u,\bar{v}}(H_\theta)) = \bigcup_{u,v\in\mathbb{T}} \sigma(H_{\theta,u,v}).$$

Idet $\pi_{u,\bar{v}}(H_\theta) = u\Omega + (u\Omega)^* + \bar{v}\Lambda^* + (\bar{v}\Lambda^*)^* = u\Omega + (u\Omega)^* + (v\Lambda)^* + v\Lambda$, er

$$H_{\theta,u,v} = \begin{pmatrix} a_0 & v & 0 & \cdots & 0 & \bar{v} \\ \bar{v} & a_1 & v & \ddots & & 0 \\ 0 & \bar{v} & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & v & 0 \\ 0 & & \ddots & \bar{v} & a_{q-2} & v \\ v & 0 & \cdots & 0 & \bar{v} & a_{q-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} a_n = u\rho^n + \overline{u\rho^n} \\ n = 0, \ldots, q-1 \end{matrix}.$$

Idet $H_\theta = H_\theta^*$ fås, da $\|H_\theta\| \leq \|U\| + \|U^*\| + \|V\| + \|V^*\| = 4$, at egenværdierne for H_θ, og dermed også for $H_{\theta,u,v}$, ligger i intervallet $[-4, 4]$. Følgende udregning viser, at for $\theta = 0$ er spektret for Harper operatoren netop intervallet $[-4, 4]$. Ifølge definitionen af Λ, Ω er $H_{0,u,v} = (u + \bar{u} + v + \bar{v}) \cdot \mathbf{1}$, hvorfor

$$\sigma(H_{0,u,v}) = u + \bar{u} + v + \bar{v} = 2\cos(\phi_1) + 2\cos(\phi_2),$$

for $u = e^{i\phi_1}$, $v = e^{i\phi_2}$ og $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$. Dette viser, at $\sigma(H_0) = [-4, 4]$. For θ rational i $(0, 1)$ er det lidt mere omstændigt at finde spektret, og vi får brug for følgende

Theorem 9.1 *Lad $\theta = \frac{p}{q}$ være rational i $(0,1)$, $\mathrm{GCD}(p,q) = 1$, $u, v \in \mathbb{T}$ og $H_{\theta,u,v}$ givet som ovenfor. Da gælder for $\lambda \in \mathbb{C}$, at*

$$\begin{aligned} p(\theta, u, v, \lambda) &= \mathrm{Det}(\lambda\mathbf{1} - H_{\theta,u,v}) = \sum_{i=0}^{q} c_i(\theta, u, v)\lambda^i, \\ c_0(\theta, u, v) &= c(\theta) - (u^q + u^{-q} + v^q + v^{-q}), \\ c_i(\theta, u, v) &= c_i(\theta), \quad i = 1, \ldots, q-1, \\ c_q(\theta, u, v) &= 1. \end{aligned}$$

Desuden har $p(\theta, u, v, \lambda)$ altid q reelle rødder (med hensyn til λ).[6]

Bevis: Eftersom $\theta = \frac{p}{q} \in (0,1)$ og $GCD(p,q) = 1$ følger det at $q \geq 2$. Udtrykket for $p(\theta, u, v, \lambda)$ er givet ved

$$p(\theta,u,v,\lambda) = \begin{vmatrix} e_0 & -v & 0 & \cdots & 0 & -\bar{v} \\ -\bar{v} & e_1 & -v & \ddots & & 0 \\ 0 & -\bar{v} & e_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -v & 0 \\ 0 & & \ddots & -\bar{v} & e_{q-2} & -v \\ -v & 0 & \cdots & 0 & -\bar{v} & e_{q-1} \end{vmatrix},$$

hvor $e_n = \lambda - (u\rho^n + \overline{u\rho^n})$ for $n = 0, \ldots, q$. Definér

$$\Delta(0, q-1) = \begin{vmatrix} e_0 & -v & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{v} & e_1 & -v & \ddots & \vdots \\ 0 & -\bar{v} & e_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -v \\ 0 & \cdots & 0 & -\bar{v} & e_{q-1} \end{vmatrix},$$

idet afhængigheden af λ, u og v i $\Delta(0, q-1)$ er underforståaet.[7]

Nu ønskes $\Delta(0, q-1)$ udtrykt rekursivt ved hjælp af mindre determinanter. Ved at opløse $\Delta(0, q-1)$ omkring e_0 fås $(-1)^{1+1}e_0\Delta(1, q-1)$, idet potensen i $(-1)^{1+1}$ er summen af rækkenummeret og søjlenummeret for e_0. Opløses $\Delta(0, q-1)$ omkring $-v$ (stadig i øverste række), og efterfølgende den fremkommende determinant omkring $-\bar{v}$ i første søjle, findes et rekursivt udtrykt for $\Delta(0, q-1)$ gyldig for $q \geq 3$

$$\begin{aligned} \Delta(0, q-1) &= (-1)^{1+1}e_0\Delta(1, q-1) + (-1)^{1+2}(-v)(-1)^{1+1}(-\bar{v})\Delta(2, q-1) \\ &= e_0\Delta(1, q-1) - \Delta(2, q-1). \end{aligned}$$

Eftersom ovenstående udtryk gælder for alle $q \geq 3$, kan vi udskifte q med $q - i$ for $i = 0, \ldots, q-3$ og se på $\Delta(0, q-i-1)$. Ved efterfølgende at lave en omindeksering, af $e_0, \ldots, e_{(q-i)-1}$ til $e_i, \ldots, e_{q-1}$ fås

$$\Delta(i, q-1) = e_i\Delta(i+1, q-1) - \Delta(i+2, q-1).$$

[6]Sædvanligvis findes egenværdier λ for $H_{\theta,u,v}$ ved at løse $\mathrm{Det}(H_{\theta,u,v} - \lambda\mathbf{1}) = 0$, men $p(\theta, u, v, \lambda) = 0$ giver samme løsninger og er pænere at arbejde med.

[7]Tallene $m \leq n$ i $\Delta(m, n)$ indikerer hvilke index diagonalelementerne spænder over, hvorfor størrelsen af matriceen der tages determinant af er $n - m + 1$.

Tilsvarende fremgangsmåde anvendt på $p(\theta,u,v,\lambda)$ for $q \geq 3$ giver

$$\begin{aligned} p(\theta,u,v,\lambda) &= (-1)^{1+1} e_0 \Delta(1,q-1) \\ &+ (-1)^{1+2}(-v)\left((-1)^{1+1}(-\bar{v})\Delta(2,q-1) + (-1)^{q-1+1}(-v)^{q-1}\right) \\ &+ (-1)^{1+q}(-\bar{v})\left((-1)^{1+1}(-\bar{v})^{q-1} + (-1)^{q-1+1}(-v)\Delta(1,q-2)\right) \\ &= \Delta(0,q-1) - \Delta(1,q-2) - (v^q + v^{-q}), \end{aligned}$$

hvor leddene uden en determinant er fremkommet, idet determinanten var på øvre eller nedre triangulær form, og hvor den sidste reduktion følger af det rekursive udtryk for $\Delta(0,q-1)$.

Et rekursivt udtryk for $\Delta(0,q-1)$ på matrixform, gyldig for $q \geq 3$, findes ved at observere følgende

$$\Delta(0,q-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta(0,q-1) \\ \Delta(1,q-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta(i,q-1) \\ \Delta(i+1,q-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta(i+1,q-1) \\ \Delta(i+2,q-1) \end{pmatrix}, \quad i = 0,\ldots,q-3$$

$$\begin{pmatrix} \Delta(q-2,q-1) \\ \Delta(q-1,q-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{q-2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{q-1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Det midterste følger fra det rekursive udtryk for $\Delta(i,q-1)$ udledt tidligere, mens de andre blot er simpele omskrivninger. En sammensætning af ovenstående giver

$$\Delta(0,q-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \prod_{n=0}^{q-1} \begin{pmatrix} e_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Idet det rekursive udtryk for $\Delta(0,q-1)$ kun er gyldigt for $q \geq 3$, vil ovenstående formelt kun gælde for $q \geq 3$. Det er dog let at se, at udtrykket også gælder for $q = 2$. Et omindekseringsargument viser, at

$$\Delta(1,q-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \prod_{n=1}^{q-2} \begin{pmatrix} e_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fra

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_{q-1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

følger, at

$$\Delta(1,q-2) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \prod_{n=0}^{q-1} \begin{pmatrix} e_n & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lad M betegne 2×2 matricen $\prod_{n=0}^{q-1}\begin{pmatrix} e_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Det velkendte spor τ på $M_2(\mathbb{C})$ er summen af diagonalelementerne, så

$$\tau(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sporet af M betegnes $r(\theta, u, \lambda)$. Det ses nu, at

$$r(\theta, u, \lambda) = \tau(M) = \Delta(0, q-1) - \Delta(1, q-2).$$

Indsættes dette i udtrykket for $p(\theta, u, v, \lambda)$ fås

$$p(\theta, u, v, \lambda) = r(\theta, u, \lambda) - (v^q + v^{-q}).$$

Fra udtrykket $e_n = \lambda - (u\rho^n + \overline{u\rho^n})$ for $n = 0, \ldots, q$ følger, at $e_q = e_0$ idet $\rho^q = 1$, og dermed, at en ændring af u til $u\rho$ ændrer e_n til $e_{n+1 \bmod q}$ for $n = 0, \ldots, q-1$. Udnyttes denne cykliske egenskab samt spor-egenskaben ved τ på $M_2(\mathbb{C})$, følger

$$r(\theta, u\rho, \lambda) = \tau\left[\prod_{n=0}^{q-1}\begin{pmatrix} e_{n+1 \bmod q} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \tau\left[\prod_{n=0}^{q-1}\begin{pmatrix} e_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = r(\theta, u, \lambda).$$

Ved et passende antal anvendelser af ovenstående udtryk fås, at

$$r(\theta, u, \lambda) = r(\theta, u\rho^m, \lambda), \quad m = 1, \ldots, q.$$

Eftersom M er et produkt af q matricer, der hver indeholder 1 indgang som afhænger af u, $\bar{u}$ og λ, er $r(\theta, u, \lambda)$ højest et q'te grads polynomium med hensyn til disse variable. Dermed er

$$r(\theta, u, \lambda) = \sum_{j=-q}^{q} r_j(\theta, \lambda) u^j,$$

hvor $r_j(\theta, \lambda)$ højest er et q'te grads polynomium i λ. Ved at benytte

$$\sum_{i=1}^{q} (\rho^j)^i = 0, \quad j = -(q-1), \ldots, -1, 1, \ldots, q-1$$

følger det, at

$$\begin{aligned} q \cdot r(\theta, u, \lambda) &= \sum_{i=1}^{q} r(\theta, u\rho^i, \lambda) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=-q}^{q} r_j(\theta, \lambda)(u\rho^i)^j \\ &= \sum_{j=-q}^{q} r_j(\theta, \lambda) u^j \sum_{i=1}^{q} (\rho^j)^i = \sum_{j=-q,0,q} r_j(\theta, \lambda) u^j \sum_{i=1}^{q} (\rho^j)^i \\ &= q \sum_{j=-q,0,q} r_j(\theta, \lambda) u^j. \end{aligned}$$

Dermed følger, at $r(\theta, u, \lambda)$ må være på formen

$$r(\theta, u, \lambda) = r_{-q}(\theta, \lambda)u^{-q} + r_0(\theta, \lambda) + r_q(\theta, \lambda)u^q.$$

Det ses fra definitionen af $r(\theta, u, \lambda)$, at denne altid vil indeholde leddet $\prod_{n=0}^{q-1} e_n$ med koefficient 1. Udseendet af $e_n = \lambda - (u\rho^n + \overline{u\rho^n})$ giver, at $\prod_{n=0}^{q-1} e_n$ er det eneste led i $r(\theta, u, \lambda)$, hvor u^q og u^{-q} kan fremkomme. Ved at gange $-u$ fra e_0 med $-u\rho$ fra e_1 med ... med $-u\rho^{q-1}$ fra e_{q-1} findes koefficienten for u^q som

$$\prod_{n=0}^{q-1} -u\rho^n = r_q(\theta, \lambda)u^q,$$

og dermed (idet $q + p(q-1)$ er ulige for $\mathrm{GCD}(p, q) = 1$), at

$$r_q(\theta, \lambda) = \prod_{n=0}^{q-1} -\rho^n = (-1)^q \rho^{\frac{q(q-1)}{2}} = (-1)^q e^{\pi i p(q-1)} = (-1)^{q+p(q-1)} = -1.$$

Et tilsvarende argument giver $r_{-q}(\theta, \lambda) = \prod_{n=0}^{q-1} -(\overline{\rho^n}) = -1$. Dermed er

$$p(\theta, u, v, \lambda) = r_0(\theta, \lambda) - (u^q + u^{-q} + v^q + v^{-q}).$$

Fra definitionen af $r(\theta, u, \lambda)$ ses, at $r_0(\theta, \lambda)$ specielt indeholder ledet λ^q med koefficienten 1, hvilket viser det postulerede udseende af $p(\theta, u, v, \lambda)$. At rødderne af dette q'te grads polynomium desuden er reelle følger af, at $H_{\theta,u,v}$ er en selvadjungeret matrix. $\square$

Eksempel Ved brug af (9.1) er det nu nemt at finde $\sigma(H_\theta)$ for fast $\theta \in (0, 1)$ rational, hvilket nu gøres for $\theta = \frac{1}{3}$. På denne måde vil det fremgå, hvordan vores algoritme til at finde Hofstadters sommerfugl er lavet. Først findes $H_{\frac{1}{3},u,v}$ og $p(\frac{1}{3}, u, v, \lambda)$, hvor $u, v \in \mathbb{T}$ skrives som $u = e^{i\phi_1}$, $v = e^{i\phi_2}$, for $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}$. Dermed er

$$a_n = u\rho^n + \overline{u\rho^n} = 2\cos(\phi_1 + 2\pi\frac{1}{3}n)$$

og

$$c_0(\frac{1}{3}, u, v) = c(\frac{1}{3}) - 2(\cos(q\phi_1) + \cos(q\phi_2)).$$

Nu findes

$$H_{\frac{1}{3},u,v} = \begin{pmatrix} 2\cos(\phi_1) & v & \bar{v} \\ \bar{v} & 2\cos(\phi_1 + 2\pi\frac{1}{3}) & v \\ v & \bar{v} & 2\cos(\phi_1 + 4\pi\frac{1}{3}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} p(\frac{1}{3}, 1, 1, \lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = -4 - 6\lambda + \lambda^3 \\ &= c_0(\frac{1}{3}, 1, 1) + c_1(\frac{1}{3})\lambda + c_2(\frac{1}{3})\lambda^2 + c_3(\frac{1}{3})\lambda^3, \end{aligned}$$

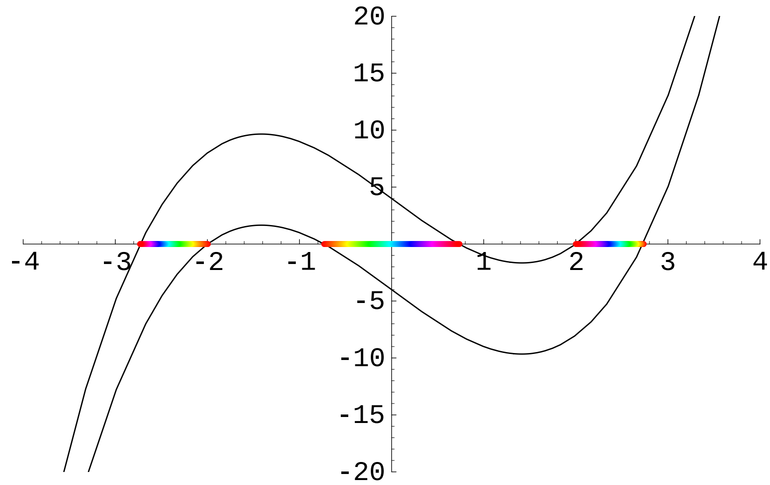
hvilket specielt giver $c(\frac{1}{3}) = c_0(\frac{1}{3}, 1, 1) + 4 = 0$. Det følger nu, at

$$p(\frac{1}{3}, u, v, \lambda) = -2(\cos(3\phi_1) + \cos(3\phi_2)) - 6\lambda + \lambda^3.$$

Spektret for $H_{\frac{1}{3}}$ findes ved at løse $p(\frac{1}{3}, u, v, \lambda) = 0$ for alle $u, v \in \mathbb{T}$. Bemærk, at $p(\frac{1}{3}, u, v, \lambda)$ er kontinuert med hensyn til λ, u og v samt, at en ændring af u, v kun forårsager en lodret forskydning af polynomiet $p(\frac{1}{3}, u, v, \lambda)$. Ved at benytte dette, er det således nok at finde de to ekstremumspolynomier med hensyn til λ. Det ene af disse polynomier fremkommer for $u = v = 1$, det vil sige $p(\frac{1}{3}, 1, 1, \lambda)$, som derved får det mindst mulige konstantled. Det andet polynomium fås ved at forskyde $p(\frac{1}{3}, 1, 1, \lambda)$ 8 op, hvilket giver det størst mulige konstantled. Dermed er

$$p_{\min} = p(\frac{1}{3}, 1, 1, \lambda), \quad p_{\max} = p_{\min} + 8,$$

som er skitserede på figur 2. Ved at forskyde det ene polynomium mod det

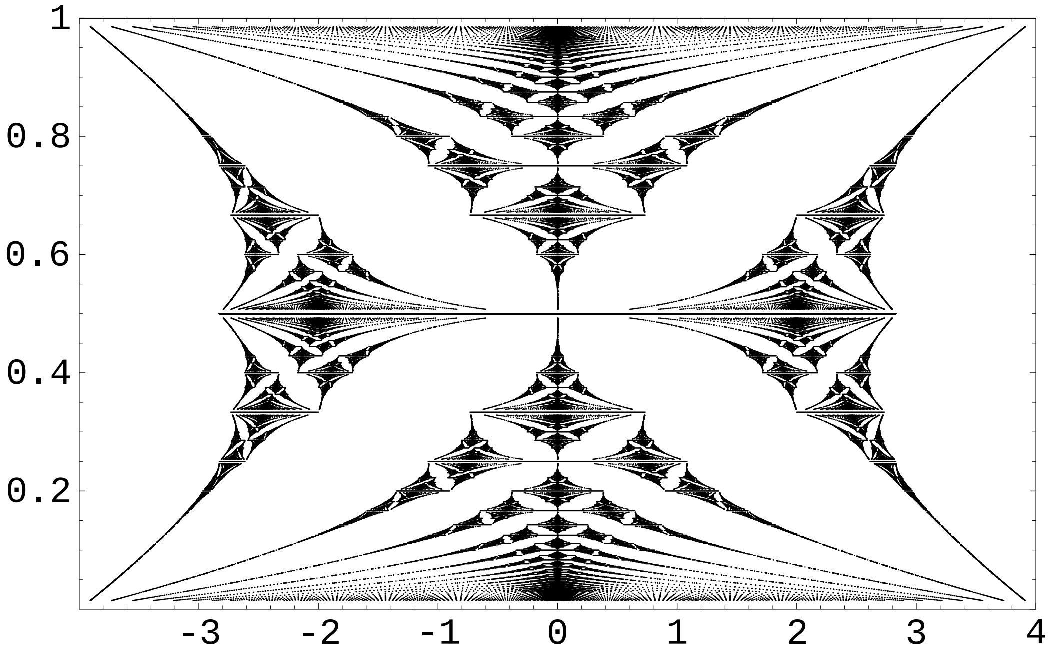


Figur 2: De to ekstremums polynomier, hvor rødderne for disse, og 159 mellemlæggende polynomier, er indtegnet.

andet og se på rødderne, fremkommer det ønskede spektrum. Idet de to polynomier har henholdsvis $\{-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}, 2\}$ og $\{-2, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$ som rødder, bliver spektret for Harper operatoren

$$\sigma(H_{\frac{1}{3}}) = [-1-\sqrt{3}, -2] \cup [1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}] \cup [2, 1+\sqrt{3}].$$

Vi har numerisk fundet spektret af H_θ for rationale θ i $(0, 1)$ med q op til 68. Resultatet ses på figur 3. Man ser en fraktal sommerfuglstuktur, som efter ophavsmanden kaldes “Hofstadters sommerfugl”.



Figur 3: Billedet af “Hofstadters sommerfugl”.

En række egenskaber karakteriserer spektret af H_θ for rational θ, og dermed sommerfuglstrukturen,

$$\sigma(H_\theta) \subseteq [-4,4], \quad \sigma(H_\theta) = \sigma(H_{\theta+n}), \quad \sigma(H_\theta) = -\sigma(H_\theta),$$

$$\sigma(H_\theta) = \sigma(H_{-\theta}), \quad \sigma(H_{\frac{n}{2}+\theta}) = \sigma(H_{-\frac{n}{2}-\theta+n}) = \sigma(H_{\frac{n}{2}-\theta})$$

for $n \in \mathbb{Z}$. Den første egenskab fås idet $\|H_\theta\| \leq 4$, og den efterfølgende fra $\rho = e^{2\pi i\theta} = e^{2\pi i(\theta+n)}$ for $n \in \mathbb{Z}$. De næste to fås af $-H_{\theta,u,v} = H_{\theta,-u,-v}$ og $H_{-\theta,u,v} = H_{\theta,\bar{u},v}$ sammen med $\sigma(H_\theta) = \bigcup_{u,v\in\mathbb{T}} \sigma(H_{\theta,u,v})$. Endelig følger den sidste egenskab fra de to foregående.

For $\theta = \frac{p}{q}$ rational i $[0,1)$ med $\mathrm{GCD}(p,q) = 1$ kan det yderligere vises, at spektret af H_θ for q ulige og lige består af henholdsvis q og $q-1$ intervaller. Disse intervaller udgør disjunkte delmængder af $[-4,4]$ og har et strengt positivt Lebesguemål. Resultatet ses af antallet af rødder for polynomiet $p(\theta,u,v,\lambda)$, samt konstruktionen af intervallerne ved forskydning af polynomier, jf. [1].

For θ irrational i $(0,1)$ er det endnu ikke lykkedes at give en fuldstændig karakterestik af spektret for Harper operatoren. Det formodes, at spektret er en Cantor mængde med Lebesguemål 0, hvilket sandsynliggøres i [3].

I det fysiske system kan magnetfeltet, og dermed θ, ændres kontinuert. Man vil derfor forvente, at spektret for Harper operatoren ændres "kontinuert" med θ. Men for enhver rational θ kan man finde rationale tal vilkårligt tæt på θ med vilkårlig stor nævner, og dermed vilkårligt mange disjunkte intervaller i det tilhørende energispektrum. Denne fluktuation i antallet af intervaller virker ufysisk, og dette problem forsøges forklaret i [3].

Løsningen findes som usikkerheden i størrelsen af det påtrykte magnetfelt, og dermed θ. Idet vi formoder spektret for Harper operatoren kendt, for enhver værdi af θ, giver det mening at snakke om Hofstadters sommerfugl for alle værdier af θ. I praksis kan usikkerheden af θ nu inkluderes ved at strække alle punkter lodret. I det fremkomne udtværede billede af Hofstadters sommerfugl, virker fluktuationen i antallet af energiintervaller fysisk rimelig.

Den matematiske model, der beskriver spektret af Harper operatoren, viser en tydelig forskel på spektret for de irrationale og rationale θ - se blot på Lebesguemålet af spektret. Det er ikke muligt, at sige om denne forskel er at genfinde i naturen, grundet uundgålige måleusikkerheder. Men hvis modellen i sandhed afspejler noget fra den virkelige verden, ser man her et overraskende fænomen:

Naturen skelner mellem rationale og irrationale tal

- en tiltalende tanke for en matematiker.

Litteratur

[1] Florin-Petre Boca, *Rotation C^*-algebras and almost Mathieu operators*, vol. 1, The Theta Foundation, Bucharest, 2001.

[2] Uffe Haagerup, *Ugeseddel 9 F03*, udleveret i forbindelse med Analyse II kurset 2003.

[3] Douglas R. Hofstadter, *Energy levels and wave functions of Block electrons in rational and irrational fields*, Physical Review B **14** (1976), no. 6, 2239–2249.

[4] Richard V. Kadison and John R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras: Elementary theory*, vol. I, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983.

[5] ______, *Fundamentals of the theory of operator algebras: Advanced theory*, vol. II, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1986.

[6] James R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[7] M. Rørdam, F. Larsen, and N. J. Laustsen, *An introduction to K-theory for C^*-algebras*, London Mathematical Society — Student Texts, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[8] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[9] Ke He Zhu, *An introduction to operator algebras*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.

A Appendix

Dette afsnit er skrevet af projektets vejleder Mikael Rørdam, hvorfor notationen her er anderledes. Det introducerer integralet af kontinuerte funktioner med værdier i en vilkårlig C^*-algebra.

Lemma A.1 *Lad T være et kompakt metrisk rum og lad $\varepsilon > 0$. Da findes en klassedeling $T_1, \dots, T_n$ af T således, at hver af mængderne T_j er Borelmængder af diameter højst ε.*

Bevis: Rummet T er overdækket af familien af alle åbne kugler med radius $\varepsilon/2$. Da T er kompakt kan vi finde endelig mange kugler $K_1, \dots, K_n$, hver med radius $\varepsilon/2$ (og dermed af diameter højst ε) som overdækker T. Sæt $T_1 = K_1$ og

$$T_j = K_j \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_{j-1}), \qquad j = 2, 3, \dots, n.$$

Da er $T_1, \dots, T_n$ som ønsket. □

Sætning A.2 *Lad X være et kompakt Hausdorff rum og lad μ være et endeligt Borelmål på X. Lad A være en C^*-algebra og lad $f \colon X \to A$ være kontinuert. Da findes netop et element $a \in A$ således at*

$$\varphi(a) = \int_X \varphi(f(x))\, d\mu(x) \qquad \text{for alle } \varphi \in A^*. \tag{†}$$

Der gælder videre, at $\|a\| \leq \int_X \|f(x)\|\, d\mu(x)$, og a tilhører afslutningen af mængden

$$S = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(x_j) \mid n \in \mathbb{N},\ \alpha_j \geq 0,\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \mu(X),\ x_j \in X \Big\}.$$

Det entydigt bestemte element a fundet ovenfor benævnes $\int_X f(x)\, d\mu(x)$.

Bevis: Hvis a og a' opfylder (†), da er $\varphi(a) = \varphi(a')$ for alle $\varphi \in A^*$, hvilket medfører $a = a'$.

Afbildningen $\varphi \mapsto \int_X \varphi(f(x))\, d\mu(x)$, $\varphi \in A^*$, er klart lineær, og den er også begrænset (som vist nedenfor), og den definerer således et element a i A^{**}.

Vi benytter notationen $\langle \varphi, x \rangle$ for både $x(\varphi)$ og $\varphi(x)$, når x tilhører A^{**}, hhv., A. Normen af et element $x \in A^{**}$ er pr. definition supremum af $|\langle \varphi, x \rangle|$, når φ gennemløber enhedskuglen i A^*. Af definition af a har vi således

$$\langle \varphi, a \rangle = \int_X \varphi(f(x))\, d\mu(x), \qquad \varphi \in A^*.$$

Udregningen,

$$|\langle\varphi, a\rangle| = \Big|\int_X \varphi(f(x))\, d\mu(x)\Big| \;\le\; \int_X |\varphi(f(x))|\, d\mu(x) \;\le\; \int_X \|\varphi\|\|f(x)\|\, d\mu(x),$$

for $\varphi \in A^*$, viser, at $\|a\| \le \int_X \|f(x)\|\, d\mu(x) < \infty$; og det ses ligeledes, at afbildningen $\varphi \mapsto \int_X \varphi(f(x))\, d\mu(x)$ er begrænset, som hævdet ovenfor.

Det skal vises, at a tilhører A (idet vi identificerer A med en delmængde af A^{**}), og at a tilhører afslutningen af S. Det er hertil nok at vise, at vi til hvert $\varepsilon > 0$ kan finde b i S så $\|a - b\| \le \varepsilon$.

Da X er kompakt og f er kontinuert er $f(X) \subseteq A$ kompakt. Vi har derfor en klassedeling $T_1, \ldots, T_n$ af $f(X)$ i Borelmængder, der hver har diameter højst $\varepsilon/\mu(X)$. Sæt $X_j = f^{-1}(T_j)$, og bemærk, at $X_1, \ldots, X_n$ er en klassedeling af X i Borelmængder. Vælg $x_j \in X_j$ for hvert j, og sæt

$$b = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\mu(X_j) \in S.$$

For hvert $\varphi \in A^*$ med $\|\varphi\| \le 1$ har vi

$$\begin{aligned} |\langle\varphi, a - b\rangle| &= \Big|\sum_{j=1}^{n} \int_{X_j} \varphi(f(x) - f(x_j))\, d\mu(x)\Big| \\ &\le \sum_{j=1}^{n} \int_{X_j} \|f(x) - f(x_j)\|\, d\mu \;\le\; \sum_{j=1}^{n} \varepsilon\mu(X)^{-1}\mu(X_j) \;=\; \varepsilon, \end{aligned}$$

hvilket viser det ønskede: $\|a - b\| \le \varepsilon$. □