Matematisk Afdeling
Institut for Matematiske Fag

5. april 2002
Mikael Rørdam

Mat 3MI — Mål og Integralteori – F02 — Ugeseddel nr. 9

Forelæsningerne i uge 14: Jeg gennemgik resten af eksistensbeviset for Lebesguemålet (afsnit 2 i de supplerende noter om "fuldstændighed af Lebesguemålet" springer vi over). Beviset for Lemma 9 overlades til selvlæsning.

Jeg fortsatte i §5.1 om entydighed af Lebesguemålet (Hovedsætning 5.1, som følger af Hovedsætning 5.4), og om Dynkinklasser.

Forelæsningerne i uge 15: Her læses §5.1 om entydigheden af Lebesguemålet færdigt. Der fortsættes med Vitali's sætning (5.30) og §5.2 om lokalt integrable funktioner gennemgås (her springes lidt i noterne).

Hjemmeopgave — afleveres i uge 16: Opgave 5.14 og 5.15.

Øvelserne i uge 16: Regn de tre supplerende opgaver, og opgaverne 5.7*, 5.10, 5.11*, 5.32 spm. 1^0, 5.33.

Opgaverne mærket med en * regnes, hvis tiden tillader det.

Supplerende opgave 1: Denne opgave handler om Dynkinsystemer (= σ-klasser)!

(i) Lad $\mathbb{D}$ være et Dynkinsystem på en mængde X. Antag $A, B \in \mathbb{D}$ og at $A \subseteq B$. Vis at $B \setminus A \in \mathbb{D}$.

(ii) Lad n være et naturligt tal, sæt $X = \{1, 2, \dots, n\}$, og betragt systemet
$$\mathbb{K} = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots, \{1,2,\dots,n-1\}, X\}.$$
Vis at $\mathbb{D}(\mathbb{K}) = P(X)$.

(iii) Betragt her systemet $\mathbb{K} = \{\{1,2\}, \{1,3\}\}$ på $X = \{1,2,3,4\}$. Vis at $\sigma(\mathbb{K}) = P(X)$, at $\mathbb{D}(\mathbb{K}) \neq P(X)$, og konkluder, at $\mathbb{D}(\mathbb{K})$ ikke er en σ-algebra.

(iv) Lad X og $\mathbb{K}$ være som i spørgsmål (iii). Konstruer to forskellige mål μ og ν på $P(X)$ således, at $\mu(X) = \nu(X) < \infty$ og $\mu(K) = \nu(K)$ for alle $K \in \mathbb{K}$.

Supplerende opgave 2: Beskriv Radon-målet på $\mathbb{R}$ hørende til hver af de positive lineærformer
$$I_1(f) = f(4), \qquad I_2(f) = f(1) + 2f(2), \qquad I_3(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx + f(0) + f(1),$$
hvor $f \in C_c(\mathbb{R})$.

Supplerende opgave 3: Lad $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} 1_{[n,n+1)}.$$

Vis at $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$, at grænseværdien

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\,dt$$

findes, men at f ikke tilhører $\mathcal{L}(\mathbb{R}^+)$.