Matematisk Afdeling
Institut for Matematiske Fag

14. marts 2002
Mikael Rørdam

**Mat 3MI — Mål og Integralteori – F02 — Ugeseddel nr. 7**

**Forelæsningerne i uge 11:** Her blev §4.2 om integralet af reelle funktioner, herunder den vigtige Lebesgue's Majorantsætning, og §4.7 om integral med reel parameter (herunder ombytning af integration og differentation) gennemgået. Desuden blev det vist, at Lebesgueintegralet mht. Lebesguemålet på den reelle akse stemmer overens med Riemannintegralet. Endvidere gennemgik jeg Supplerende Opgave 4 nedenfor.

**Forelæsningerne i uge 12:** Jeg vil her omtale §§4.3–4.4 og §4.6 ganske kort og derefter fortsætte med konstruktionen af Lebesguemået efter de supplerende noter (som vil blive kopieret og uddelt, og som også kan hentes fra 3MI's hjemmeside). Vi springer over §4.5.

I §4.4 vil jeg springe over hvor gærdet er lavest og *definere* integralet over en delmængde ved formlen:

$$\int_V f\,d\mu = \int_X f\cdot 1_V\,d\mu,$$

hvor vi har at gøre med et målrum $(X,\mathbb{E},\mu)$, hvor $V\in\mathbb{E}$, og hvor $f\in\mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$ eller $f\in\mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$. Faktisk giver højresiden mening, når blot $f\cdot 1_V\in\mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ eller $f\cdot 1_V\in\mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$.

**Øvelserne i uge 13/14:** Opgave <u>4.26</u>, opgave $1^\dagger$ og $2^\dagger$ i bogens appendix, og Supplerende opgave 1, $2^*$, 3 og <u>5</u> nedenfor.

Regn først de understregede opgaver. De er vigtigst. Opgaverne mærket med en * regnes, hvis tiden tillader det. Opgaver mærket med † kan evt. udsættes til næste gang.

**Supplerende opgave 1:** Beregn

$$\int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}1_{(0,1/n]}\Big)dm,\qquad \int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}1_{(n,n+1]}\Big)dm.$$

**Supplerende opgave 2:** Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum.

(i) Antag $f,g\in\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{E},\mu)$. Vis at $f=g$ $\mu$-n.o. hvis og kun hvis

$$\forall E\in\mathbb{E}:\quad \int_E f\,d\mu=\int_E g\,d\mu.$$

[Vink: Kig på real- og imaginærdelen af $f-g$, og de delmængder af $X$ hvorpå disse funktioner er hhv. positive og negative.]

(ii) Lad $f\in\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{E},\mu)$. Vis at

$$\int_E f\,d\mu=0,$$

for alle $E\in\mathbb{E}$ som opfylder $\mu(E)=0$.

Resultaterne fra (i) og (ii) gælder også for funktioner i $\mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$ (men denne påstand indgår ikke i opgaven).

**Supplerende opgave 3:** Lad $\mu$ og $\nu$ være to mål på et målbart rum $(X,\mathbb{E})$. Vis at

$$\int_X f\,d(\mu+\nu) = \int_X f\,d\mu + \int_X f\,d\nu \tag{1}$$

for alle $f \in \mathcal{M}^+$. [Vink: Benyt Hovedsætning 4.2.] Vis herefter, at $\mathcal{L}(\mu+\nu) = \mathcal{L}(\mu) \cap \mathcal{L}(\nu)$ og at (1) gælder for alle $f \in \mathcal{L}(\mu+\nu)$.

**Supplerende opgave 4:** Betragt Diracmålet $\varepsilon_a$ på $(X, P(X))$ hørende til $a \in X$. Vis at

$$\int_X f\,d\varepsilon_a = f(a) \tag{2}$$

for alle $f \in \mathcal{M}^+$. Vis herefter, at $\mathcal{L}(\varepsilon_a)$ består af samtlige funktioner $f\colon X \to \mathbb{C}$, og at (2) gælder for alle $f \in \mathcal{L}(\varepsilon_a)$.

**Supplerende opgave 5:** Denne opgave handler om at vise, at Riemann integralet og Lebesgue integralet stemmer overens, når de begge er defineret. Til en funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ lader vi her $\int_a^b f(x)\,dx$ betegne dens Riemann integral (hvis dette findes) og $\int_{[a,b]} f\,dm$ dets Lebesgue integral (hvis dette findes).

(i) Gør rede for, at en Riemann integrabel funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ tilhører $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}([a,b],m)$ hvis og kun hvis $f$ er en Borelfunktion*. [Vink: Benyt, at Riemann integrable funktioner er begrænsede.]

(ii) Lad $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ være en Riemann integrabel funktion. Vis, at der for alle $\varepsilon > 0$ findes målelige simple funktioner $s_1, s_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ således at $s_1 \leq f \leq s_2$ og således at

$$\Big|\int_{[a,b]} s_1\,dm - \int_a^b f(x)\,dx\Big| < \varepsilon, \qquad \Big|\int_{[a,b]} s_2\,dm - \int_a^b f(x)\,dx\Big| < \varepsilon.$$

[Vink: Kig på undersummer og oversummer.]

(iii) Vis at

$$\int_{[a,b]} f\,dm = \int_a^b f(x)\,dx,$$

hvis $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ er en Riemann integrabel Borelfunktion. [Vink: Kig først på tilfældet, hvor $f$ er reel, og benyt her (i) og (ii).]

*) *Der findes Riemann integrable funktioner, som ikke er Borelfunktioner. Det kan dog vises, at enhver Riemann integrabel funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ er målelig mht. den såkaldte fuldstændiggørelse $([a,b], \mathbb{L}([a,b]), m)$ af målrummet $([a,b], \mathcal{B}([a,b]), m)$ (se Opgave 3 i bogens Appendix).*