Matematisk Afdeling
Institut for Matematiske Fag

27. februar 2002
Mikael Rørdam

Mat 3MI — Mål og Integralteori – F02 — Ugeseddel nr. 5

Forelæsningerne i uge 9: Første time gik med at læse §2 om målelige afbildninger færdigt. Herefter begyndte vi på §4.1 om integralet af positive funktioner frem til og med side 4.4. Bemærk, at vi *definerer* integralet af en positive målelig funktion ved $(*)$ og $(**)$ side 4.2–4.3 i noterne. Det vises herefter, at dette integral er veldefineret, og at det opfylder (i), (ii) og (iii) i Hovedsætning 4.2. Endelig gælder et entydighedsresultat, at integralet er entydigt bestemt ved at opfylde (i), (ii) og (iii) i Hovedsætning 4.2. Den vigtigste sætning i §4.1 er Lebesgues Monotonisætning, som gennemgås næste gang. Beviserne for Sætning 4.1 og Lemma 1 blev gennemgået kursorisk til forelæsningerne (læs selv alle detaljer i bogen). Entydighedsdelen af Hovedsætning 4.2 gennemgås til regneøvelserne, og beviset for Hovedsætning 4.2 (ii) og (iii) gennemgås i næste uge.

Forelæsningerne i uge 10: Jeg er til en konference i denne uge, og forelæsningerne holdes af Nadia Slavila Larsen. §4.1 læses færdigt.

Øvelserne i uge 11: Gennemgå *entydighedsdelen* af Hovedsætning 4.2 (dvs. afsnittet *Analyse af problemstillingen* s. 4.3). Regn herefter de tre supplerende opgaver og opgaverne 4.7, 4.8*, 4.11 og 4.13 i bogen.

Supplerende opgave 1*: Lad X være et metrisk rum og lad A være en Boreldelmængde af X. Vis at $\mathbb{B}(X)_A = \mathbb{B}(A)$. [Vink: Bemærk først, at A er et metrisk rum med metrikken nedarvet fra X, så $\mathbb{B}(A)$ er defineret. Vis identiteten ved at vise de to inklusioner: $\mathbb{B}(X)_A \subseteq \mathbb{B}(A)$ og $\mathbb{B}(X)_A \supseteq \mathbb{B}(A)$. Ad "$\subseteq$": Sæt

$$\widetilde{\mathbb{E}} = \{E \in \mathbb{B}(X) \mid E \cap A \in \mathbb{B}(A)\}.$$

Vis at $\mathcal{G}_X \subseteq \widetilde{\mathbb{E}}$ og herefter, at $\mathbb{B}(X) = \widetilde{\mathbb{E}}$. Ad "$\supseteq$": Vis først, at $\mathcal{G}_A \subseteq \mathbb{B}(X)_A$.]

Supplerende opgave 2: (i). Findes en følge $\{f_n\}$ af funktioner i $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), m)$, således at f_n konvergerer punktvis mod en funktion f i $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), m)$, og således at

$$\int_{\mathbb{R}} f_n dm = 1/n, \qquad \int_{\mathbb{R}} f dm = 1?$$

(ii). Samme spørgsmål, hvor $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), m)$ erstattes med $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$.

Supplerende opgave 3*: Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $s\colon X \to \mathbb{R}^+$ være en simpel, målelig funktion. Vis at

$$\int_X s\, d\mu = \int_0^\infty \mu\big(s^{-1}(]t, \infty[)\big)\, dt.$$

(Integralet på højresiden kan opfattes enten som et Riemann integral eller som et Lebesgue integral — du bestemmer!)

Eksamenstilmelding sker elektronisk på WWW-adressen:
`http://www.ku.dk/selvbetjening/` i uge 9 og 10.