Matematisk Afdeling 20. februar 2002
Institut for Matematiske Fag Mikael Rørdam

Mat 3MI — Mål og Integralteori – F02 — Ugeseddel nr. 4

Forelæsningerne i uge 8: Her blev §§2.1–2.2 (fraregnet Sætning 2.4) om målelige afbildninger gennemgået.

Vis selv alle identiteter vedrørende urbilleder (= originalmængder), f.eks. midt i beviset for Sætning 2.2. Er du i tvivl om hvordan man gør, så spørg din instruktor eller mig. Se også de supplerende noter "Lidt mængdelære. Billeder og urbilleder", som kan downloades fra 3MI-hjemmesiden (se under Lærebøger og Pensum).

I §2.2 benyttes lim sup og lim inf af en reel talfølge. Man kan læse mere om dette i de supplerende noter "De reelle tal: limes superior of limes inferior", som ligeledes kan downloades fra 3MI-hjemmesiden.

Forelæsningerne i uge 9: §2 gøres færdigt, og herefter gennemgås §4.1 om integration af simple og positive funktioner.

Hjemmeopgave — afleveres i uge 10: Opgave 2, spm. (i), (v) og (vi) fra 3MI-eksamenssættet januar 1999 (forårspensum) (kan hentes på hjemmesiden og er vedhæftet denne ugeseddel).

Øvelserne i uge 10: Supplerende Opgave 1 og opgaverne: 4.3, 4.4 og 4.6. Særligt interesserede kan regne Supplerende Opgave 2.

Supplerende Opgave 1: Betragt en funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$. Det vil blive vist senere i kurset, at hvis f er Riemann-integrabel, så er f også Lebesgue-integrabel, og de to integraler stemmer overens. Dette kan bruges i det følgende!

Det vises i denne opgave, at der findes en Lebesgue-integrabel funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$, som ikke er Riemann-integrabel og yderligere har det sådan, at der ikke findes en Riemann-integrabel funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$, så $f = g$ n.o.

(i) Vis, at hvis U er en åben tæt delmængde af intervallet [0,1], og hvis N er en Lebesgue-nulmængde, så er $U \setminus N$ tæt i [0,1].

(ii) Lad E være en tæt Borel-delmængde af [0,1], og antag, at $m(E) < 1$. Vis, at hvis $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$ er en funktion, som opfylder $1_E \leq g$ og $1_E = g$ n.o., så er g *ikke* Riemann-integrabel. [Vink: Vis først, at enhver oversum for g er ≥ 1. Benyt herefter, at hvis g var Riemann-integrabel, så ville dens Lebesgue-integral være lig med dens Riemann-integral.]

(iii) Vis at der findes en Lebesgue-integrabel funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$, således, at der *ikke* findes nogen Riemmann-integrabel funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$, som opfylder $g = f$ n.o.

[Vink: Prøv med $f = 1_U$ for en passende mængde U, jvf. Opgave 3 på Ugeseddel 2.]

Supplerende Opgave 2*: (Denne opgave er en fortsættelse af Supplerende Opgave 3 fra Ugeseddel 3.) Antag $\mathcal{A}$ opfylder (i), (ii), og (iii) i Sætningen fra Ugeseddel 3. Vis at:

(i) alle simple funktioner i $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{B}(X))$ tilhører $\mathcal{A}$. [Vink: Benyt resultatet i Supplerende Opgave 3 (iii) fra Ugeseddel 3.]

(ii) alle Borelfunktioner $f\colon X \to \mathbb{R}^+$ tilhører $\mathcal{A}$. [Vink: Benyt en passende sætning i §4.1.]

(iii) $\mathcal{B}(X, \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{A}$.

3MI–Eksamen januar 1999 — Opgave 2 (25 point) Denne opgave består af seks korte spørgsmål, som ikke afhænger af hinanden.

(i) Bestem
$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^3} 1_{(0,n]} \, dm,$$
og giv en omhyggelig begrundelse for dit svar.

(ii) Betragt det målbare rum $(\mathbb{Z}, P(\mathbb{Z}))$, og betragt, for hvert $a \in \mathbb{Z}$, Dirac-målet ε_a i a. Lad $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ være bestemt ved $f(x) = \cos(x^2)$. Beregn
$$\int_{\mathbb{Z}} f \, d(\varepsilon_{-1} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1).$$

(iii) Lad $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ være en følge af funktioner, som er integrable med hensyn til Lebesguemålet m. Antag videre, at $f_n \to 0$ punktvis. Kan man slutte, at
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0\,?$$
Giv et bevis eller et modeksempel.

(iv) Bestem
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \sin(x)(\sqrt{x^2 + 1/n} - x)e^{-x} dx,$$
og giv en omhyggelig begrundelse for dit svar.

(v) Lad $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være Borel funktioner, som opfylder $f = g$ m-n.o. Kan man slutte, at $f(x) = g(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$? Giv et bevis eller et modeksempel.

(vi) Lad $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være kontinuerte funktioner, som opfylder $f = g$ m-n.o. Kan man slutte, at $f(x) = g(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$? Giv et bevis eller et modeksempel.