Matematisk Afdeling
Institut for Matematiske Fag

13. februar 2002

Mikael Rørdam

Mat 3MI — Mål og Integralteori – F02 — Ugeseddel nr. 3

Forelæsningerne i uge 7: Her blev afsnit §1 læst færdigt, og §3 om mål blev gennemgået, på nær Eksempel B–E i i Eksempel 3.2.

Beviset for Sætning 1.3 må I gerne springe over.

Forelæsningerne i uge 8: Her vil jeg gøre §3 færdigt, og derefter gennemgås §2 om målelige afbildninger.

Øvelserne i uge 9: Regn opgaverne: 2.1, 2.3, 2.4, 2.6, Supplerende Opgave 1 og Supplerende Opgave 2. (Supplerende Opgave 3 er for særligt interesserede.)

De understregede opgaver er særligt vigtige.

Supplerende Opgave 1:

(i) Hvad vil det sige, at $f_n \to f$ ε_a-n.o., når ε_a er Dirac-målet på $P(X)$, $a \in X$, og f_n og f er funktioner på X.

(ii) Samme spørgsmål som (i), idet ε_a udskiftes med tællemålet μ.

(iii) Lad $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være kontinuerte funktioner, og antag $f = g$ m-n.o. Vis at $f(x) = g(x)$ for *alle* $x \in \mathbb{R}$.

(iv) Lad $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $g(x) = 0$ for $x \leq 0$ og $g(x) = 1$ for $x > 0$. Findes en kontinuert funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så $f = g$ m-n.o.?

Supplerende Opgave 2: Lad (X, d) være et metrisk rum, og lad $\mathbb{B}(X)$ være Borel-σ-algebraen på X. Lad $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$, hhv. $C(X, \mathbb{C})$, benævne mængden af alle Borelfunktioner, hhv. kontinuerte funktioner, fra X ind i $\mathbb{C}$. Gør rede for, at nedenstående tre ting gælder:

(i) Hvis $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ og $\lambda \in \mathbb{C}$, så vil λf, $f + g$ og fg tilhøre $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$.

(ii) Hvis $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ er en følge i $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ og hvis den punktvise grænse $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ findes for alle $x \in X$, da er $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$.

(iii) $C(X, \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$.

Der gælder faktisk følgende sætning, som viser, at $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ er den *mindste* familie af funktioner, som opfylder (i), (ii) og (iii):

Sætning Lad (X, d) være et metrisk rum, lad $\mathcal{A}$ være en familie af funktioner fra X ind i $\mathbb{C}$, og antag at der gælder:

(i) Hvis $f, g \in \mathcal{A}$ og $\lambda \in \mathbb{C}$, så vil λf, $f + g$ og fg tilhøre $\mathcal{A}$.

(ii) Hvis $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ er en følge i $\mathcal{A}$ og hvis den punktvise grænse $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ findes for alle $x \in X$, da er $f \in \mathcal{A}$.

(iii) $C(X, \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{A}$.

Da gælder $\mathcal{B}(X, \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{A}$.

Beviset for denne sætning er givet i opgaven nedenfor, og en opgave på en senere ugeseddel.

Supplerende Opgave 3*: Antag $\mathcal{A}$ opfylder (i), (ii), og (iii) i Sætningen ovenfor. Sæt $\mathbb{E} = \{A \subseteq X \mid 1_A \in \mathcal{A}\}$. Vis at:

(i) $\mathbb{E}$ er en σ-algebra på X.

(ii) $V \in \mathbb{E}$ for alle åbne delmængder V af X. [Vink: Se på funktionerne $g_n(x) = \varphi_n(\mathrm{dist}(x, \complement V))$, hvor $\varphi(t) = \min\{nt, 1\}$.]

(iii) $\mathbb{B}(X) \subseteq \mathbb{E}$.

***-opgaver** Kun et udvalg af de opgaver, der står i lærebogen, bliver stillet til regneøvelserne. Jeg opfordrer særligt interesserede/nysgerrige deltagere i kurset til at kigge i de øvrige opgaver i noterne. Flere af dem er meget sjove/lærerige.