Matematisk Afdeling
Institut for Matematiske Fag

5. maj 2000

Mikael Rørdam

Mat 3MI — Mål og Integralteori – F00 — Ugeseddel nr. 14

Forelæsningerne i uge 18: Her blev §7.3 om Hölder og Minkowski's uligheder mm. gennemgået. §7.2, Sætning 7.11, og Eksempel 7.12 overlades til selvstudium!

Forelæsningerne i uge 19: Her vil §7.4 (om Fischer's fuldstændighedssætning) og §7.6 (om tæthed af rummet $C_c(\mathbb{R}^k)$ i $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k)$) blive gennemgået. §7.5 om $\mathcal{L}_\infty(\mu)$ vil enten blive omtalt meget brede pennestrøg, eller slet ikke blive omtalt.

Pensum og overspringelser kan ses på kursets hjemmeside:
`http://www.math.ku.dk/~rordam/3mi00.html`.

Øvelserne i uge 20: Regn opgaverne: 7.17, 7.18, supplerende opgaver 1, 2, og 3, og Opgave 5 i eksamenssættet for 3MI (forårspensum), januar 2000.

Som træning til den skriftlige eksamen bør du regne opgaverne fra de tre tidligere eksamenssæt. Følgende opgaver har ikke været stillet til øvelserne eller som hjemmeopgave: Januar 99: Opgave 3; Juni 99: Opgave 3, 6, 7 og 8; Januar 00: Opgave 6.

Supplerende opgave 1: Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $1 \leq p < \infty$. Lad $\mathcal{M}$ være en delmængde af $\mathcal{L}_p(\mu)$. Vis at f ligger i afslutningen af $\mathcal{M}$ (m.h.t. $\|\cdot\|_p$) hvis og kun hvis der findes en følge $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ i $\mathcal{M}$, således, at $f_n \to f$ punktvis n.o. *og* i p-middel.

Supplerende opgave 2: Betragt målrummet $([0,1], \mathbb{B}([0,1]), m)$ og de tilhørende rum $\mathcal{L}_p([0,1], m)$.

(i) Vis at $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$ for alle $f \in \mathcal{L}_2([0,1], m)$.

(ii) Gør rede for, at $\mathcal{L}_2([0,1], m) \subseteq \mathcal{L}_1([0,1], m)$.

(iii) Lad K være et positiv tal. Vis at $\{f \in \mathcal{L}_2([0,1], m) : \|f\|_2 \leq K\}$ er en afsluttet delmængde af $\mathcal{L}_1([0,1], m)$ m.h.t. $\|\cdot\|_1$. [Vink: Benyt Supplerende opgave 1 og Fatou's Lemma.]

Supplerende opgave 3: Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum. Gør rede for, at $L_2(\mu)$ udstyret med det indre produkt

$$\langle [f], [g] \rangle = \int_X f \overline{g} \, d\mu,$$

er et Hilbertrum. (Dette blev i store træk gennemgået ved forelæsningen.)

Dette er sidste ugeseddel! Jeg ønsker jer god læseferie, og held og lykke med eksamenen!!