Matematisk Afdeling
Institut for Matematiske Fag

8. maj 2002

Mikael Rørdam

Mat 3MI — Mål og Integralteori – F02 — Ugeseddel nr. 13

Forelæsningerne i uge 19: Her blev Fubini og Tonnelli's sætninger gennemgået. Herefter gav jeg en oversigt over resten af pensum i kurset (uden beviser) af hensyn til især deltagerne på mandagsholdet, som skal regne opgaver om L_p-rum i næste uge.

Forelæsningerne i uge 20–21: Her gennemgås §7 om L_p-rum (inklusive beviser).

Spørgetime Der holdes spørgetime **fredag d. 24. maj kl. 14:15**. Lokalet er ikke bestemt i skrivende stund (det annonceres på hjemmesiden og til næste forelæsning.

Hjemmeopgave — afleveres i uge 20/21: Opgave 4 og 5 3MI-eksamenen januar 2002.

Øvelserne mandag d. 13/5, onsdag d. 22/5 og fredag d. 24/5 — de sidste: Her regnes supplerende opgave 1, 3 og 4 og opgaverne: 7.10*, 7.12, 7.13, 7.15†, 7.16, 7.17* og 7.18*. (* = hvis tiden tillader det.)

(†) Vink: Benyt Hölder's ulighed til at vise, at hvis $r = tq + (1-t)s$, hvor $0 < t < 1$, så er

$$\int_X |f|^r d\mu \leq \left(\int_X |f|^q d\mu \right)^t \left(\int_X |f|^s d\mu \right)^{1-t}.$$

Stilopgaver: Kortlisten med 5 stilopgaver er nu offenliggjort. (Se hjemmesiden: `www.math.ku.dk/~rordam/stilopgaver.html`) Stilopgaven vil være en af følgende fem:

- Integral af reelle funktioner (især Fatou's Lemma og Lebesgue's sætning om majoriseret konvergens).
- Entydighed af Lebesguemålet.
- Produktmål (Sætning 6.6, Lemma 6.7 og omtale af produkt-σ-algebraen).
- Fischer's fuldstændighedssætning.
- Tæthed af $C_c(\mathbb{R}^k)$ i L_p. (Sætning 7.28 og s. 7.19).

Supplerende opgave 1: Lad $p \geq 1$, lad $n \in \mathbb{N}$, og lad $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$. Vis uligheden

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right|^p \leq \frac{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p}{n}.$$

[Vink: Betragt målrummet $(X, P(X), \mu)$, hvor $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, μ er tællemålet divideret med n, og benyt Hölder på passende funktioner $f, g \colon X \to \mathbb{C}$.]

Supplerende opgave 2: Lad μ være et sandsynlighedsmål på $([0,1], \mathbb{B}([0,1]))$, dvs. μ er et mål, som opfylder $\mu([0,1]) = 1$. Sæt

$$g(s) = \int_{[0,1]} \frac{1}{1+sx} d\mu(x), \qquad s \in [0, \infty).$$

(i) Vis at g er en kontinuert og aftagende funktion med $g(0) = 1$.

(ii) Vis at $\lim_{s\to\infty} g(s) = \mu(\{0\})$.

(iii) Giv tre forskellige eksempler på sandsynlighedsmål på $([0,1], \mathbb{B}([0,1]))$.

Supplerende opgave 3: Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $1 \leq p < \infty$. Lad $\mathcal{M}$ være en delmængde af $\mathcal{L}_p(\mu)$. Vis at f ligger i afslutningen af $\mathcal{M}$ (m.h.t. $\|\cdot\|_p$) hvis og kun hvis der findes en følge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\mathcal{M}$, således, at $f_n \to f$ punktvis n.o. *og* i p-middel.

Supplerende opgave 4: Betragt målrummet $([0,1], \mathbb{B}([0,1]), m)$ og de tilhørende rum $\mathcal{L}_p([0,1], m)$.

(i) Vis at $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$ for alle $f \in \mathcal{L}_2([0,1], m)$.

(ii) Gør rede for, at $\mathcal{L}_2([0,1], m) \subseteq \mathcal{L}_1([0,1], m)$.

(iii) Lad K være et positiv tal. Vis at $\{f \in \mathcal{L}_2([0,1], m) : \|f\|_2 \leq K\}$ er en afsluttet delmængde af $\mathcal{L}_1([0,1], m)$ m.h.t. $\|\cdot\|_1$. [Vink: Benyt Supplerende opgave 4 og Fatou's Lemma.]

Supplerende opgave 5: Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum. Gør rede for, at $L_2(\mu)$ udstyret med det indre produkt

$$\langle [f], [g] \rangle = \int_X f\overline{g}\, d\mu,$$

er et Hilbertrum. (Dette blev i store træk gennemgået ved forelæsningen.)