Matematisk Afdeling 22. april 2002
Institut for Matematiske Fag Mikael Rørdam

Mat 3MI — Mål og Integralteori – F02 — Ugeseddel nr. 11

Forelæsningerne i uge 16: Her blev §§5.2-5.3 gennemgået, stort set uden beviser. Vi fortsatte i §6 om produktmål. Udover noget generel snak om produkter af to målrum blev dele af §6.1 gennemgået. (I §6.1 mangler jeg at gennemgå Sætning 6.3 og anden halvdel af beviset for Sætning 6.4.)

Pensum i §5: §5.1, Sætning 5.15 og Sætning 5.30 er *pensum (med beviser).*

§5.2, §5.3 er *kursorisk pensum.* Dvs. at indholdet af disse sider forventes kendt (og der kan blive stillet skriftlige opgaver, som forudsætter kendskab til disse sider), men *beviserne* bliver I ikke stillet til regnskab for.

§5.4 (fra og med Sætning 5.16), §§5.5–5.7, §5.8 (udover Sætning 5.30 med bevis) og §5.9 er *ikke* pensum.

Forelæsningerne i uge 17: Her vil resten af §6.1 blive gennemgået. Der fortsættes med §6.2 om produktmål, og vi begynder på §6.3 om Fubinis og Tonnellis sætninger.

Hjemmeopgave — afleveres i uge 18: Opgave 2 og 4 fra 3MI-eksamenen januar 2000 (forårspensum).

Øvelserne mandag d. 29/4, onsdag d. 8/5 og fredag d. 10/5: Regn de tre supplerende opgaver, og opgaverne 6.14, 6.15, 6.17 (antag gerne, at X og Y er tællelige mængder), 6.18, 6.19, 6.20.

Supplerende opgave 1: Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et σ-endeligt målrum, og lad $f\colon X \times X \to \mathbb{C}$ være en målelig funktion, som opfylder $f(x,y) = -f(y,x)$. Vis at

$$\int_X \left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x) \right) d\mu(y) = 0$$

hvis det desuden antages, at $f \in \mathcal{L}(\mu \otimes \mu)$. Giv et eksempel på en funktion f, som opfylder $f(x,y) = -f(y,x)$, og hvor integralet ovenfor er defineret og $\neq 0$.

Supplerende opgave 2: Fortæl så meget som muligt om for hvilke funktioner $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de to integraler

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy, \qquad \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

begge er definerede, og hvornår de er ens.

Supplerende opgave 3: (Tilføjelse til Opgave 6.14) Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et σ-endeligt målrum, og lad $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$. Vis at

$$\int_X f \, d\mu = \int_0^\infty \mu\big(f^{-1}(\,]t, \infty[)\big) \, dt. \tag{$\dagger$}$$

Vink: Kig på produktrummet $(X \times \mathbb{R}, \mathbb{E} \otimes \mathbb{B}, \mu \otimes m)$ og på mængden

$$G(f) = \{(x,t) \mid 0 \leq t < f(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R}.$$

Husk at vis, at $G(f) \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{B}$. Dette kan f.eks. gøres ved først at kigge på tilfældet, hvor f er simpel, og dernæst at benytte $G(f) = \bigcup_{n=1}^\infty G(s_n)$ hvis $s_n \nearrow f$.

Note: Funktionen $t \mapsto m\big(f^{-1}(\,]t, \infty[)\big)$ er veldefineret (fordi $f^{-1}(\,]t, \infty[) \in \mathbb{E}$ for alle $t \geq 0$) og voksende, og dermed Riemann integrabel. Man kan derfor *definere* Lebesgue integralet mht. et vilkårligt (σ-endeligt) mål μ ved ($\dagger$) ovenfor.