Supplerende noter til 3MI **Mikael Rørdam**
Mål og integralteori

Denne fremstilling er baseret på s. 28–34 i G.B. Folland's "Real Analysis" og på noter udarbejdet af Uffe Haagerup.

1 Eksistensen af Lebesguemålet på $\mathbb{R}$

Konstruktionen af Lebesguemålet går via ydre mål. Disse er knapt så fine som mål, ved det, at de ikke nødvendigvis er tælleligt additive, men blot tælleligt subadditive:

Definition 1 *Et* ydre mål μ^* *på en mængde* X *er en funktion* $\mu^*\colon P(X) \to [0,\infty]$*, som opfylder*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$*, hvis* $A, B \in P(X)$ *og* $A \subseteq B$,

(iii) $\mu^*(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \le \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n)$ *for enhver følge* $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subseteq P(X)$.

Til et ydre mål betragtes en særlig familie af delmængder af X:

Definition 2 *Lad* μ^* *være et ydre mål på mængden* X*. En delmængde* E *af* X *kaldes* μ^*-målelig*, hvis der for alle* $A \in P(X)$ *gæder*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E). \tag{1}$$

Definition 1 (iii) giver $\mu^*(A) \le \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E)$ for ethvert par $A, E \in P(X)$. Vi har derfor, at E er μ^*-målelig hvis og kun hvis den anden ulighed,

$$\mu^*(A) \ge \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E), \tag{2}$$

gælder for alle $A \in P(X)$.

Definition 3 *En familie* $\mathcal{A}$ *af delmængder af en mængde* X *kaldes en* algebra*, hvis*

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A}$ *medfører* $\complement A \in \mathcal{A}$,

(iii) $A, B \in \mathcal{A}$ *medfører* $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Enhver σ-algebra er en algebra. Det modsatte gælder ikke, men vi har følgende lemma, hvis bevis overlades til læseren (= Opgave 1, som regnes til øvelserne):

Lemma 4 *Lad* $\mathcal{A}$ *være en algebra på mængden* X*, og antag* $\mathcal{A}$ *er afsluttet under tællelige disjunkte foreninger, dvs. for alle følger* $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ *af parvis disjunkte mængder i* $\mathcal{A}$ *gælder* $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.

Da er $\mathcal{A}$ *en* σ*-algebra.*

Theorem 5 (Carathéodory's Sætning) *Lad μ^* være et ydre mål på en mængde X. Lad $\mathbb{E}$ være familien af alle μ^*-målelige delmængder af X. Lad μ være restriktionen af μ^* til $\mathbb{E}$, dvs. $\mu\colon \mathbb{E} \to [0,\infty]$ og $\mu(E) = \mu^*(E)$ for $E \in \mathbb{E}$.*

Da er $(X, \mathbb{E}, \mu)$ et målrum.

Bevis: Det skal vises, at $\mathbb{E}$ er en σ-algebra, og at μ er et mål på $\mathbb{E}$. Det følger umiddelbart af (1), at $E \in \mathbb{E}$ medfører $\complement E \in \mathbb{E}$, og at $\emptyset$ og X begge ligger i $\mathbb{E}$.

For $E, F \in \mathbb{E}$ og $A \in P(X)$ har vi

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E) \\
&= \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap \complement F) + \mu^*(A \cap \complement E \cap F) + \mu^*(A \cap \complement E \cap \complement F) \\
&\geq \mu^*\big((A \cap E \cap F) \cup (A \cap E \cap \complement F) \cup (A \cap \complement E \cap F)\big) + \mu^*(A \cap \complement E \cap \complement F) \\
&= \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap \complement(E \cup F)).
\end{aligned}$$

Dette viser, at $E, F \in \mathbb{E}$ medfører $E \cup F \in \mathbb{E}$. Det er nu vist, at $\mathbb{E}$ er en algebra.

Lad nu $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge af parvis disjunkte mængder beliggende i $\mathbb{E}$. Sæt $F_n = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$, og bemærk, at $F_n \in \mathbb{E}$, da $\mathbb{E}$ er en algebra. Sæt $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ $(= \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)$. Hovedslaget, der skal udkæmpes i dette bevis, består i at vise:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap \complement F) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F), \tag{3}$$

for alle $A \in P(X)$.

For at se (3), bemærk først

$$A = (A \cap F) \cup (A \cap \complement F) = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap E_j\right) \cup (A \cap \complement F).$$

Sammen med Definition 1 (iii) giver dette

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap \complement F) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F). \tag{4}$$

Omvendt, for alle $n \geq 2$ har vi

$$\mu^*(A \cap F_n) = \mu^*(A \cap F_n \cap E_n) + \mu^*(A \cap F_n \cap \complement E_n) = \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap F_{n-1}).$$

Det følger heraf ved induktion, at

$$\mu^*(A \cap F_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j),$$

for alle $n \geq 1$. (Til grundtrinnet $n = 1$ benyttes at $F_1 = E_1$.) Ved at benytte $\complement F \subseteq \complement F_n$ og (ii) i Definition 1 får vi

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap \complement F_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F_n) \\
&\geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F).
\end{aligned}$$

Da dette gælder for alle $n \in \mathbb{N}$, har vi $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F) \leq \mu^*(A)$. Sammen med (4) viser dette (3).

Det følger umiddelbart af (3), at $F \in \mathbb{E}$. Derfor er $\mathbb{E}$ afsluttet under tællelige disjunkte foreninger, så $\mathbb{E}$ er en σ-algebra jvf. Lemma 4. Sættes $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ $(= F)$ i (3), får vi

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

(Husk at $\mu(E) = \mu^*(E)$ for $E \in \mathbb{E}$.) Dette viser, at μ er et mål på σ-algebraen $\mathbb{E}$. $\square$

Vi vender os nu til konstruktionen af Lebesguemålet på den reelle akse.

Definition 6 *Et h-*interval *er et delinterval af $\mathbb{R}$ af formen $(a, b]$, (a, ∞), eller $\emptyset$, hvor $-\infty \leq a < b < \infty$. Mængden af alle h-intervaller benævnes med $\mathbb{I}$.*

Bemærk, at hvis I er et h-interval, så er $\complement I$ enten igen et h-interval eller en disjunkt forening af to h-intervaller. Thi i tilfældet hvor $I = (a, b]$ og $-\infty < a < b < \infty$, da er $\complement I$ en disjunkt forening af to h-intervaller, og i alle andre tilfælde er $\complement I$ et h-interval. Snitmængden af to h-intervaller er igen et h-interval.

Definition 7 *Definer $\ell\colon \mathbb{I} \to [0, \infty]$ ved*

$$\ell((a, b]) = b - a, \quad \ell((a, \infty)) = \infty, \quad \ell(\emptyset) = 0.$$

Definer $m^*\colon P(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ ved

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) \mid I_j \in \mathbb{I}, \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}. \tag{5}$$

Strategien er nu at vise, at m^* er et ydre mål, at alle h-intervaller er m^*-målelige, og at $m^*(I) = \ell(I)$ for alle h-intervaller I. Dette gøres i nedenstående lemmaer. Herefter giver Carathéodory's sætning det ønskede resultat om eksistensen af Lebesguemålet (Theorem 13).

Lemma 8 *m^* er et ydre mål.*

Bevis: Det skal vises, at (i), (ii) og (iii) i Definition 1 holder. (ii) er en umiddelbar konsekvens af definitionen af m^* (overvej dette!). (i) indses let ved f.eks. at vælge $I_1 = I_2 = I_3 = \cdots = \emptyset$.

For at vise (iii), lad $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en vilkårlig følge i $P(\mathbb{R})$. Hvis $m^*(A_n) = \infty$ for mindst et n, så gælder uligheden $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$ trivielt. Antag derfor gerne, at $m^*(A_n) < \infty$ for alle n. Lad $\varepsilon > 0$. Find for alle n følger $\{I_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ i $\mathbb{I}$, så

$$A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{n,j}) \leq m^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon.$$

Da er $\{I_{n,j}\}_{j,n=1}^{\infty}$ en tællelig familie i $\mathbb{I}$, og

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{j,n=1}^{\infty} I_{n,j}, \quad \sum_{j,n=1}^{\infty} \ell(I_{n,j}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(m^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon.$$

Dette viser, at $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon$. Da dette holder for alle $\varepsilon > 0$ følger det ønskede: $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$. $\square$

Lemma 9 *Alle h-intervaller er m^*-målelige.*

Bevis: Lad I være et h-interval. Vi viser, at I er m^*-målelig ved at eftervise (2).

Lad $A \in P(\mathbb{R})$, og betragt hertil en vilkårlig følge $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ af h-intervaller så $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Som tidligere bemærket er $\complement I$ foreningen af to disjunkte h-intervaller I' og I'' (det ene af disse h-intervaller kunne være den tomme mængde). Sæt

$$K_n = I \cap J_n, \qquad K_n' = I' \cap J_n, \qquad K_n'' = I'' \cap J_n.$$

Da er K_n, K_n', K_n'' parvis disjunkte h-intervaller, og $J_n = K_n \cup K_n' \cup K_n''$. Derfor er $\ell(J_n) = \ell(K_n) + \ell(K_n') + \ell(K_n'')$ (overvej). Endvidere gælder

$$A \cap I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \qquad A \cap I' \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n', \qquad A \cap I'' \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n''.$$

Samlet har vi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n') + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n'') \\ &\geq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I') + m^*(A \cap I''), \end{aligned}$$

hvor $\geq$ skyldes (5). Da overdækningen $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ af A var vilkårlig, kan vi igen ifølge (5) konkludere, at

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I') + m^*(A \cap I'') \\ &\geq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap (I' \cup I'')) \\ &= m^*(A \cap I) + m^*(A \cap \complement I). \end{aligned}$$

Det ses nu, at (2) er opfyldt, så I er m^*-målelig. $\square$

Lemma 10 *Hvis*

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j),$$

hvor $a \leq b$ og $a_j < b_j$ for $j = 1, 2, \ldots, n$, så er

$$b - a \leq \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Bevis: Beviset føres ved induktion efter n. Overvej selv situationen for $n = 1$. Antag $n \geq 2$, at $[a,b] \subseteq \bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j)$, og at påstanden i lemmaet er vist for alle overdækninger med færre end n intervaller. Find $j_0 \in \{1, 2, \ldots n\}$ så $a \in (a_{j_0}, b_{j_0})$. Hvis $b_{j_0} > b$, så er $[a,b] \subseteq (a_{j_0}, b_{j_0})$, og sagen er klar!

Antag $b_{j_0} \leq b$. Da er

$$[b_{j_0}, b] = [a,b] \setminus (a_{j_0}, b_{j_0}) \subseteq \bigcup_{j \neq j_0} (a_j, b_j).$$

Induktionsantagelsen giver derfor $b - b_{j_0} \leq \sum_{j \neq j_0} (b_j - a_j)$. Dermed har vi

$$\begin{aligned} b - a &= (b - b_{j_0}) + (b_{j_0} - a) \ \leq \ (b - b_{j_0}) + (b_{j_0} - a_{j_0}) \\ &\leq \sum_{j \neq j_0} (b_j - a_j) + (b_{j_0} - a_{j_0}) \ = \ \sum_{j=1}^n (b_j - a_j). \qquad \square \end{aligned}$$

Lemma 11 *Lad $I, I_1, I_2, I_3, \ldots$ være h-intervaller, således at $I \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty I_n$. Da gælder*

$$\ell(I) \leq \sum_{n=1}^\infty \ell(I_n).$$

Bevis: Hvis $I = \emptyset$, så er der intet at vise. Antag derfor gerne, at $I \neq \emptyset$. Endvidere, hvis $\ell(I_n) = \infty$ for mindst et n, så er der heller intet at vise. Vi kan derfor også antage, at $\ell(I_n) < \infty$ for alle n. Dvs. $I_n = (a_n, b_n]$, hvor $-\infty < a_n < b_n < \infty$ (idet vi også smider alle tomme mængder blandt intervallerne $I_1, I_2, \ldots$ ud).

Bemærk, at

$$\ell(I) = \sup\{b' - a' \mid a', b' \in I,\ a' < b'\}, \tag{6}$$

når $I \neq \emptyset$. Lad $a', b' \in I$ med $a' < b'$ være givet.

Lad $\varepsilon > 0$, og sæt $a'_n = a_n$, og $b'_n = b_n + \varepsilon 2^{-n}$. Da er $I_n = (a_n, b_n] \subseteq (a'_n, b'_n)$, så $[a', b'] \subseteq I \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty (a'_j, b'_j)$. Da $[a', b']$ er kompakt giver Heine-Borel's sætning $[a', b'] \subseteq \bigcup_{j=1}^n (a'_j, b'_j)$ for et passende stort n.

Det følger nu fra Lemma 10, at

$$\begin{aligned} b' - a' &\leq \sum_{j=1}^n (b'_j - a'_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^\infty (b_j + \varepsilon 2^{-j} - a_j) \ = \ \sum_{j=1}^\infty (\ell(I_j) + \varepsilon 2^{-j}) \ = \ \sum_{j=1}^\infty \ell(I_j) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ var vilkårlig, får vi $b' - a' \leq \sum_{j=1}^\infty \ell(I_j)$, og da a', b' også var vilkårlige følger det ønskede af (6). $\square$

Lemma 12 *For ethvert h-interval I er $m^*(I) = \ell(I)$.*

Bevis: Sæt $I_1 = I$, $I_2 = I_3 = \cdots = \emptyset$. Da er $I_1, I_2, I_3, \ldots$ h-intervaller og $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, så

$$m^*(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \ell(I)$$

ifølge definitionen af m^*. Omvendt, hvis $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en følge af h-intervaller med $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, da er $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \geq \ell(I)$ ifølge Lemma 11. Dette viser, at $m^*(I) \geq \ell(I)$. $\square$

Theorem 13 *Der findes et målrum* $(\mathbb{R}, \mathbb{L}, m)$*, som opfylder* $\mathbb{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{L}$ *og*

$$m((a, b]) = b - a,$$

for alle a, b *med* $-\infty \leq a < b < \infty$.

Bevis: Lad $\mathbb{L}$ være mængden af alle m^*-målelige mængder, og lad m være restriktionen af m^* til $\mathbb{L}$. Carathéodory's sætning giver, at $(\mathbb{R}, \mathbb{L}, m)$ er et målrum. Lemma 9 giver $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{L}$. Da σ-algebraen frembragt af $\mathbb{I}$ er lig med Borel-σ-algebraen $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ (jvf. Opgave 1.2), så giver Sætning 1.2 i noterne, at $\mathbb{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathbb{I}) \subseteq \mathbb{L}$.

Endelig, hvis $-\infty \leq a < b < \infty$, så er $(a, b]$ et h-interval, og ved at udnytte Lemma 12 får vi

$$m((a, b]) = m^*((a, b]) = \ell((a, b]) = b - a. \qquad \square$$

Ved at tage restriktionen af målet m til Borel-σ-algebraen $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ får vi følgende korollar til Theorem 13:

Korollar 14 *Der findes et mål* m *defineret på* σ*-algebraen* $\mathbb{B}(\mathbb{R})$*, som opfylder*

$$m((a, b]) = b - a,$$

for alle a, b *med* $-\infty \leq a < b < \infty$.

Hovedsætning 5.1 i noterne siger, at målet m i Korollar 14 tillige er entydigt.

Eksistensen af Lebesguemålet på $\mathbb{R}^k$ kan vises på en tilsvarende, men mere besværlig, måde. Istedet vil vi, når tiden er moden, konstruere Lebesguemålet på $\mathbb{R}^k$ ved at bruge teorien for produktmål, som udvikles i noternes §6.

2 Fuldstændige mål

Målet i Carathéodory's Sætning — og dermed også Lebesguemålet m defineret på σ-algebraen $\mathbb{L}$ — har en særlig fin og nyttig egenskab kaldet fuldstændighed. Denne egenskab defineres formelt således:

Definition 15 *Et målrum* $(X, \mathbb{E}, \mu)$ *kaldes* fuldstændigt*, hvis alle* μ*-nulmængder ligger i* $\mathbb{E}$.

Bemærk, at $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er fuldstændig, hvis og kun hvis det for alle $E \in \mathbb{E}$ med $\mu(E) = 0$, og alle $N \subseteq E$ gælder, at $N \in \mathbb{E}$. Af og til vil man sige, at μ er fuldstændig i betydningen $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er fuldstændig, når X og $\mathbb{E}$ fremgår af sammenhængen.

Fuldstændige mål er diskuteret i opgaverne 3.15–3.18 i noterne. Fuldstændige mål er bekvemme at arbejde med, bl.a. p.g.a. følgende sætning, som til dels er bevist i Opgave 3.18.

Sætning 16 *Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et fuldstændigt målrum, og lad $(Y, \mathbb{F}, \nu)$ være et vilkårligt andet målrum (ikke nødvendigvist fuldstændigt). Hvis $f\colon X \to Y$ er $\mathbb{E}$-$\mathbb{F}$-målelig, og hvis $g\colon X \to Y$ opfylder $g = f$ μ-n.o., så er g også $\mathbb{E}$-$\mathbb{F}$-målelig.*

Til ethvert målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ kan man konstruere et nyt målrum $(X, \bar{\mathbb{E}}, \bar{\mu})$, som er fuldstændigt, og som opfylder $\mathbb{E} \subseteq \bar{\mathbb{E}}$ og $\bar{\mu}|_{\mathbb{E}} = \mu$ (se Opgave 3.17 eller Opgave 4 nedenfor). Dette nye målrum kaldes en *fuldstændiggørelse* af $(X, \mathbb{E}, \mu)$. Lebesguesmålet konstrueret i Theorem 13 er, som vist nedenfor, automatisk fuldstædigt, så vi får ikke brug for denne fuldstændiggørelsesmaskine.

Sætning 17 *Målrummet $(X, \mathbb{E}, \mu)$ fra Carathéodory's Sætning (Theorem 5) er fuldstændigt.*

Bevis: Vi benytter notationen fra Theorem 5, hvor bl.a. μ^* er et ydre mål på mængden X, $\mathbb{E}$ er mængden af μ^*-målelige mængder, og μ er restriktionen af μ^* til $\mathbb{E}$.

Lad $E \in \mathbb{E}$ og $N \subseteq E$ med $\mu(E) = 0$ være givet, og lad $A \in P(X)$. Da er

$$\mu^*(A \cap N) + \mu^*(A \cap \complement N) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A) = \mu^*(A).$$

Betingelsen (2) er således opfyldt for N, så $N \in \mathbb{E}$. Dette viser, at μ er fuldstændig. $\square$

Korollar 18 *Lebesguemålet m defineret på σ-algebraen $\mathbb{L}$ (defineret i Theorem 13) er fuldstændigt.*

Bevis: Dette følger umiddelbart af Sætning 17, idet målrummet $(\mathbb{R}, \mathbb{L}, m)$ kommer fra et ydre mål via Carathéodory's Sætning. $\square$

Mængderne i σ-algebraen $\mathbb{L}$ kaldes *Lebesguemålelige mængder*. Alle Borel-delmængder af $\mathbb{R}$ er således Lebesguemålelige. Det omvendte gælder ikke. Faktisk har vi

$$\mathbb{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{L} \subsetneq P(\mathbb{R}). \tag{7}$$

Den første af disse ægte inklusioner kan ses ved en kardinalitetsbetragtning, idet $\mathrm{card}(\mathbb{L}) = \mathrm{card}(P(\mathbb{R}))$ og $\mathrm{card}(\mathbb{B}(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$. Den første af disse identiteter kan indses ved at benytte Cantor's mængde Z (se Eksempel 5.22 i noterne). Mængden Z er kompakt (og dermed $Z \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{L}$), $m(Z) = 0$, og $\mathrm{card}(Z) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$. Da $(\mathbb{R}, \mathbb{L}, m)$ er fuldstændig, har vi $P(Z) \subseteq \mathbb{L}$. Dette giver $\mathrm{card}(P(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(P(Z)) \leq \mathrm{card}(\mathbb{L}) \leq \mathrm{card}(P(\mathbb{R}))$. Den anden kardinalitetsidentitet er noget mere kompliceret.

Den anden ægte inklusion i (7) følger umiddelbart af Vitali's Sætning (Sætning 5.30 i noterne).

En funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hhv. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, kaldes *Lebesguemålelig*, hvis den er $\mathbb{L}$-$\mathbb{B}(\mathbb{R})$-målelig, hhv. $\mathbb{L}$-$\mathbb{B}(\mathbb{C})$-målelig.

Alle Borelfunktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er således Lebesguemålelige (da $\mathbb{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{L}$). Endvidere, hvis $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hvis f er Lebesguemålelig, og hvis $f = g$ m-n.o., så er g Lebesguemålelig ifølge Sætning 16.

Lad $[a, b]$ være et kompakt delinterval af $\mathbb{R}$, og sæt

$$\mathbb{L}([a, b]) = \{E \cap [a, b] \mid E \in \mathbb{L}\} \quad (= \mathbb{L}_{[a,b]}).$$

Det kan (ret nemt) vises, at $([a, b], \mathbb{L}([a, b]), m)$ er et fuldstændigt målrum, og at $\mathbb{B}([a, b]) \subseteq \mathbb{L}([a, b])$. I Opgave 3 nedenfor vises det, at $\mathcal{L}([a, b], \mathbb{L}([a, b]), m)$ indeholder alle Riemannintegrable funktioner $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, og at Lebesgueintegralet stemmer overens med Riemannintegralet, når Riemannintegralet er defineret.

Der findes eksempler på Riemannintegrable funktioner, som ikke er Borelmålelige (se Opgave 4).

3 Opgaver

Opgave 1 Bevis Lemma 4.

Opgave 2 Lad X være en ikke-tom mængde, og definer $\mu^*\colon P(X) \to \mathbb{R}^+$ ved $\mu^*(\emptyset) = 0$ og $\mu^*(E) = 1$ for alle $E \in P(X) \setminus \{\emptyset\}$. Vis at μ^* er et ydre mål, og bestem alle μ^*-målelige delmængder af X.

Opgave 3 Lad $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ være en Riemannintegrabel funktion, hvor Riemannintegralet er defineret på sædvanlig vis ved hjælp af over- og undersummer.

(i) Vis at der findes følger af funktioner

$$s_1 \le s_2 \le s_3 \le \cdots \le f \le \cdots \le t_3 \le t_2 \le t_1,$$

hvor funktionerne s_j og t_j er på formen $\sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{[x_{i-1}, x_i)}$, for passende inddelinger, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ af intervallet $[a, b]$, og for passende reelle tal $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, således at

$$\sup_n \int_{[a,b]} s_n dm = \int_a^b f(x) dx = \inf_n \int_{[a,b]} t_n dm.$$

(ii) Vis at der findes $g_1, g_2 \in \mathcal{L}([a, b], \mathbb{B}([a, b]), m)$, så $g_1 \le f \le g_2$ og

$$\int_{[a,b]} g_1 dm = \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} g_2 dm.$$

(iii) Vis at $g_1 = f = g_2$ m-n.o.

(iv) Vis at $f \in \mathcal{L}([a, b], \mathbb{L}([a, b]), m)$, og at

$$\int_{[a,b]} f dm = \int_a^b f(x) dx.$$

Opgave 4 Lad Z være Cantormængden (jvf. Eksempel 5.22 i noterne). Det erindres herfra, at Z er en kompakt delmængde af intervallet $[0,1]$, at Z er overtællelig, og at $m(Z) = 0$.

(i) Vis at $1_A \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ er Riemannintegrabel, og at $\int_0^1 1_A(x)dx = 0$ for enhver delmængde A af Cantormængden Z.

(ii) Find et eksempel på en Riemannintegrabel funktion $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, som ikke er en Borelfunktion. [Vink: Mængden af Borel-delmængder af $\mathbb{R}$ er tællelig]

Opgave 5 Lad $(X, \mathbb{F}, \lambda)$ være et målrum. I analogi med definitionen af m^* (i Definition 7) defineres $\mu^* \colon P(X) \to [0, \infty]$ ved

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(F_j) \mid F_j \in \mathbb{F}, \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right\}.$$

Formålet med denne opgave er at undersøge hvad denne definition fører til, og at sætte undersøgelsen af m^* i relief. Som et biprodukt får vi en fuldstændiggørelse af λ, men dette kan opnås betydeligt enklere ved at følge Opgave 3.17.

(i) Vis at
$$\mu^*(A) = \inf\{\lambda(F) \mid F \in \mathbb{F}, \quad A \subseteq F\},$$
for alle $A \in P(X)$, og vis, at der til ethvert $A \in P(X)$ findes $F \in \mathbb{F}$ således, at $A \subseteq F$ og $\mu^*(A) = \lambda(F)$.

(ii) Vis at μ^* er et ydre mål.

Benævn med $\mathbb{E}$ mængden af μ^*-målelige delmængder af X, og lad μ betegne restriktionen af μ^* til $\mathbb{E}$.

(iii) Gør rede for, at $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et fuldstændigt målrum.

(iv) Vis at $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$, dvs. at alle mængder F i $\mathbb{F}$ er μ^*-målelige.

(v) Vis at $\mu(E) = \lambda(E)$ for alle $E \in \mathbb{E}$.

(vi) Gør rede for, at $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er en fuldstændiggørelse af $(X, \mathbb{F}, \lambda)$.

(vii) Beskriv $(X, \mathbb{E}, \mu)$ i tilfældet, hvor $\mathbb{F} = \{\emptyset, X\}$ og hvor $\lambda(X) = 1$.

(viii) Antag at λ er σ-endelig. Vis at $E \in \mathbb{E}$ hvis og kun hvis der findes $F \in \mathbb{F}$ således at den symmetriske difference $(E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ er en λ-nulmængde.

(ix) Beskriv $(X, \mathbb{E}, \mu)$ i tilfældet, hvor $\lambda(F) = \infty$ for alle ikke-tomme $F \in \mathbb{F}$. Vis at resultatet fra spørgsmål (viii) ikke holder generelt uden antagelsen om, at λ er σ-endelig.