

Denne fremstilling er baseret på s. 28–34 i G.B. Folland’s “Real Analysis” og på noter udarbejdet af Uffe Haagerup.

## 1 Eksistensen af Lebesguemålet på $\mathbb{R}$

Konstruktionen af Lebesguemålet går via ydre mål. Disse er knapt så fine som mål, ved det, at de ikke nødvendigvis er tælleligt additive, men blot tælleligt subadditive:

**Definition 1** Et ydre mål  $\mu^*$  på en mængde  $X$  er en funktion  $\mu^*: P(X) \rightarrow [0, \infty]$ , som opfylder

- (i)  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,
- (ii)  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ , hvis  $A, B \in P(X)$  og  $A \subseteq B$ ,
- (iii)  $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$  for enhver følge  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(X)$ .

Til et ydre mål betragtes en særlig familie af delmængder af  $X$ :

**Definition 2** Lad  $\mu^*$  være et ydre mål på mængden  $X$ . En delmængde  $E$  af  $X$  kaldes  $\mu^*$ -målelig, hvis der for alle  $A \in P(X)$  gælder

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E). \quad (1)$$

Definition 1 (iii) giver  $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E)$  for ethvert par  $A, E \in P(X)$ . Vi har derfor, at  $E$  er  $\mu^*$ -målelig hvis og kun hvis den anden ulighed,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E), \quad (2)$$

gælder for alle  $A \in P(X)$ .

**Definition 3** En familie  $\mathcal{A}$  af delmængder af en mængde  $X$  kaldes en algebra, hvis

- (i)  $X \in \mathcal{A}$ ,
- (ii)  $A \in \mathcal{A}$  medfører  $\complement A \in \mathcal{A}$ ,
- (iii)  $A, B \in \mathcal{A}$  medfører  $A \cup B \in \mathcal{A}$ .

Enhver  $\sigma$ -algebra er en algebra. Det modsatte gælder ikke, men vi har følgende lemma, hvis bevis overlades til læseren (= Opgave 1, som regnes til øvelserne):

**Lemma 4** Lad  $\mathcal{A}$  være en algebra på mængden  $X$ , og antag  $\mathcal{A}$  er afsluttet under tællelige disjunkte foreninger, dvs. for alle følger  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  af parvis disjunkte mængder i  $\mathcal{A}$  gælder  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

Da er  $\mathcal{A}$  en  $\sigma$ -algebra.

**Theorem 5 (Carathéodory's Sætning)** *Lad  $\mu^*$  være et ydre mål på en mængde  $X$ . Lad  $\mathbb{E}$  være familien af alle  $\mu^*$ -målelige delmængder af  $X$ . Lad  $\mu$  være restriktionen af  $\mu^*$  til  $\mathbb{E}$ , dvs.  $\mu: \mathbb{E} \rightarrow [0, \infty]$  og  $\mu(E) = \mu^*(E)$  for  $E \in \mathbb{E}$ .*

*Da er  $(X, \mathbb{E}, \mu)$  et målrum.*

*Bevis:* Det skal vises, at  $\mathbb{E}$  er en  $\sigma$ -algebra, og at  $\mu$  er et mål på  $\mathbb{E}$ . Det følger umiddelbart af (1), at  $E \in \mathbb{E}$  medfører  $\complement E \in \mathbb{E}$ , og at  $\emptyset$  og  $X$  begge ligger i  $\mathbb{E}$ .

For  $E, F \in \mathbb{E}$  og  $A \in P(X)$  har vi

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E) \\ &= \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap \complement F) + \mu^*(A \cap \complement E \cap F) + \mu^*(A \cap \complement E \cap \complement F) \\ &\geq \mu^*((A \cap E \cap F) \cup (A \cap E \cap \complement F) \cup (A \cap \complement E \cap F)) + \mu^*(A \cap \complement E \cap \complement F) \\ &= \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap \complement(E \cup F)).\end{aligned}$$

Dette viser, at  $E, F \in \mathbb{E}$  medfører  $E \cup F \in \mathbb{E}$ . Det er nu vist, at  $\mathbb{E}$  er en algebra.

Lad nu  $\{E_n\}_{n=1}^\infty$  være en følge af parvis disjunkte mængder beliggende i  $\mathbb{E}$ . Sæt  $F_n = \bigcup_{j=1}^n E_j$ , og bemærk, at  $F_n \in \mathbb{E}$ , da  $\mathbb{E}$  er en algebra. Sæt  $F = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$  ( $= \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ ). Hovedslaget, der skal udkæmpes i dette bevis, består i at vise:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap \complement F) = \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F), \quad (3)$$

for alle  $A \in P(X)$ .

For at se (3), bemærk først

$$A = (A \cap F) \cup (A \cap \complement F) = \left( \bigcup_{j=1}^\infty A \cap E_j \right) \cup (A \cap \complement F).$$

Sammen med Definition 1 (iii) giver dette

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap \complement F) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F). \quad (4)$$

Omvendt, for alle  $n \geq 2$  har vi

$$\mu^*(A \cap F_n) = \mu^*(A \cap F_n \cap E_n) + \mu^*(A \cap F_n \cap \complement E_n) = \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap F_{n-1}).$$

Det følger heraf ved induktion, at

$$\mu^*(A \cap F_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(A \cap E_j),$$

for alle  $n \geq 1$ . (Til grundtrinnet  $n = 1$  benyttes at  $F_1 = E_1$ .) Ved at benytte  $\complement F \subseteq \complement F_n$  og (ii) i Definition 1 får vi

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap \complement F_n) \\ &= \sum_{j=1}^n \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F_n) \\ &\geq \sum_{j=1}^n \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F).\end{aligned}$$

Da dette gælder for alle  $n \in \mathbb{N}$ , har vi  $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F) \leq \mu^*(A)$ . Sammen med (4) viser dette (3).

Det følger umiddelbart af (3), at  $F \in \mathbb{E}$ . Derfor er  $\mathbb{E}$  afsluttet under tællelige disjunkte foreninger, så  $\mathbb{E}$  er en  $\sigma$ -algebra jvf. Lemma 4. Sættes  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j (= F)$  i (3), får vi

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

(Husk at  $\mu(E) = \mu^*(E)$  for  $E \in \mathbb{E}$ .) Dette viser, at  $\mu$  er et mål på  $\sigma$ -algebraen  $\mathbb{E}$ .  $\square$

Vi vender os nu til konstruktionen af Lebesguemålet på den reelle akse.

**Definition 6** Et  $h$ -interval er et delinterval af  $\mathbb{R}$  af formen  $(a, b]$ ,  $(a, \infty)$ , eller  $\emptyset$ , hvor  $-\infty \leq a < b < \infty$ . Mængden af alle  $h$ -intervaller benævnes med  $\mathbb{I}$ .

Bemærk, at hvis  $I$  er et  $h$ -interval, så er  $\complement I$  enten igen et  $h$ -interval eller en disjunkt forening af to  $h$ -intervaller. Thi i tilfældet hvor  $I = (a, b]$  og  $-\infty < a < b < \infty$ , da er  $\complement I$  en disjunkt forening af to  $h$ -intervaller, og i alle andre tilfælde er  $\complement I$  et  $h$ -interval. Snitmængden af to  $h$ -intervaller er igen et  $h$ -interval.

**Definition 7** Definer  $\ell: \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty]$  ved

$$\ell((a, b]) = b - a, \quad \ell((a, \infty)) = \infty, \quad \ell(\emptyset) = 0.$$

Definer  $m^*: P(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  ved

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) \mid I_j \in \mathbb{I}, \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}. \quad (5)$$

Strategien er nu at vise, at  $m^*$  er et ydre mål, at alle  $h$ -intervaller er  $m^*$ -målelige, og at  $m^*(I) = \ell(I)$  for alle  $h$ -intervaller  $I$ . Dette gøres i nedenstående lemmaer. Herefter giver Carathéodory's sætning det ønskede resultat om eksistensen af Lebesguemålet (Theorem 13).

**Lemma 8**  $m^*$  er et ydre mål.

*Bevis:* Det skal vises, at (i), (ii) og (iii) i Definition 1 holder. (ii) er en umiddelbar konsekvens af definitionen af  $m^*$  (overvej dette!). (i) indsættes let ved f.eks. at vælge  $I_1 = I_2 = I_3 = \dots = \emptyset$ .

For at vise (iii), lad  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  være en vilkårlig følge i  $P(\mathbb{R})$ . Hvis  $m^*(A_n) = \infty$  for mindst et  $n$ , så gælder uligheden  $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$  trivelt. Antag derfor gerne, at  $m^*(A_n) < \infty$  for alle  $n$ . Lad  $\varepsilon > 0$ . Find for alle  $n$  følger  $\{I_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$  i  $\mathbb{I}$ , så

$$A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{n,j}) \leq m^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon.$$

Da er  $\{I_{n,j}\}_{j,n=1}^\infty$  en tællelig familie i  $\mathbb{I}$ , og

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{j,n=1}^{\infty} I_{n,j}, \quad \sum_{j,n=1}^{\infty} \ell(I_{n,j}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (m^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon.$$

Dette viser, at  $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon$ . Da dette holder for alle  $\varepsilon > 0$  følger det ønskede:  $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$ .  $\square$

**Lemma 9** Alle  $h$ -intervaller er  $m^*$ -målelige.

*Bevis:* Lad  $I$  være et  $h$ -interval. Vi viser, at  $I$  er  $m^*$ -målelig ved at eftervise (2).

Lad  $A \in P(\mathbb{R})$ , og betragt hertil en vilkårlig følge  $\{J_n\}_{n=1}^\infty$  af  $h$ -intervaller så  $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ . Som tidligere bemærket er  $\complement I$  foreningen af to disjunkte  $h$ -intervaller  $I'$  og  $I''$  (det ene af disse  $h$ -intervaller kunne være den tomme mængde). Sæt

$$K_n = I \cap J_n, \quad K'_n = I' \cap J_n, \quad K''_n = I'' \cap J_n.$$

Da er  $K_n, K'_n, K''_n$  parvis disjunkte  $h$ -intervaller, og  $J_n = K_n \cup K'_n \cup K''_n$ . Derfor er  $\ell(J_n) = \ell(K_n) + \ell(K'_n) + \ell(K''_n)$  (overvej). Endvidere gælder

$$A \cap I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \quad A \cap I' \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K'_n, \quad A \cap I'' \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K''_n.$$

Samlet har vi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K'_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K''_n) \\ &\geq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I') + m^*(A \cap I''), \end{aligned}$$

hvor  $\geq$  skyldes (5). Da overdækningen  $\{J_n\}_{n=1}^\infty$  af  $A$  var vilkårlig, kan vi igen ifølge (5) konkludere, at

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I') + m^*(A \cap I'') \\ &\geq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap (I' \cup I'')) \\ &= m^*(A \cap I) + m^*(A \cap \complement I). \end{aligned}$$

Det ses nu, at (2) er opfyldt, så  $I$  er  $m^*$ -målelig.  $\square$

**Lemma 10** Hvis

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j),$$

hvor  $a \leq b$  og  $a_j < b_j$  for  $j = 1, 2, \dots, n$ , så er

$$b - a \leq \sum_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

*Bevis:* Beviset føres ved induktion efter  $n$ . Overvej selv situationen for  $n = 1$ . Antag  $n \geq 2$ , at  $[a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j)$ , og at påstanden i lemmaet er vist for alle overdækninger med færre end  $n$  intervaller. Find  $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$  så  $a \in (a_{j_0}, b_{j_0})$ . Hvis  $b_{j_0} > b$ , så er  $[a, b] \subseteq (a_{j_0}, b_{j_0})$ , og sagen er klar!

Antag  $b_{j_0} \leq b$ . Da er

$$[b_{j_0}, b] = [a, b] \setminus (a_{j_0}, b_{j_0}) \subseteq \bigcup_{j \neq j_0} (a_j, b_j).$$

Induktionsantagelsen giver derfor  $b - b_{j_0} \leq \sum_{j \neq j_0} (b_j - a_j)$ . Dermed har vi

$$\begin{aligned} b - a &= (b - b_{j_0}) + (b_{j_0} - a) \leq (b - b_{j_0}) + (b_{j_0} - a_{j_0}) \\ &\leq \sum_{j \neq j_0} (b_j - a_j) + (b_{j_0} - a_{j_0}) = \sum_{j=1}^n (b_j - a_j). \end{aligned} \quad \square$$

**Lemma 11** *Lad  $I, I_1, I_2, I_3, \dots$  være  $h$ -intervaller, således at  $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ . Da gælder*

$$\ell(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).$$

*Bevis:* Hvis  $I = \emptyset$ , så er der intet at vise. Antag derfor gerne, at  $I \neq \emptyset$ . Endvidere, hvis  $\ell(I_n) = \infty$  for mindst et  $n$ , så er der heller intet at vise. Vi kan derfor også antage, at  $\ell(I_n) < \infty$  for alle  $n$ . Dvs.  $I_n = (a_n, b_n]$ , hvor  $-\infty < a_n < b_n < \infty$  (idet vi også smider alle tomme mængder blandt intervallerne  $I_1, I_2, \dots$  ud).

Bemærk, at

$$\ell(I) = \sup\{b' - a' \mid a', b' \in I, a' < b'\}, \quad (6)$$

når  $I \neq \emptyset$ . Lad  $a', b' \in I$  med  $a' < b'$  være givet.

Lad  $\varepsilon > 0$ , og sæt  $a'_n = a_n$ , og  $b'_n = b_n + \varepsilon 2^{-n}$ . Da er  $I_n = (a_n, b_n] \subseteq (a'_n, b'_n)$ , så  $[a', b'] \subseteq I \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (a'_j, b'_j)$ . Da  $[a', b']$  er kompakt giver Heine-Borel's sætning  $[a', b'] \subseteq \bigcup_{j=1}^n (a'_j, b'_j)$  for et passende stort  $n$ .

Det følger nu fra Lemma 10, at

$$\begin{aligned} b' - a' &\leq \sum_{j=1}^n (b'_j - a'_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (b_j + \varepsilon 2^{-j} - a_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (\ell(I_j) + \varepsilon 2^{-j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  var vilkårlig, får vi  $b' - a' \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j)$ , og da  $a', b'$  også var vilkårlige følger det ønskede af (6).  $\square$

**Lemma 12** *For ethvert  $h$ -interval  $I$  er  $m^*(I) = \ell(I)$ .*

*Bevis:* Sæt  $I_1 = I$ ,  $I_2 = I_3 = \dots = \emptyset$ . Da er  $I_1, I_2, I_3, \dots$   $h$ -intervaller og  $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ , så

$$m^*(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \ell(I)$$

ifølge definitionen af  $m^*$ . Omvendt, hvis  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  er en følge af  $h$ -intervaller med  $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ , da er  $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \geq \ell(I)$  ifølge Lemma 11. Dette viser, at  $m^*(I) \geq \ell(I)$ .  $\square$

**Theorem 13** *Der findes et målrum  $(\mathbb{R}, \mathbb{L}, m)$ , som opfylder  $\mathbb{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{L}$  og*

$$m((a, b]) = b - a,$$

*for alle  $a, b$  med  $-\infty \leq a < b < \infty$ .*

*Bevis:* Lad  $\mathbb{L}$  være mængden af alle  $m^*$ -målelige mængder, og lad  $m$  være restriktionen af  $m^*$  til  $\mathbb{L}$ . Carathéodory's sætning giver, at  $(\mathbb{R}, \mathbb{L}, m)$  er et målrum. Lemma 9 giver  $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{L}$ . Da  $\sigma$ -algebraen frembragt af  $\mathbb{I}$  er lig med Borel- $\sigma$ -algebraen  $\mathbb{B}(\mathbb{R})$  (jvf. Opgave 1.2), så giver Sætning 1.2 i noterne, at  $\mathbb{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathbb{I}) \subseteq \mathbb{L}$ .

Endelig, hvis  $-\infty \leq a < b < \infty$ , så er  $(a, b]$  et  $h$ -interval, og ved at udnytte Lemma 12 får vi

$$m((a, b]) = m^*((a, b]) = \ell((a, b]) = b - a. \quad \square$$

Ved at tage restriktionen af målet  $m$  til Borel- $\sigma$ -algebraen  $\mathbb{B}(\mathbb{R})$  får vi følgende korollar til Theorem 13:

**Korollar 14** *Der findes et mål  $m$  defineret på  $\sigma$ -algebraen  $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ , som opfylder*

$$m((a, b]) = b - a,$$

*for alle  $a, b$  med  $-\infty \leq a < b < \infty$ .*

Hovedsætning 5.1 i noterne siger, at målet  $m$  i Korollar 14 tillige er entydigt.

Eksistensen af Lebesguemålet på  $\mathbb{R}^k$  kan vises på en tilsvarende, men mere besværlig, måde. Istedet vil vi, når tiden er moden, konstruere Lebesguemålet på  $\mathbb{R}^k$  ved at bruge teorien for produktmål, som udvikles i noternes §6.

## 2 Fuldstændige mål

Målet i Carathéodory's Sætning — og dermed også Lebesguemålet  $m$  defineret på  $\sigma$ -algebraen  $\mathbb{L}$  — har en særlig fin og nyttig egenskab kaldet fuldstændighed. Denne egenskab defineres formelt således:

**Definition 15** *Et målrum  $(X, \mathbb{E}, \mu)$  kaldes fuldstændigt, hvis alle  $\mu$ -nulmængder ligger i  $\mathbb{E}$ .*

Bemærk, at  $(X, \mathbb{E}, \mu)$  er fuldstændig, hvis og kun hvis det for alle  $E \in \mathbb{E}$  med  $\mu(E) = 0$ , og alle  $N \subseteq E$  gælder, at  $N \in \mathbb{E}$ . Af og til vil man sige, at  $\mu$  er fuldstændig i betydningen  $(X, \mathbb{E}, \mu)$  er fuldstændig, når  $X$  og  $\mathbb{E}$  fremgår af sammenhængen.

Fuldstændige mål er diskuteret i opgaverne 3.15–3.18 i noterne. Fuldstændige mål er bekvemme at arbejde med, bl.a. p.g.a. følgende sætning, som til dels er bevist i Opgave 3.18.

**Sætning 16** *Lad  $(X, \mathbb{E}, \mu)$  være et fuldstændigt målrum, og lad  $(Y, \mathbb{F}, \nu)$  være et vilkårligt andet målrum (ikke nødvendigvis fuldstændigt). Hvis  $f: X \rightarrow Y$  er  $\mathbb{E}$ - $\mathbb{F}$ -målelig, og hvis  $g: X \rightarrow Y$  opfylder  $g = f$   $\mu$ -n.o., så er  $g$  også  $\mathbb{E}$ - $\mathbb{F}$ -målelig.*

Til ethvert målrum  $(X, \mathbb{E}, \mu)$  kan man konstruere et nyt målrum  $(X, \bar{\mathbb{E}}, \bar{\mu})$ , som er fuldstændigt, og som opfylder  $\mathbb{E} \subseteq \bar{\mathbb{E}}$  og  $\bar{\mu}|_{\mathbb{E}} = \mu$  (se Opgave 3.17 eller Opgave 4 nedenfor). Dette nye målrum kaldes en *fuldstændiggørelse* af  $(X, \mathbb{E}, \mu)$ . Lebesguesmålet konstrueret i Theorem 13 er, som vist nedenfor, automatisk fuldstændigt, så vi får ikke brug for denne fuldstændiggørelsесmaskine.

**Sætning 17** *Målrummet  $(X, \mathbb{E}, \mu)$  fra Carathéodory's Sætning (Theorem 5) er fuldstændigt.*

*Bevis:* Vi benytter notationen fra Theorem 5, hvor bl.a.  $\mu^*$  er et ydre mål på mængden  $X$ ,  $\mathbb{E}$  er mængden af  $\mu^*$ -målelige mængder, og  $\mu$  er restriktionen af  $\mu^*$  til  $\mathbb{E}$ .

Lad  $E \in \mathbb{E}$  og  $N \subseteq E$  med  $\mu(E) = 0$  være givet, og lad  $A \in P(X)$ . Da er

$$\mu^*(A \cap N) + \mu^*(A \cap \complement N) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A) = \mu^*(A).$$

Betingelsen (2) er således opfyldt for  $N$ , så  $N \in \mathbb{E}$ . Dette viser, at  $\mu$  er fuldstændig.  $\square$

**Korollar 18** *Lebesguemålet  $m$  defineret på  $\sigma$ -algebraen  $\mathbb{L}$  (defineret i Theorem 13) er fuldstændigt.*

*Bevis:* Dette følger umiddelbart af Sætning 17, idet målrummet  $(\mathbb{R}, \mathbb{L}, m)$  kommer fra et ydre mål via Carathéodory's Sætning.  $\square$

Mængderne i  $\sigma$ -algebraen  $\mathbb{L}$  kaldes *Lebesguemålelige mængder*. Alle Borel-delmængder af  $\mathbb{R}$  er således Lebesguemålelige. Det omvendte gælder ikke. Faktisk har vi

$$\mathbb{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{L} \subsetneq P(\mathbb{R}). \quad (7)$$

Den første af disse ægte inklusioner kan ses ved en kardinalitetsbetragtning, idet  $\text{card}(\mathbb{L}) = \text{card}(P(\mathbb{R}))$  og  $\text{card}(\mathbb{B}(\mathbb{R})) = \text{card}(\mathbb{R})$ . Den første af disse identiteter kan indsies ved at benytte Cantor's mængde  $Z$  (se Eksempel 5.22 i noterne). Mængden  $Z$  er kompakt (og dermed  $Z \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{L}$ ),  $m(Z) = 0$ , og  $\text{card}(Z) = \text{card}(\mathbb{R})$ . Da  $(\mathbb{R}, \mathbb{L}, m)$  er fuldstændig, har vi  $P(Z) \subseteq \mathbb{L}$ . Dette giver  $\text{card}(P(\mathbb{R})) = \text{card}(P(Z)) \leq \text{card}(\mathbb{L}) \leq \text{card}(P(\mathbb{R}))$ . Den anden kardinalitetsidentitet er noget mere kompliceret.

Den anden ægte inklusion i (7) følger umiddelbart af Vitali's Sætning (Sætning 5.30 i noterne).

En funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , hhv.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , kaldes *Lebesguemålelig*, hvis den er  $\mathbb{L}\mathbb{B}(\mathbb{R})$ -målelig, hhv.  $\mathbb{L}\mathbb{B}(\mathbb{C})$ -målelig.

Alle Borelfunktioner  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  og  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  er således Lebesguemålelige (da  $\mathbb{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{L}$ ). Endvidere, hvis  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , hvis  $f$  er Lebesguemålelig, og hvis  $f = g$  m-n.o., så er  $g$  Lebesguemålelig ifølge Sætning 16.

Lad  $[a, b]$  være et kompakt delinterval af  $\mathbb{R}$ , og sæt

$$\mathbb{L}([a, b]) = \{E \cap [a, b] \mid E \in \mathbb{L}\} \quad (= \mathbb{L}_{[a, b]}).$$

Det kan (ret nemt) vises, at  $([a, b], \mathbb{L}([a, b]), m)$  er et fuldstændigt målrum, og at  $\mathbb{B}([a, b]) \subseteq \mathbb{L}([a, b])$ . I Opgave 3 nedenfor vises det, at  $\mathcal{L}([a, b], \mathbb{L}([a, b]), m)$  indeholder alle Riemann-integrable funktioner  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , og at Lebesgueintegralet stemmer overens med Riemannintegralet, når Riemannintegralet er defineret.

Der findes eksempler på Riemannintegrable funktioner, som ikke er Borelmålelige (se Opgave 4).

### 3 Opgaver

**Opgave 1** Bevis Lemma 4.

**Opgave 2** Lad  $X$  være en ikke-tom mængde, og definér  $\mu^*: P(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ved  $\mu^*(\emptyset) = 0$  og  $\mu^*(E) = 1$  for alle  $E \in P(X) \setminus \{\emptyset\}$ . Vis at  $\mu^*$  er et ydre mål, og bestem alle  $\mu^*$ -målelige delmængder af  $X$ .

**Opgave 3** Lad  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  være en Riemannintegrabel funktion, hvor Riemannintegralet er defineret på sædvanlig vis ved hjælp af over- og undersummer.

(i) Vis at der findes følger af funktioner

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq f \leq \cdots \leq t_3 \leq t_2 \leq t_1,$$

hvor funktionerne  $s_j$  og  $t_j$  er på formen  $\sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{[x_{i-1}, x_i]}$ , for passende inddelinger,  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$  af intervallet  $[a, b]$ , og for passende reelle tal  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , således at

$$\sup_n \int_{[a,b]} s_n dm = \int_a^b f(x) dx = \inf_n \int_{[a,b]} t_n dm.$$

(ii) Vis at der findes  $g_1, g_2 \in \mathcal{L}([a, b], \mathbb{B}([a, b]), m)$ , så  $g_1 \leq f \leq g_2$  og

$$\int_{[a,b]} g_1 dm = \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} g_2 dm.$$

(iii) Vis at  $g_1 = f = g_2$  m-n.o.

(iv) Vis at  $f \in \mathcal{L}([a, b], \mathbb{L}([a, b]), m)$ , og at

$$\int_{[a,b]} f dm = \int_a^b f(x) dx.$$

**Opgave 4** Lad  $Z$  være Cantormængden (jvf. Eksempel 5.22 i noterne). Det erindres herfra, at  $Z$  er en kompakt delmængde af intervallet  $[0, 1]$ , at  $Z$  er overtællelig, og at  $m(Z) = 0$ .

- (i) Vis at  $1_A: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  er Riemannintegrabel, og at  $\int_0^1 1_A(x)dx = 0$  for enhver delmængde  $A$  af Cantormængden  $Z$ .
- (ii) Find et eksempel på en Riemannintegrabel funktion  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , som ikke er en Borelfunktion. [Vink: Mængden af Borel-delmængder af  $\mathbb{R}$  er tællelig]

**Opgave 5** Lad  $(X, \mathbb{F}, \lambda)$  være et målrum. I analogi med definitionen af  $m^*$  (i Definition 7) defineres  $\mu^*: P(X) \rightarrow [0, \infty]$  ved

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(F_j) \mid F_j \in \mathbb{F}, \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right\}.$$

Formålet med denne opgave er at undersøge hvad denne definition fører til, og at sætte undersøgelsen af  $m^*$  i relief. Som et biprodukt får vi en fuldstændiggørelse af  $\lambda$ , men dette kan opnås betydeligt enklere ved at følge Opgave 3.17.

- (i) Vis at

$$\mu^*(A) = \inf\{\lambda(F) \mid F \in \mathbb{F}, \quad A \subseteq F\},$$

for alle  $A \in P(X)$ , og vis, at der til ethvert  $A \in P(X)$  findes  $F \in \mathbb{F}$  således, at  $A \subseteq F$  og  $\mu^*(A) = \lambda(F)$ .

- (ii) Vis at  $\mu^*$  er et ydre mål.

Benævn med  $\mathbb{E}$  mængden af  $\mu^*$ -målelige delmængder af  $X$ , og lad  $\mu$  betegne restriktionen af  $\mu^*$  til  $\mathbb{E}$ .

- (iii) Gør rede for, at  $(X, \mathbb{E}, \mu)$  er et fuldstændigt målrum.
- (iv) Vis at  $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ , dvs. at alle mængder  $F$  i  $\mathbb{F}$  er  $\mu^*$ -målelige.
- (v) Vis at  $\mu(E) = \lambda(E)$  for alle  $E \in \mathbb{E}$ .
- (vi) Gør rede for, at  $(X, \mathbb{E}, \mu)$  er en fuldstændiggørelse af  $(X, \mathbb{F}, \lambda)$ .
- (vii) Beskriv  $(X, \mathbb{E}, \mu)$  i tilfældet, hvor  $\mathbb{F} = \{\emptyset, X\}$  og hvor  $\lambda(X) = 1$ .
- (viii) Antag at  $\lambda$  er  $\sigma$ -endelig. Vis at  $E \in \mathbb{E}$  hvis og kun hvis der findes  $F \in \mathbb{F}$  således at den symmetriske difference  $(E \setminus F) \cup (F \setminus E)$  er en  $\lambda$ -nulmængde.
- (ix) Beskriv  $(X, \mathbb{E}, \mu)$  i tilfældet, hvor  $\lambda(F) = \infty$  for alle ikke-tomme  $F \in \mathbb{F}$ . Vis at resultatet fra spørgsmål (viii) ikke holder generelt uden antagelsen om, at  $\lambda$  er  $\sigma$ -endelig.