3MI-eksamen — Forårspensum — 14. januar 2000

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Opgavesættet er på 2 sider og består af 7 opgaver.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter er med alle sædvanlige hjælpemidler. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af stilopgaven (Opgave 1). Opgave 1 vægtes med 90 point, og de øvrige opgaver (Opgave 2 – 7) vægtes med tilsammen 90 point.

Opgave 1 — stilopgave (90 point)

Integral med reel parameter

For at komme godt i gang med opgaven kridtes banen op: Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, lad I være et interval på $\mathbb{R}$, og lad $f\colon X \times I \to \mathbb{C}$ være en funktion, hvorom det gælder, at snitfunktionerne f^t tilhører $\mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ for alle t i I. Husk at $f^t(x) = f(x,t)$. Sæt

$$F(t) = \int_X f^t \, d\mu = \int_X f(x,t) \, d\mu(x), \quad t \in I.$$

Formuler og bevis en sætning, som udtaler sig om kontinuitet af F (Sætning 4.26).

Formuler og bevis en sætning, som udtaler sig om differentiabilitet af F, og hvori et udtryk for den afledede F' gives (Sætning 4.28).

Opgave 2 (10 point) Lad E være mængden af punkter $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, for hvilke enten x eller y er rational. Vis at E er en Borel delmængde af $\mathbb{R}^2$, og bestem $m_2(E)$, hvor m_2 er Lebesguemålet på $\mathbb{R}^2$.

Opgave 3 (20 point) Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. For hvert naturligt tal n sæt

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{hvis } |f(x)| \le n, \\ n, & \text{hvis } f(x) > n, \\ -n, & \text{hvis } f(x) < -n. \end{cases}$$

(i) Begrund at f_n er målelig for alle naturlige tal n.

(ii) Vis at f er integrabel mht. Lebesguemålet m på $\mathbb{R}$ hvis

$$(\dagger) \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |f_n|\, dm < \infty.$$

(iii) Undersøg om man omvendt kan slutte at (†) gælder, hvis det vides, at f er integrabel.

Opgave 4 (15 point) Sæt

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq y \leq \pi/2\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

og lad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos(y)/y, & \text{hvis } (x,y) \in A, \\ 0, & \text{hvis } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \end{cases}$$

Gør omhyggeligt rede for, at

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dm_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dm(x)\Big) dm(y) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dm(y)\Big) dm(x),$$

og beregn dernæst integralet.

Opgave 5 (15 point) Vis at

$$\Big| \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\, dx \Big| \leq \sqrt[3]{16} \Big(\int_0^1 |f(x)|^3\, dx \Big)^{1/3}$$

for alle $f \in \mathcal{L}_3([0,1], m)$.

Opgave 6 (10 point) Gør omhyggeligt rede for, at

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \cos\Big(\frac{x^2+1}{n}\Big) e^{-x} dx = 1.$$

Opgave 7 (20 point) Lad μ være tællemålet på $\mathbb{Z}$, lad som sædvanligt m være Lebesguemålet på $\mathbb{R}$, og sæt

$$E = \{(t,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \mid |t| + |n| \leq 2\}.$$

(i) Gør rede for, at E tilhører produkt σ-algebraen $\mathbb{B}(\mathbb{R}) \otimes P(\mathbb{Z})$.

(ii) Bestem snittet E^n for alle $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Bestem $(m \otimes \mu)(E)$, hvor $m \otimes \mu$ er produktmålet på $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.