3MI-eksamen — Forårspensum — 14. januar 1999

Dette eksamenssæt er beregnet for dem, som har fulgt kurset 3MI i foråret 1998

Opgave 1 — stilopgave (50 point)

Formuler og bevis sætningen om eksistensen af Lebesguemålet.

Din besvarelse skal indeholde punkterne (i), (ii), (iii) og (vii), samt mindst et af punkterne (iv), (v) og (vi), nedenfor:

(i) En definition af begrebet et ydre mål, og hvad det vil sige, at en delmængde er målelig med hensyn til et ydre mål.

(ii) En formulering af Carathéodory's sætning. (Du skal ikke *bevise* Carathéorodory's sætning.)

(iii) En definition af det ydre mål m^* på den reelle akse, herunder

(iv) et bevis for, at m^* faktisk er et ydre mål.

(v) Et bevis for, at ethvert h-interval er m^*-målelig.

(vi) Et bevis for, at $m^*((a, b]) = b - a$.

(vii) En redegørelse for, at ovenstående fører til et bevis for eksistensen af Lebesguemålet.

Opgave 2 (25 point) Denne opgave består af seks korte spørgsmål, som ikke afhænger af hinanden.

(i) Bestem

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^3} 1_{(0,n]} \, dm,$$

og giv en omhyggelig begrundelse for dit svar.

(ii) Betragt det målbare rum $(\mathbb{Z}, P(\mathbb{Z}))$, og betragt, for hvert $a \in \mathbb{Z}$, Dirac-målet ε_a i a. Lad $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ være bestemt ved $f(x) = \cos(x^2)$. Beregn

$$\int_{\mathbb{Z}} f \, d(\varepsilon_{-1} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1).$$

(iii) Lad $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ være en følge af funktioner, som er integrable med hensyn til Lebesguemålet m. Antag videre, at $f_n \to 0$ punktvis. Kan man slutte, at

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0\,?$$

Giv et bevis eller et modeksempel.

(iv) Bestem

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \sin(x)(\sqrt{x^2+1/n}-x)e^{-x}dx,$$

og giv en omhyggelig begrundelse for dit svar.

(v) Lad $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ være Borel funktioner, som opfylder $f = g$ m-n.o. Kan man slutte, at $f(x) = g(x)$ for alle $x\in\mathbb{R}$? Giv et bevis eller et modeksempel.

(vi) Lad $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ være kontinuerte funktioner, som opfylder $f = g$ m-n.o. Kan man slutte, at $f(x) = g(x)$ for alle $x\in\mathbb{R}$? Giv et bevis eller et modeksempel.

Opgave 3 (15 point) Betragt funktionen $f\colon [0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} -xe^{-y}, & \text{hvis } y > x \geq 0 \\ ye^{-x}, & \text{hvis } x \geq y \geq 0 \end{cases}.$$

(i) Gør rede for, at f er en Borel funktion.

(ii) Gør omhyggeligt rede for, at hvert af nedenstående tre integraler er definerede, og at de er lig med hinanden:

$$\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} f\, d(m\otimes m), \quad \int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\,dxdy, \quad \int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\,dydx.$$

(iii) Udregn (et af) integralerne i (ii).

Opgave 4 (10 point) Betragt funktionen $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ givet ved

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}.$$

Lad μ være målet på $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ givet ved

$$\mu(E) = \int_E f\, dm,$$

hvor m er Lebesguemålet. Det oplyses, og skal ikke vises, at μ er et mål på Borel-σ-algebraen $\mathbb{B}(\mathbb{R})$.

(i) Gør rede for, at $\mu \ll m$, og bestem den Radon-Nikodym afledede $d\mu/dm$.

(ii) Udregn

$$\int_0^\infty x\, d\mu(x).$$