Matematik 3 MI

Opgave til besvarelse i 3 timer.
Opgavesættet er på 3 sider og består af 7 opgaver.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter er med alle sædvanlige hjælpemidler, dog ikke lommeregnere og andet elektronisk udstyr.

Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af stilopgaven (Opgave 1).

Opgave 1 vægtes med 90 points, og de øvrige opgaver (Opgave 2 – 7) vægtes med tilsammen 90 points.

Opgave 1 — Stilopgave (90 points)

Sigma-algebraer og målelige afbildninger

a) Definer begreberne σ-algebra, målbart rum og målelig afbildning.

b) Lad X være en mængde og $\mathbb{D}$ et system af delmængder af X. Forklar hvorledes σ-algebraen frembragt af $\mathbb{D}$–betegnet $\sigma(\mathbb{D})$– er defineret.

c) Definer begrebet Borel mængde i $\mathbb{R}^k$.

d) Bevis følgende resultat:

Lad $\varphi : X \to Y$ være en afbildning og lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra på X. Så er mængdesystemet

$$\mathbb{F} = \{F \in \mathcal{P}(Y) \mid \varphi^{-1}(F) \in \mathbb{E}\}$$

en σ-algebra på Y.

e) Formuler og bevis sætningen om grænseovergang med målelige funktioner (Sætning 2.7). (Dette spørgsmål tæller 40 points)

Opgave 2 (10 points)

Bestem grænseværdien

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \sin\left(\frac{x}{n} + \frac{\pi}{6}\right) e^{-x}\, dx.$$

Der skal argumenteres omhyggeligt for hvert skridt.

Opgave 3 (15 points)

Sæt

$$F(t) = \int_0^\pi \sin(x + t\cos x)\,dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Gør rede for, at F er kontinuert og differentiabel og at

$$F'(t) = \int_0^\pi \cos(x + t\cos x)\cos x\,dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opgave 4 (15 points)

Vis, at

$$\left|\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx\right| \leq \sqrt[4]{27}\Big(\int_1^\infty |f(x)|^4\,dx\Big)^{1/4}$$

for alle $f \in \mathcal{L}_4([1,\infty[, m)$.

Opgave 5 (10 points)

Betragt funktionen

$$f = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\sqrt{n}\,1_{[n,n+\frac{1}{n^3}[}.$$

Gør rede for, at $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, m)$.

Opgave 6 (15 points)

Gør omhyggeligt rede for at

$$\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^1 \frac{\sin(x+y)}{\sqrt{x}}\,dx\Big)\,dy = \int_0^1\Big(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x+y)}{\sqrt{x}}\,dy\Big)\,dx.$$

Opgave 7 (25 points)

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, lad $f : X \to [0,\infty[$ være en $\mathbb{E}$-målelig funktion og sæt

$$E_t = \{x \in X \mid f(x) \geq t\}, \quad t \in [0,\infty[.$$

Opgave 7 fortsættes på side 3

a) Gør rede for, at $E_t \in \mathbb{E}$ for $t \in [0, \infty[$.

Betragt funktionen

$$\varphi(t) = \mu(E_t), \quad t \in [0, \infty[.$$

b) Vis, at φ er aftagende, altså at

$$\forall s, t \in [0, \infty[: s < t \implies \varphi(s) \geq \varphi(t).$$

c) Vis, at

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(1/n) = \mu(X_0),$$

hvor $X_0 = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$.