Matematik 3 MI

Opgave til besvarelse i 3 timer.
Opgavesættet er på 3 sider og består af 7 opgaver.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter er med alle sædvanlige hjælpemidler. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af stilopgaven (Opgave 1). Opgave 1 vægtes med 90 points, og de øvrige opgaver (Opgave 2 – 7) vægtes med tilsammen 90 points.

Opgave 1 — Stilopgave (90 points)

Tonellis og Fubinis sætninger.

Lad der være givet to målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$, $(Y, \mathbb{F}, \nu)$, som begge antages σ-endelige. I besvarelsen kan benyttes, at produktmålet $\mu \otimes \nu$ er det entydigt bestemte mål på produkt σ-algebraen $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ som opfylder $\mu \otimes \nu (A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ for $A \in \mathbb{E}$, $B \in \mathbb{F}$. Produktmålet er for $G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ givet ved formlen

$$\mu \otimes \nu(G) = \int_X \nu(G_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(G^y) d\nu(y) \,,$$

idet det også kan betragtes som kendt, at funktionerne $x \mapsto \nu(G_x)$ og $y \mapsto \mu(G^y)$ er målelige på henholdsvis X og Y. Husk, at

$$G_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in G\} \ \text{ for } \ x \in X \,; \quad G^y = \{x \in X \mid (x,y) \in G\} \ \text{ for } \ y \in Y \,.$$

a) Formuler og bevis Tonellis sætning om integration af $f \in \mathcal{M}^+(X \times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F})$.
b) Formuler og bevis Fubinis sætning.
c) Vis, at for $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, $g \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{F}, \nu)$ er $f \otimes g \in \mathcal{L}(X \times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}, \mu \otimes \nu)$ og der gælder

$$\int_{X \times Y} f \otimes g d(\mu \otimes \nu) = \int_X f d\mu \int_Y g d\nu \,.$$

Opgave 2 (10 points)

Bestem

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}{2^n} \,.$$

Der skal argumenteres omhyggeligt for hvert skridt.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (20 points)

For enhver Borel mængde $E \subseteq \mathbb{R}$ defineres

$$\mu(E) = \int_E \frac{dm(x)}{1+x^2},$$

hvor m som sædvanligt er Lebesguemålet på $\mathbb{R}$.

(i) Gør rede for (f.eks. ved henvisning til relevant sted i noterne), at μ er et mål på $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ og at

$$\int |x|^a d\mu(x) = \int \frac{|x|^a}{1+x^2} dm(x) \qquad (*)$$

for hvert $a \in \mathbb{R}$. (Som sædvanlig er $0^a = \infty$ når $a < 0$ og $|x|^0 = 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$).

(ii) Vis, at værdien af $(*)$ er endelig når $-1 < a < 1$.

Opgave 4 (10 points)

For hvert $p \geq 1$ betegner $\mathcal{L}_p([0,1])$ rummet af p-dobbelt integrable funktioner på $[0,1]$ forsynet med Lebesguemålets restriktion til $[0,1]$.

Udregn $\|f\|_p$ for $1 \leq p < \infty$ for funktionen $f(x) = x$, og gør rede for (f.eks. ved henvisning til relevant sted i noterne), at funktionen $p \mapsto \|f\|_p$ er voksende for $p \in [1, \infty[$.

Opgave 5 (15 points)

Lad S være enhedssfæren i $\mathbb{R}^3$ givet ved

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Vis, at $m_3(S) = 0$, hvor m_3 er Lebesguemålet på $\mathbb{R}^3$. (*Vink:* Benyt at m_3 kan opfattes som et produktmål).

Opgave 6 (15 points)

Lad $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ være defineret ved

$$f(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 1 \\ \frac{k}{t}\,, & k \leq t < k+1\,,\ k = 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

(i) Skitser grafen for f og gør rede for, at f er en Borel funktion.

(ii) Vis, at $\int f dm = \infty$, hvor m er Lebesguemålet på $\mathbb{R}$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 7 (20 points)

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et vilkårligt målrum og definer $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ved

$$\mu^*(A) := \inf\{\mu(E) \mid A \subseteq E, E \in \mathbb{E}\} \quad \text{for} \quad A \in \mathcal{P}(X)\,,$$

idet $\mathcal{P}(X)$ som sædvanlig betegner systemet af alle delmængder af X.

Vis, at μ^* er et ydre mål.