3MI-eksamen — Forårspensum — 23. maj 2000

Eksamenssæt og vejledende besvarelse

Opgave 1 — stilopgave (90 point)

Hölder og Minkowski's uligheder.

Din besvarelse skal indeholde:

- En defintion af begrebet *duale eksponenter*,
- En formulering af Hölder's ulighed og af Minkowski's ulighed,
- Et bevis for begge ulighederne i punktet ovenfor!

For at komme godt igang med opgaven oplyses det, at et skridt på vejen til beviset for Hölder's ulighed består i at vise *Younge's ulighed*:

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}, \qquad u, v \in [0, \infty[,$$

når p og q er duale eksponenter. (En del af din opgave er at vise Younge's ulighed — du får altså *ikke* beviset for denne ulighed foræret!)

Der er ingen vejledende besvarelse af denne opgave

Opgave 2 (10 point) Bestem

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{1 + x^2/n})}{1 + x^2} dx.$$

Du skal argumentere omhyggeligt for hvert skridt.

Svar: Vi har

$$\frac{\cos(\sqrt{1 + x^2/n})}{1 + x^2} \to \frac{\cos(1)}{1 + x^2} \quad \text{for} \ \ n \to \infty, \quad \text{og} \quad \left| \frac{\cos(\sqrt{1 + x^2/n})}{1 + x^2} \right| \leq \frac{1}{1 + x^2} = g(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og for alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx < \infty$, er g en integrabel majorant. Vi kan nu benytte Lebesgue's majorantsætning til at konkludere:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{1 + x^2/n})}{1 + x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(1)}{1 + x^2} dx = \cos(1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} \\ &= \cos(1) \arctan(x) \Big|_{x=-\infty}^{\infty} = \cos(1)\pi. \end{aligned}$$

Opgave 3 (10 point) Lad G være en åben ikke-tom delmængde af planen $\mathbb{R}^2$, og lad som sædvanligt m_2 være Lebesguemålet på $\mathbb{R}^2$. Vis at $m_2(G) > 0$. [Vink: Benyt f.eks. Sætning 1.3.]

Svar: Sætning 1.3 giver, at G er en (tællelig) forening af standardterninger af typen $]a_1, b_1]\times]a_2, b_2]$. Specielt findes en (ikke-tom) standardterning $]a_1, b_1]\times]a_2, b_2]$, som er indeholdt i G. At terningen ikke er tom vil sige, at $b_1 > a_1$ og $b_2 > a_2$. Nu er

$$m_2(G) \geq m_2(]a_1, b_1]\times]a_2, b_2]) = m(]a_1, b_1])m(]a_2, b_2]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) > 0.$$

Opgave 4 (15 point) For hver Borel mængde E i $\mathbb{R}$, sæt

$$\mu(E) = \int_E t^2 dm(t),$$

hvor m som sædvanligt er Lebesguemålet på $\mathbb{R}$.

(i) Gør rede for (f.eks. ved henvisning til relevant sted i noterne), at μ er et mål på $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$.

(ii) Bestem $\int_{\mathbb{R}} f d\mu$, hvor $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } \; -5 \leq x < 0, \\ 2, & \text{hvis } \; 0 \leq x \leq 7, \\ 0, & \text{hvis } \; x < -5 \text{ eller hvis } \; x > 7. \end{cases}$$

Svar: (i). Da funktionen $t \mapsto t^2$ er positiv og målelig, følger det af nederste halvdel af s. 4.18 i noterne, at μ er et mål på $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$.

(ii). Efter en lille omskrivning får vi: $f = 1_{[-5,0[} + 2 \cdot 1_{[0,7]}$. Dermed er

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \mu([-5, 0[) + 2 \cdot \mu([0, 7]).$$

Vi beregner

$$\begin{aligned} \mu([-5, 0[) &= \int_{[-5,0[} t^2 dt = \int_{-5}^{0} t^2 dt = 125/3, \\ \mu([0, 7]) &= \int_{[0,7]} t^2 dt = \int_0^7 t^2 dt = 343/3, \end{aligned}$$

Alt i alt har vi: $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = 125/3 + 2 \cdot 343/3 = 811/3$.

Opgave 5 (15 point) Lad C være enhedscirklen i $\mathbb{R}^2$ givet ved

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Vis at $m_2(C) = 0$, hvor m_2 er det sædvanlige Lebesguemål på $\mathbb{R}^2$. [Vink: Benyt f.eks. Korollar 6.8.]

Svar: Vi bestemmer først x-snittet C_x for hvert x i $\mathbb{R}$. For $-1 < x < 1$ er $C_x = \{-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\}$; $C_1 = C_{-1} = \{0\}$; og $C_x = \emptyset$ hvis $x < -1$ eller $x > 1$. Altså C_x indeholder enten 0, 1 eller 2 elementer. (Dette ses også ved en vellignende tegning!) Da alle endelige mængder har Lebesguemål 0, konkluderer vi, at $m(C_x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Korollar 6.8 giver nu:

$$m_2(C) = \int_{\mathbb{R}} m(C_x)dx = 0.$$

Opgave 6 (25 point) Betragt målrummet $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), m)$.

(i) Vis at $|\cos(x)|^n \to 0$ m-n.o. for $n \to \infty$.

(ii) Sæt $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[-\pi/4, \pi/4] + n\pi$. Vis at $m(A) = \infty$. Det oplyses (og skal ikke vises), at $|\cos(x)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}1_A$.

(iii) Er det sandt, at

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\cos(x)|^n dx = 0?$$

Dit svar skal begrundes. [Vink: Benyt f.eks. spørgsmål (ii).]

Svar: (i). Bemærk, at $|\cos(x)| \in [0, 1]$ for alle $x \in \mathbb{R}$, og at $\lim_{n\to\infty} t^n = 0$ hvis $t \in [0, 1[$. Dvs. $|\cos(x)|^n \to 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ hvorom det gælder, at $|\cos(x)| \neq 1$. Nu er $|\cos(x)| = 1$ hvis og kun hvis $x \in \mathbb{Z}\pi$, og dermed $|\cos(x)|^n \to 0$ for alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$. Da $\mathbb{Z}\pi$ er en Lebesgue–nulmængde (fordi den er tællelig), følger det ønskede.

(ii). Ved at bruge tællelig additivitet og translationsinvarians af Lebesguemålet får vi

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[-\pi/4, \pi/4]+n\pi\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} m([-\pi/4, \pi/4]+n\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} m([-\pi/4, \pi/4]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi/2 = \infty.$$

(iii). Nej! For hvert n har vi (ifølge oplysningen i (ii)), at $|\cos(x)|^n \geq (\sqrt{2}/2)^n 1_A$, og dermed

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\cos(x)|^n dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}/2)^n 1_A dx = (\sqrt{2}/2)^n m(A) = \infty.$$

Opgave 7 (15 point) Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum. Antag $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ er følger i $\mathcal{L}_2(\mu)$, at $f, g \in \mathcal{L}_2(\mu)$, og at $f_n \to f$ og $g_n \to g$ i 2-middel. Vis at $f_n g_n \to fg$ i 1-middel.

Svar: Det skal vises, at $\|f_n g_n - fg\|_1 \to 0$ for $n \to \infty$. Vi benytter trekantsuligheden (Minkowski) og Hölders ulighed i nedenstående estimater:

$$\begin{aligned}
\|f_n g_n - fg\|_1 &= \|f_n g_n - f_n g + f_n g - fg\|_1 \\
&\le \|f_n g_n - f_n g\|_1 + \|f_n g - fg\|_1 \;=\; \|f_n(g_n - g)\|_1 + \|(f_n - f)g\|_1 \\
&\le \|f_n\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \|g\|_2 .
\end{aligned}$$

Vi ved at $\|f_n - f\|_2 \to 0$ og $\|g_n - g\|_2 \to 0$, og det følger heraf (f.eks. ved at benytte trekantsuligheden $\big|\|f\|_2 - \|f_n\|_2\big| \le \|f - f_n\|_2$), at $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2$. Regneregler for grænseværdi giver

$$\lim_{n\to\infty} \big(\|f_n\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \|g\|_2\big) = 0,$$

hvilket sammen med ovenstående viser det ønskede: $\|f_n g_n - fg\|_1 \to 0$ for $n \to \infty$.