Opg. 5.5:

$(M_1 \times M_2, d)$ er fuldstændig hvis og kun hvis (M_1, d_1) og (M_2, d_2) er fuldstændige.

Bevis:

'$\Rightarrow$'

Antag at $M_1 \times M_2$ er fuldstændig. Lad (x_n) være en Cauchy følge i M_1. For at vise at M_1 er fuldstændig skal vi vise den er konvergent.

Vælg et $a \in M_2$ og betragt $((x_n, a))$ i $M_1 \times M_2$. Bemærk at

$$d((x_n, a), (x_m, a)) = d_1(x_n, x_m)$$

så $((x_n, a))$ er en Cauchy følge da (x_n) er det. Da er $M_1 \times M_2$ er fuldstændig er $((x_n, a))$ konvergent. Sætning 4.3d) giver så at (x_n) er konvergent hvilket skulle vises.

Tilsvarende ses at M_2 er fuldstændig.

'$\Leftarrow$'

Antag at M_1 og M_2 begge er fuldstændige. Lad $((x_n, y_n))$ være en Cauchy følge i $M_1 \times M_2$. Vi skal vise den er konvergent.

Bemærk at

$$d_1(x_n, x_m) \leq d((x_n, y_n), (x_m, y_m))$$

så (x_n) er Cauchy da $((x_n, y_n))$ er det. Tilsvarende ses at (y_n) er Cauchy. Da M_1 er fuldstændig er (x_n) derfor konvergent, og da M_2 er fuldstændig er (y_n) konvergent. Sætning 4.3d) giver så at $((x_n, y_n))$ er konvergent.

Se Gunnars besvarelse for anvendelse på sætning 5.8.