Matematik 2AN

Opgave 2 (a) og (b) fra eksamenen januar 1998

Christian Aastrup

28. november 2001

1 Hilbertrum

Jeg lader H betegne Hilbertrummet $L_2([0,\pi])$ med indre produkt givet ved

$$\langle f, g\rangle = \tfrac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\overline{g(x)}dx$$

og den tilhørende norm være betegnet $\|\cdot\|$. Følgen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ defineres til at være $e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ og $e_n(x) = \cos nx$ for $n \in \mathbb{N}$ og $x \in [0,\pi]$.

1.1 En vektor i H

Jeg vil vise, at rækken

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n^2+1} e_n$$

er konvergent i H og dermed en vektor i rummet H. **Sætning 1.10** giver, at rækken er konvergent hvis og kun hvis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \tfrac{1}{n^2+1} e_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \tfrac{1}{n^2+1} \right|^2 < \infty$$

Jeg beregner

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left| \tfrac{1}{n^2+1} \right|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n^4+2n^2+1} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^4+2n^2+1} \\
&\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^4} \\
&= 1 + \tfrac{\pi^4}{90} < \infty
\end{aligned}$$

Jeg slutter, at $f \in H$.

1.2 $\langle f, \cos^3 \rangle$

Jeg vil beregne $\left\langle f, \cos^3 \right\rangle$, hvor $\cos^3$ er funktionen hvor $x \mapsto (\cos x)^3$. Jeg betragter dog først cosinus

$$\begin{aligned}
\cos x &= \tfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\
&\Downarrow \\
(\cos x)^3 &= \left(\tfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \tfrac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8} \\
&= \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right) \\
&= \tfrac{3}{4}\cos x + \tfrac{1}{4}\cos(3x) = \tfrac{3}{4}e_1(x) + \tfrac{1}{4}e_3(x)
\end{aligned}$$

$\cos^3$ kan skrives som en endelig linear-kombination af basisvektorene; $\cos^3 \in H$.
f og $\cos^3$'s indre produkt er givet ved

$$\begin{aligned}
\left\langle f, \cos^3 \right\rangle &= \left\langle f, \tfrac{3}{4}e_1 + \tfrac{1}{4}e_3 \right\rangle \\
&= \left\langle f, \tfrac{3}{4}e_1 \right\rangle + \left\langle f, \tfrac{1}{4}e_3 \right\rangle \\
&= \tfrac{3}{4}\langle f, e_1 \rangle + \tfrac{1}{4}\langle f, e_3 \rangle \\
&= \tfrac{3}{4}\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n^2+1}e_n, e_1 \right\rangle + \tfrac{1}{4}\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n^2+1}e_n, e_3 \right\rangle \\
&= \tfrac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left\langle \tfrac{1}{n^2+1}e_n, e_1 \right\rangle + \tfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left\langle \tfrac{1}{n^2+1}e_n, e_3 \right\rangle \\
&= \tfrac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{n^2+1}\langle e_n, e_1 \rangle + \tfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{n^2+1}\langle e_n, e_3 \rangle \\
&= \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{1^2+1} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3^2+1} = \tfrac{2}{5}
\end{aligned}$$

Det næstsidste lighedstegn gælder idet

$$\langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$